

	Nombre y apellidos		Curso: 4º ESO	Calificación sobre 10 p.:
	Asignatura: Matemáticas	FICHA DE REFUERZO	Fecha de entrega:	
UNIDAD 3. POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS				

Notas a tener en cuenta para resolver la ficha:

- En todos los ejercicios debe estar hecho obligatoriamente el desarrollo o procedimiento para llegar a la solución.
- Siempre que sea posible debes operar en forma de fracción y expresar el resultado como fracción irreducible.
- La presentación es importante, debes cuidarla.

Ejercicio 1

Determina el cociente y el resto, aplicando la regla de Ruffini.

a) $(x^3 - x^2 + x - 3) : (x - 1)$

b) $(x^4 - x^3 - x + 9) : (x - 2)$

c) $(x^4 + x^2 - 10) : (x - 5)$

d) $(x^5 - 2x^3 + x - 7) : (x + 3)$

e) $(x^7 + x^4 - 7x^2) : (x + 4)$

Ejercicio 2

Calcula el valor de m para que la división sea exacta.

$$(x^5 - 2x^3 - 8x^2 + mx + 3) : (x - 3)$$

Ejercicio 3

Considerando el polinomio:

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + x - 7$$

calcula, mediante el teorema del resto, su valor numérico para:

- | | | |
|------------|-------------|-------------|
| a) $x = 1$ | c) $x = -1$ | e) $x = 3$ |
| b) $x = 5$ | d) $x = 7$ | f) $x = -5$ |

Ejercicio 4

Calcula las raíces de estos polinomios.

- | | |
|----------------------------|---------------------------------|
| a) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ | c) $R(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 6$ |
| b) $Q(x) = x^2 - 2x + 1$ | d) $S(x) = x^2 - 5x - 14$ |

Ejercicio 5

Halla un divisor de estos polinomios.

- | |
|---------------------------------|
| a) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$ |
| b) $Q(x) = x^4 - 4x^2 - x + 2$ |
| c) $R(x) = x^6 - x^5 - 2x + 2$ |

Ejercicio 6

Descompón en factores estos polinomios.

a) $P(x) = x^3 - 8$

d) $P(x) = x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 23x^2 - 12x$

b) $P(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$

e) $P(x) = x^3 - 3x^2 - 25x - 21$

c) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$

f) $P(x) = x^5 - 9x^3$

Ejercicio 7

Simplifica estas fracciones algebraicas.

a) $\frac{2x - 2}{2x - 6}$

c) $\frac{x - 1}{x^2 - 1}$

e) $\frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2 - 5x + 4}$

b) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3}$

d) $\frac{2x^3 + 4x^2 + 2x}{6x^3 - 6x}$

f) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

Ejercicio 8

Halla el resto de esta división. $(x^{200} + 1) : (x + 1)$

Ejercicio 9

Halla el valor de m para que las divisiones sean exactas.

a) $(x^2 - 12x + m) : (x + 4)$

d) $(x^3 - 2(m + 1)x^2 + m) : (x + 1)$

b) $(x^3 + 2x^2 + 8x + m) : (x - 2)$

e) $(x^3 + mx^2 + 2x - 10) : (x - 5)$

c) $(x^3 - x^2 + 2mx - 12) : (x - 6)$

Ejercicio 10

Halla el valor de $P(x)$ para que las fracciones sean equivalentes.

a) $\frac{x + 1}{x} = \frac{P(x)}{x^2 - 2x}$

c) $\frac{P(x)}{x} = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$

b) $\frac{x + 4}{x - 3} = \frac{x^3 + 4x^2 - x - 4}{P(x)}$

d) $\frac{x^2 - 10}{P(x)} = \frac{x^3 + 8x^2 - 10x - 80}{x^2 + 13x + 40}$

Ejercicio 11

Simplifica estas fracciones algebraicas.

a) $\frac{x+1}{x^2-1}$

e) $\frac{x^2-4x+3}{x^3-6x^2+11x-6}$

b) $\frac{x^2-4}{x^2-4x+2}$

f) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$

c) $\frac{x^2-1}{x-1}$

g) $\frac{x^4+x^3+x^2}{3x^2+3x+3}$

d) $\frac{x^2-x}{x^3-x^2}$

h) $\frac{x^3-12x+16}{x^3-10x^2+32x-32}$

Ejercicio 12

Realiza estas operaciones y simplifica.

a) $\frac{2}{x^2+2x+1} - \frac{3}{x^2-1} - \frac{4}{x^2-2x+1}$

b) $\frac{5}{4x} + \frac{1}{x+1} - \frac{2x-3}{x^2+x} - \frac{3}{4}$

c) $\frac{x-1}{2x+6} + \frac{8}{-3x-9} - \frac{1}{3x^2}$

d) $\frac{x-2}{6x+6} - \frac{x+3}{2x+2} + \frac{3-x}{4x+4}$

Ejercicio 13

Efectúa las operaciones.

$$\text{a) } \frac{9x}{3x-3} \cdot \frac{x^2-1}{3x^2}$$

$$\text{b) } \frac{2x-6}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+4x+4}{x^2-6x+9}$$

$$\text{c) } \frac{x-3}{x} \cdot \frac{x^2+3x}{x^2-9}$$

$$\text{d) } \frac{x+5}{x-5} \cdot \frac{x^2-25}{x^2+25}$$

Ejercicio 14

Efectúa estas divisiones de fracciones algebraicas, y simplifica el resultado.

$$\text{a) } \frac{x^2-1}{x^2-4x+4} : \frac{x^2+2x+1}{x^2-4}$$

$$\text{c) } \frac{2x-1}{x^2+2x} : \frac{4x}{x^3+2x^2}$$

$$\text{b) } \frac{3x+9}{x-3} : \frac{x^3+8x^2+21x+18}{x^2-9}$$

Ejercicio 15

Haz las siguientes operaciones entre fracciones algebraicas.

$$\text{a) } \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x-3}{x^2-4} \right) \cdot \frac{x+2}{x} - \frac{x}{2}$$

$$\text{b) } \left(\frac{6}{1-x} - \frac{5x}{x-1} \right) : \frac{x^2-1}{2} + \frac{3}{x}$$

$$\text{c) } \left(x+1 + \frac{x^2}{1-x} \right) : \left(1 - \frac{x}{1+x} \cdot \frac{x+1}{x^3} \right) + \frac{4}{x^2-1}$$

$$\text{d) } \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x} \right) \left(\frac{x-1}{x} - \frac{x-2}{2x} \right) - \frac{1}{x^2-1}$$

Soluciones:

Ejercicio 1

- a)
$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \rightarrow C(x) = x^2 + 1; R(x) = -2$$
- b)
$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 9 \\ & & 2 & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 3 & 15 \end{array} \rightarrow C(x) = x^3 + x^2 + 2x + 3; R(x) = 15$$
- c)
$$\begin{array}{r|rrrrr} 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & -10 \\ & & 5 & 25 & 130 & 650 \\ \hline & 1 & 5 & 26 & 130 & 640 \end{array}$$

 $C(x) = x^3 + 5x^2 + 26x + 130; R(x) = 640$
- d)
$$\begin{array}{r|rrrrrr} -3 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -7 \\ & & -3 & 9 & -21 & 63 & -192 \\ \hline & 1 & -3 & 7 & -21 & 64 & -199 \end{array}$$

 $C(x) = x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 21x + 64; R(x) = -199$
- e)
$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ & & -4 & 16 & -64 & 252 & -1008 & 4060 & -16240 \\ \hline & 1 & -4 & 16 & -63 & 252 & -1015 & 4060 & -16240 \end{array}$$

 $C(x) = x^6 - 4x^5 + 16x^4 - 63x^3 + 252x^2 - 1015x + 4060$
 $R(x) = -16240$

Ejercicio 2

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 3 & 1 & 0 & -2 & -8 & m & 3 \\ & & 3 & 9 & 21 & 39 & 117 + 3m \\ \hline & 1 & 3 & 7 & 13 & 39 + m & 120 + 3m \end{array}$$

 $120 + 3m = 0 \rightarrow m = -40$

Ejercicio 3

- a)
$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -7 & 1 & -7 \\ & & 1 & -6 & -5 \\ \hline & 1 & -6 & -5 & -12 \end{array} \rightarrow \text{Como el resto es } -12, \text{ entonces } P(1) = -12.$$
- b)
$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & -7 & 1 & -7 \\ & & 5 & -10 & -45 \\ \hline & 1 & -2 & -9 & -52 \end{array} \rightarrow \text{Como el resto es } -52, \text{ entonces } P(5) = -52.$$
- c)
$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -7 & 1 & -7 \\ & & -1 & 8 & -9 \\ \hline & 1 & -8 & 9 & -16 \end{array} \rightarrow \text{Como el resto es } -16, \text{ entonces } P(-1) = -16.$$
- d)
$$\begin{array}{r|rrrr} 7 & 1 & -7 & 1 & -7 \\ & & 7 & 0 & 7 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Como el resto es } 0, \text{ entonces } P(7) = 0.$$
- e)
$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -7 & 1 & -7 \\ & & 3 & -12 & -33 \\ \hline & 1 & -4 & -11 & -40 \end{array} \rightarrow \text{Como el resto es } -40, \text{ entonces } P(3) = -40.$$
- f)
$$\begin{array}{r|rrrr} -5 & 1 & -7 & 1 & -7 \\ & & -5 & 60 & -305 \\ \hline & 1 & -12 & 61 & -312 \end{array} \rightarrow \text{Como el resto es } -312, \text{ entonces } P(-5) = -312.$$

Ejercicio 4

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ & 1 & -2 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array} \rightarrow 1 \text{ es raíz, } 1 + \sqrt{3} \text{ y } 1 - \sqrt{3} \text{ son también raíces.}$$

b)
$$\begin{array}{r|rrr} 1 & 1 & -2 & 1 \\ & 1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 0 \end{array} \rightarrow 1 \text{ es raíz doble.}$$

c) No tiene raíces racionales, al probar con los divisores del término independiente el resto nunca da cero.

d)
$$\begin{array}{r|rrr} -2 & 1 & -5 & -14 \\ & 1 & -7 & 14 \\ \hline & 1 & -7 & 0 \end{array} \rightarrow -2 \text{ es raíz}$$

$$\begin{array}{r|rrr} 7 & 1 & -5 & -14 \\ & 1 & 2 & 14 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array} \rightarrow 7 \text{ es raíz}$$

Son las dos raíces del polinomio.

Ejercicio 5

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -3 & 2 & -6 \\ & 1 & 0 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \rightarrow (x - 3) \text{ es divisor de } P(x).$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 0 & -4 & -1 & 2 \\ & 1 & -1 & -3 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \end{array} \rightarrow (x + 1) \text{ es divisor de } Q(x).$$

c)
$$\begin{array}{r|rrrrrrr} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \rightarrow (x - 1) \text{ es divisor de } R(x).$$

Ejercicio 6

a) $P(x) = x^3 - 8 = (x^2 + 2x + 4) \cdot (x - 2)$

b) $P(x) = x \cdot (x^2 + 4x + 4) = x \cdot (x + 2)^2$

c) $P(x) = (x + 1)^2 \cdot (x - 2)^2$

d) $P(x) = x \cdot (x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 23x + 4) = x \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 3) \cdot (x + 4)$

e) $P(x) = (x + 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 7)$

f) $P(x) = x^3 \cdot (x^2 - 9) = x^3 \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$

Ejercicio 7

a) $\frac{2x-2}{2x-6} = \frac{2 \cdot (x-1)}{2 \cdot (x-3)} = \frac{x-1}{x-3}$

b) $\frac{x^2-1}{x^2-4x+3} = \frac{(x+1) \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x-3)} = \frac{x+1}{x-3}$

c) $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x+1) \cdot (x-1)} = \frac{1}{x+1}$

d) $\frac{2x^3+4x^2+2x}{6x^3-6x} = \frac{2x \cdot (x+1)^2}{6x \cdot (x+1) \cdot (x-1)} = \frac{x+1}{3 \cdot (x-1)}$

e) $\frac{x^3+3x^2-4}{x^2-5x+4} = \frac{(x-1) \cdot (x+2)^2}{(x-4) \cdot (x-1)} = \frac{(x+2)^2}{x-4}$

f) $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1}$

Ejercicio 8

$$P(-1) = (-1)^{200} + 1 = 2 \rightarrow \text{Resto: } 2$$

Ejercicio 9

$$\begin{array}{r|rrrr} a) & 1 & -12 & m & \\ -4 & & -4 & 64 & \\ \hline & 1 & -16 & m+64 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} m+64=0 \\ m=-64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} b) & 1 & 2 & 8 & m \\ 2 & & 2 & 8 & 32 \\ \hline & 1 & 4 & 16 & m+32 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} m+32=0 \\ m=-32 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} c) & 1 & -1 & 2m & -12 \\ 6 & & 6 & 30 & 12m+180 \\ \hline & 1 & 5 & 2m+30 & 12m+168 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 12m+168=0 \\ m=-14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} d) & 1 & -2(m+1) & 0 & m \\ -1 & & -1 & 2m+3 & -2m-3 \\ \hline & 1 & -2m-3 & 2m+3 & -m-3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} -m-3=0 \\ m=-3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} e) & 1 & m & 2 & -10 \\ 5 & & 5 & 5m+25 & 25m+135 \\ \hline & 1 & m+5 & 5m+27 & 25m+125 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 25m+125=0 \\ m=-\frac{125}{25}=-5 \end{array}$$

Ejercicio 10

$$a) P(x) = \frac{(x+1) \cdot (x^2-2x)}{x} = (x+1) \cdot (x-2) = x^2 - x - 2$$

$$b) P(x) = \frac{(x-3) \cdot (x^3+4x^2-x-4)}{x+4} = (x-3) \cdot (x^2-1) = x^3 - 3x^2 - x + 3$$

$$c) P(x) = \frac{x \cdot (x^2-16)}{x^2-4x} = x+4$$

$$d) P(x) = \frac{(x^2-10) \cdot (x^2+13x+40)}{x^3+8x^2-10x-80} = x+5$$

Ejercicio 11

$$a) \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1}$$

$$e) \frac{x^2-4x+3}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{1}{x-2}$$

$$b) \frac{x^2-4}{x^2-4x+2} = \frac{x+2}{x-2}$$

$$f) \frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$c) \frac{x^2-1}{x-1} = x+1$$

$$g) \frac{x^4+x^3+x^2}{3x^2+3x+3} = \frac{x^2}{3}$$

$$d) \frac{x^2-x}{x^3-x^2} = \frac{1}{x}$$

$$h) \frac{x^3-12x+16}{x^3-10x^2+32x-32} = \frac{(x-2) \cdot (x+4)}{(x-4)^2}$$

Ejercicio 12

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2 \cdot (x-1)^2}{(x+1)^2 \cdot (x-1)^2} - \frac{3 \cdot (x+1) \cdot (x-1)}{(x+1)^2 \cdot (x-1)^2} - \frac{4 \cdot (x+1)^2}{(x+1)^2 \cdot (x-1)^2} &= \\ &= \frac{-5x^2 - 12x + 1}{(x+1)^2 \cdot (x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{5 \cdot (x+1)}{4x \cdot (x+1)} + \frac{4x}{4x \cdot (x+1)} - \frac{4 \cdot (2x-3)}{4x \cdot (x+1)} - \frac{3x \cdot (x+1)}{4x \cdot (x+1)} &= \\ &= \frac{-3x^2 - 2x + 17}{4x \cdot (x+1)} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \frac{3x^2 \cdot (x-1)}{6x^2 \cdot (x+3)} - \frac{2x^2 \cdot 8}{6x^2 \cdot (x+3)} - \frac{2 \cdot (x+3)}{6x^2 \cdot (x+3)} = \frac{3x^3 - 19x^2 - 2x - 6}{6x^2 \cdot (x+3)}$$

$$\text{d) } \frac{2 \cdot (x-2)}{12 \cdot (x+1)} - \frac{6 \cdot (x+3)}{12 \cdot (x+1)} + \frac{3 \cdot (3-x)}{12 \cdot (x+1)} = \frac{-7x - 11}{12 \cdot (x+1)}$$

Ejercicio 13

$$\text{a) } \frac{9x \cdot (x+1) \cdot (x-1)}{9x^2 \cdot (x-1)} = \frac{x+1}{x}$$

$$\text{b) } \frac{2 \cdot (x-3) \cdot (x+2)^2}{(x+2) \cdot (x-2) \cdot (x-3)^2} = \frac{2 \cdot (x+2)}{(x-2) \cdot (x-3)}$$

$$\text{c) } \frac{(x-3) \cdot x \cdot (x+3)}{x \cdot (x+3) \cdot (x-3)} = 1$$

$$\text{d) } \frac{(x+5) \cdot (x+5) \cdot (x-5)}{(x-5) \cdot (x^2+25)} = \frac{(x+5)^2}{x^2+25}$$

Ejercicio 14

$$\text{a) } \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x-2)^2} : \frac{(x+1)^2}{(x+2) \cdot (x-2)} = \frac{(x-1) \cdot (x+2)}{(x-2) \cdot (x+1)}$$

$$\text{b) } \frac{3 \cdot (x+3)}{(x-3)} : \frac{(x+2) \cdot (x+3)^2}{(x+3) \cdot (x-3)} = \frac{3}{x+2}$$

$$\text{c) } \frac{2x-1}{x \cdot (x+2)} : \frac{4x}{x^2 \cdot (x+2)} = \frac{2x-1}{4}$$

Ejercicio 15

$$\begin{aligned} \text{a) } \left(\frac{5}{(x+2) \cdot (x-2)} \right) \cdot \frac{x+2}{x} - \frac{x}{2} &= \frac{5}{x \cdot (x-2)} - \frac{x}{2} = \\ &= \frac{10 - x^2 \cdot (x-2)}{2x \cdot (x-2)} = \frac{10 - x^3 + 2x^2}{2x \cdot (x-2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left(\frac{-5x-6}{x-1} \right) : \frac{(x+1) \cdot (x-1)}{2} + \frac{3}{x} &= \frac{-10x-12}{(x+1) \cdot (x-1)^2} + \frac{3}{x} = \\ &= \frac{-10x^2 - 12x + 3 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^2}{x \cdot (x+1) \cdot (x-1)^2} = \frac{-3x^3 - 13x^2 - 15x + 3}{x \cdot (x+1) \cdot (x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(\frac{-1}{x-1} \right) : \left(\frac{(x+1) \cdot (x-1)}{x^2} \right) + \frac{4}{(x+1) \cdot (x-1)} &= \\ &= \frac{-x^2}{(x+1) \cdot (x-1)^2} + \frac{4}{(x+1) \cdot (x-1)} = \\ &= \frac{-x^2 + 4 \cdot (x-1)}{(x+1) \cdot (x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \left(\frac{4}{3x} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{(x+1) \cdot (x-1)} &= \frac{2}{3x} - \frac{1}{(x+1) \cdot (x-1)} = \\ &= \frac{2x^2 - 2 - 3x}{3x \cdot (x+1) \cdot (x-1)} \end{aligned}$$