035 Desde el departamento de orientación de un centro escolar se han realizado una serie de pruebas para determinar la capacidad de visión espacial de la población estudiantil, sabiendo que esta se distribuye según una distribución normal con una desviación típica de 7,8 puntos. Si al elegir aleatoriamente una muestra de 180 estudiantes, se ha obtenido una media muestral de 64 puntos, ¿cuál es el intervalo de confianza para la media de capacidad de visión espacial a un nivel de confianza del 95 %?

$$1-\alpha=0{,}95 \rightarrow \alpha=0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2}=z_{0{,}025}=1{,}96$$

$$\left(64-1{,}96\cdot\frac{7{,}8}{\sqrt{180}};\ 64+1{,}96\cdot\frac{7{,}8}{\sqrt{180}}\right)=(62{,}86;\ 65{,}14)$$

Con la muestra elegida, la probabilidad de que la media de capacidad de visión espacial de los estudiantes esté en el intervalo de confianza (62,86; 65,14) es 0,95.

036 Un estudio estadístico realizado a 49 personas nos dice que el tiempo de conexión anual a Internet de los habitantes de una ciudad sigue una distribución normal de media 250 minutos y desviación típica 30 minutos. Halla el intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 95 %, para el tiempo medio de conexión a Internet.

(La Rioja. Junio 2007. Parte A. Cuestión 4)

$$1-\alpha=0{,}95 \rightarrow \alpha=0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2}=z_{0{,}025}=1{,}96$$

$$\left(250-1{,}96\cdot\frac{30}{\sqrt{49}};\ 250+1{,}96\cdot\frac{30}{\sqrt{49}}\right)=(241{,}6;\ 258{,}4)$$

Con la muestra elegida, la probabilidad de que el tiempo medio de conexión a Internet de los habitantes de esa ciudad esté en el intervalo de confianza (241,6; 258,4) es 0,95.

044 Tras múltiples observaciones se ha constatado que el número de pulsaciones de los deportistas entre 20 y 25 años se distribuye normalmente con una desviación típica de 9 pulsaciones. Si una muestra de 100 deportistas de esa edad presenta una media de 64 pulsaciones:

a) Encontrar el intervalo de confianza al 97 % para la media de pulsaciones de todos los deportistas de esa edad.

b) Interpretar el significado del intervalo obtenido.

(Castilla–La Mancha. Septiembre 2008. Bloque 4. Ejercicio B)

a) $1-\alpha=0{,}97 \rightarrow \alpha=0{,}03 \rightarrow z_{\alpha/2}=z_{0{,}015}$

Para un nivel de confianza del 97 % tenemos que buscar en la tabla de la $N(0, 1)$ el que acumula una probabilidad de 0,985 que es 2,17. Luego .

$$z_{\alpha/2}=z_{0{,}015}=2{,}17$$

$$\left(64-2{,}17\cdot\frac{9}{\sqrt{100}};\ 64+2{,}17\cdot\frac{9}{\sqrt{100}}\right)=(62{,}05;\ 65{,}95)$$

b) La probabilidad de que la muestra proceda de una población cuya media esté en el intervalo (62,05; 65,95) es 0,97.

047 Los responsables de una página web desean estimar el tiempo, en minutos, que sus visitantes permanecen conectados. Una muestra aleatoria de 100 de ellos sigue una distribución normal $N(105, 16)$. Se pide:

a) Estimar el tiempo medio de conexión, en minutos, de los visitantes mediante un intervalo de confianza del 95 %.

b) Determinar el tamaño de la muestra si deseamos que el error cometido al estimar el tiempo medio de conexión, con un nivel de confianza del 99 %, no exceda a 0,2575.

a) $1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

$$\left(105 - 1{,}96 \cdot \frac{16}{\sqrt{100}}; 105 + 1{,}96 \cdot \frac{16}{\sqrt{100}}\right) = (101{,}86; 108{,}14)$$

b) $1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}005} = 2{,}58$

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2{,}58 \cdot 16}{0{,}2575}\right)^2 = 25.699{,}514$$

Para que se cumplan las condiciones y como n tiene que ser un número entero, debe ser mayor o igual que 25.700.

049 Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 individuos a los que se les ha preguntado la cantidad de dinero que tienen en la cartera, obteniéndose una media muestral de 110 €. Se sabe que la desviación típica de la población es de 20 €.

a) Obtener un intervalo de confianza, al 90 %, para la cantidad de dinero en la cartera de la población.

b) ¿Cuál es el error máximo cometido con la estimación anterior?

c) Si deseamos que el error cometido, con el mismo nivel de confianza, sea la décima parte del apartado anterior, ¿cuál ha de ser el tamaño de la muestra?

(Cantabria. Junio 2007. Ejercicio 3. Opción B)

a) $1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 0{,}1 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}05} = 1{,}645$

$$\left(110 - 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}; 110 + 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}\right) = (106{,}71; 113{,}29)$$

b) El error máximo cometido es: $E = 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} = 3{,}29$

c) El tamaño de la muestra para que el error máximo sea 0,329, es:

$$n = \left(\frac{1{,}645 \cdot 20}{0{,}329}\right)^2 = 10.000$$

050 Se ha estudiado el número de horas semanales dedicadas a practicar deporte por los jóvenes de entre 14 y 18 años, obteniéndose una variable aleatoria con distribución normal y de desviación típica igual a una hora.

Si se toma una muestra aleatoria de 64 chicos y chicas de edad entre 14 y 18 años, resulta que practican deporte una media de 6 horas semanales.

a) ¿Cuál es el error de estimación del tiempo medio que practican deporte los jóvenes de la ciudad con un nivel de confianza del 98 %?

b) ¿Qué tamaño muestral mínimo ha de tomarse para que el error en la estimación sea menor de media hora con un nivel de confianza del 97 %?

a) $1 - \alpha = 0{,}98 \rightarrow \alpha = 0{,}02 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}01}$

Para un nivel de confianza del 98 % tenemos que buscar en la tabla de la $N(0, 1)$ el que acumula una probabilidad de 0,99 que es 2,33.

$z_{\alpha/2} = z_{0{,}01} = 2{,}33$

$$E = 2{,}33 \cdot \frac{1}{\sqrt{64}} = 0{,}29$$

b) $1 - \alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}015}$

Para un nivel de confianza del 97 % tenemos que buscar en la tabla de la $N(0, 1)$ el que acumula una probabilidad de 0,985, que es 2,17.

$z_{\alpha/2} = z_{0{,}015} = 2{,}17$

$$n = \left(\frac{2{,}17 \cdot 1}{0{,}5}\right)^2 = 18{,}84$$

Para que se cumplan las condiciones, y como n tiene que ser un número entero, debe ser mayor o igual que 19.

051 Para estimar la calidad del agua en una ciudad se ha seleccionado una muestra de 100 usuarios del servicio de suministro municipal con un nivel de confianza del 95 %. Si el error máximo admisible en el estudio es de 1,274; ¿cuál es la desviación típica de la muestra obtenida?

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

Escribimos la fórmula de cálculo de error y despejamos la desviación típica.

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 1{,}274 = 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \rightarrow \sigma = \frac{1{,}274 \cdot 10}{1{,}96} = 6{,}5$$

053 El peso de los niños varones a las 10 semanas de vida se distribuye según una normal con desviación típica de 87 g.

¿Cuántos datos son suficientes para estimar, con una confianza del 95 %, el peso medio de esa población con un error no superior a 15 g?

(Murcia. Junio 2007. Bloque 5. Cuestión 2)

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$

Sustituyendo los valores y despejando se tiene:

$$n = \left(\frac{1,96 \cdot 87}{15}\right)^2 \rightarrow n = 129,23$$

Para que se cumplan las condiciones, y como el número de datos n tiene que ser un número entero, debe ser mayor o igual que 130.

054 El tiempo en minutos dedicado cada día a escuchar música por los estudiantes de Secundaria de una cierta ciudad se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 15 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 estudiantes y se obtienen los siguientes tiempos (en minutos):

91	68	39	82	55
70	72	62	54	67

a) Determínese un intervalo de confianza al 90 % para el tiempo medio diario dedicado a escuchar música por un estudiante.

b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para conseguir una estimación de la media del tiempo diario dedicado a escuchar música con un error menor que 5 minutos, con un nivel de confianza del 95 %.

(Madrid. Junio 2008. Opción A. Ejercicio 4)

Primero calculamos la media de la muestra: $\overline{x} = \dfrac{660}{10} = 66$

a) $1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,1 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,05} = 1,645$

$$\left(66 - 1,645 \cdot \frac{15}{\sqrt{10}}; 66 + 1,645 \cdot \frac{15}{\sqrt{10}}\right) = (58,2; 73,8)$$

b) $1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$

Sustituyendo los valores y despejando se tiene:

$$n = \left(\frac{1,96 \cdot 15}{5}\right)^2 \rightarrow n = 34,57$$

Para que se cumplan las condiciones, y como n tiene que ser un número entero, debe ser mayor o igual que 35.

055 Se ha tomado una muestra de los precios de los melocotones en 16 establecimientos, elegidos al azar, en una ciudad donde se ha determinado que los precios se distribuyen según una distribución normal de varianza 25 y media desconocida.

Si se han obtenido estos precios, en céntimos de euro,

95	108	97	112
99	106	105	100
99	98	104	110
107	111	103	110

halla un intervalo de confianza para el precio medio de los melocotones a un nivel de confianza del 90 %.

Primero calculamos la media de la muestra:

$$\overline{x} = \frac{1.664}{16} = 104$$

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,1 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,05} = 1,645$$

$$\left(104 - 1,645 \cdot \frac{25}{\sqrt{16}}; 104 + 1,64 \cdot \frac{25}{\sqrt{16}}\right) = (93,72; 114,28)$$

056 La duración de las baterías de un modelo de teléfono móvil, en horas, sigue una distribución normal de media desconocida y varianza 900. Con una muestra elegida al azar, y a un nivel de confianza del 95 %, se ha obtenido para la media el intervalo de confianza (37,26; 39,22). Calcula el valor que se ha obtenido en dicha muestra para la media y halla el tamaño muestral utilizado.

Como la varianza es 900, se tiene que: $\sigma^2 = 900 \rightarrow \sigma = \sqrt{900} = 30$

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$$

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (37,26; 39,22)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{x} - 1,96 \cdot \dfrac{30}{\sqrt{n}} = 37,26 \\ \overline{x} + 1,96 \cdot \dfrac{30}{\sqrt{n}} = 39,22 \end{array}\right\} \rightarrow 2\overline{x} = 76,48 \rightarrow \overline{x} = 38,24$$

Despejamos n de la primera ecuación:

$$38,24 - 1,96 \cdot \frac{30}{\sqrt{n}} = 37,26 \rightarrow 0,98 = 1,96 \cdot \frac{30}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \left(\frac{1,96 \cdot 30}{0,98}\right)^2 = 3.600$$

057 Se sabe que (45,13; 51,03) es un intervalo de confianza, al 95 %, para la media de una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica 15.

a) ¿Cuál es el error cometido?

b) Calcule, con el mismo nivel de confianza, el tamaño muestral mínimo necesario para que el error no sea superior a 1,8.

(Andalucía. Septiembre 2007. Opción B. Ejercicio 3)

a) El error máximo cometido es el radio del intervalo.

$$r = \frac{51,03 - 45,13}{2} = 2,95 \rightarrow \text{Error} = 2,95$$

b) $1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$

El tamaño de la muestra es:

$$n = \left(\frac{1,96 \cdot 15}{1,8}\right)^2 = 266,78$$

Por tanto, el tamaño muestral mínimo debe ser mayor o igual que 267.

060 La vida media de un determinado modelo de bombilla sigue una distribución normal con desviación típica igual a 60 días. Elegida una muestra y con un nivel de confianza del 98 % se obtiene el intervalo (388,68; 407,32) para la vida media. Calcule la media y el tamaño de la muestra elegida. Detalle los pasos realizados para obtener los resultados.

(Aragón. Junio 2008. Cuestión C2)

Como el intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

La media de la muestra es el punto medio del intervalo.

$$\overline{x} = \frac{388{,}68 + 407{,}32}{2} = 398 \text{ días}$$

La amplitud del intervalo es 18,64, por tanto:

$$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 9{,}32$$

$1 - \alpha = 0{,}98 \rightarrow \alpha = 0{,}02 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}01}$

Para un nivel de confianza del 98 % tenemos que buscar en la tabla de la $N(0, 1)$ el que acumula una probabilidad de 0,99 que es 2,33.

$$2{,}33 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} = 9{,}32 \rightarrow \sqrt{n} = 15 \rightarrow n = 225 \text{ bombillas}$$

061 En un paso elevado se observa que el peso medio de los vehículos que lo atraviesan en un día se distribuye según una distribución normal, con desviación típica de 900 kg. A lo largo de una semana se ha encontrado un intervalo de confianza para la media semanal de extremos 4,663 y 5,839 toneladas.

a) Halla el peso medio de los vehículos que han utilizado el paso elevado en esa semana.

b) ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado en esta estimación?

a) El intervalo de confianza es de la forma:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Así, la media de la muestra es el punto medio del intervalo:

$$\overline{x} = \frac{4.663 + 5.839}{2} = 5.251 \text{ kilogramos}$$

b) La amplitud del intervalo es 1.176.

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{900}{\sqrt{7}} = 588 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,73$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9582 \rightarrow \alpha = 0,0836$$

Nivel de confianza: $1 - \alpha = 0,9164$

062 El gasto mensual (en euros) en electricidad por familia, para las familias de cierta ciudad, sigue una distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 25$ €.

a) A partir de una muestra de 100 familias de esa ciudad, se obtuvo el intervalo de confianza (45, 55) para el gasto mensual por familia en electricidad. Determinar el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo.

b) Qué número de familias tendríamos que seleccionar al azar, como mínimo, para garantizar, con un nivel de confianza del 99 %, una estimación del gasto medio con un error máximo no superior a 3 €?

(Galicia. Junio 2007. Bloque 3. Ejercicio 2)

a) $$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (45, 55)$$

$$\rightarrow \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{25}{\sqrt{100}}; \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{25}{\sqrt{100}}\right) = (45, 55)$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} \overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{25}{\sqrt{100}} = 45 \\ \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{25}{\sqrt{100}} = 55 \end{aligned}\right\} \rightarrow 5 \cdot z_{\alpha/2} = 10 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9772 \rightarrow \alpha = 0,0456$$

Nivel de confianza: $1 - \alpha = 0,9544$

b) El error máximo admisible es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,001 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,005} = 2,58 \rightarrow n = \left(\frac{2,58 \cdot 25}{3}\right)^2 = 462,25$$

Tendríamos que seleccionar al azar como mínimo a 463 familias.