LEYES FUNDAMENTALES DE LA DINÁMICA

Para resolver estos ejercicios debes aplicar el criterio de signos que hemos propuesto al principio del cuaderno, e identificar con claridad los datos y las incógnitas en todos los casos.

Como la velocidad, la aceleración y la fuerza son magnitudes vectoriales, has de conocer en todos los casos su dirección y su sentido y así determinar su signo.

Todos los ejercicios que tratamos se basan en las tres leyes de Newton, o leyes fundamentales de la dinámica, por tanto, debes conocerlas.

Recuerda que son las fuerzas las que originan los movimientos y sus cambios. Éstos los has estudiado en cinemática, pero ahora volvemos a encontrarlos. Debes, pues, recordar los conceptos fundamentales de esa otra parte importante de la Física.

PROBLEMAS RESUELTOS

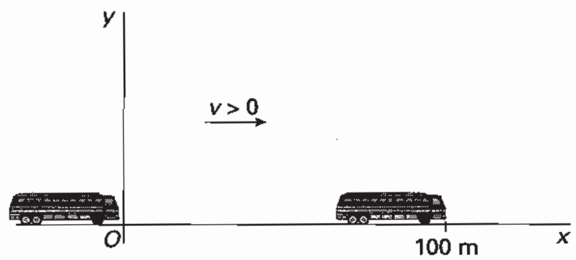
Un autocar de 6,2 t se desplaza por una carretera horizontal a 90 km/h. Frena y se detiene en 8 s.

a) ¿Qué fuerza ejercen los frenos?

b) ¿Qué distancia recorre durante la frenada?

Solución

a) Vamos a situar el punto de referencia en el punto en donde empiezan a actuar los frenos. Suponemos que ese punto es el origen de un sistema de coordenadas cartesianas, y que el autocar se desplaza en el sentido del semieje positivo de las x, como se puede ver en la figura.



De acuerdo con nuestro criterio de signos, disponemos de los siguientes *datos:*

- Masa del autocar: $m = 6{,}2 \cdot 10^3$ kg.
- Posición inicial: $x_0 = 0$.

- Velocidad inicial: $v_0 = \dfrac{90 \cdot 10^3 \text{ m}}{3.600 \text{ s}} = 25 \text{ m s}^{-1}$.
- Velocidad final: $v = 0$, porque el autobús se detiene.
- Tiempo: $t = 8$ s.

Las *incógnitas* son la fuerza **F** que ejercen los frenos, y en consecuencia la aceleración, y la posición final del autocar x.

La aceleración de frenado del autocar es la correspondiente a un movimiento rectilíneo uniformemente variado:

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - 25 \text{ m s}^{-1}}{8 \text{ s}} = -3{,}1 \text{ m s}^{-2}$$

IMPORTANTE

El signo negativo de la aceleración indica que tiene el sentido del semieje negativo de las x; es decir, tiene sentido contrario a la velocidad.

La ley fundamental de la dinámica nos permite obtener la fuerza ejercida por los frenos:

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$$

y como **F** y **a** tienen la misma dirección, la del eje de las x, podemos utilizar sus módulos:

$$F = ma = 6{,}2 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot (-3{,}1 \text{ m s}^{-2}) = -1{,}92 \cdot 10^4 \text{ N} = -19{,}2 \text{ kN}$$

b) Por tratarse de un movimiento uniformemente variado y rectilíneo, la posición final del autocar es:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 0 + 25 \text{ m s}^{-1} \cdot 8 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot (-3{,}1 \text{ m s}^{-2}) \cdot (8 \text{ s})^2$$

$$x = 100{,}8 \text{ m}$$

Mientras dura la frenada, el autocar recorre 100,8 m.

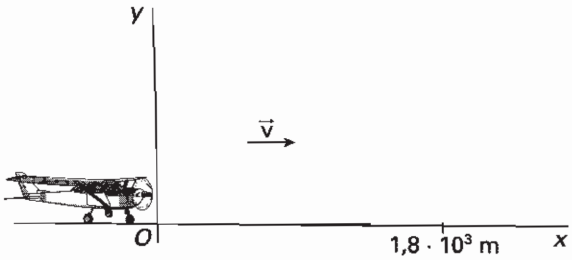
Un avión de 80 t, que está parado en la cabecera de pista, arranca y alcanza la velocidad de despegue, 162 km h^{-1}, tras recorrer 1,8 km por la pista. ¿Qué fuerza, supuesta constante, han ejercido sus motores?

Solución

Tomamos como referencia un sistema de coordenadas cartesianas, y suponemos que el avión está inicialmente situado en el origen de coordenadas, desplazándose en el sentido del semieje positivo de las x, es decir, con velocidad positiva.

Disponemos de los siguientes *datos:*

- Masa del avión: $m = 80 \cdot 10^3$ kg.
- Posición inicial del avión: $x_0 = 0$.
- Posición final del avión en la pista: $x = 1{,}8 \cdot 10^3$ m.
- Velocidad inicial: $v_0 = 0$ (el avión parte del reposo).



- Velocidad en el momento del despegue: $v = 162 \text{ km h}^{-1} = \dfrac{162 \cdot 10^3 \text{ m}}{3.600 \text{ s}} = 45 \text{ m s}^{-1}$.

La aceleración constante del avión en su movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado por la pista de despegue es:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \; ; \quad a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)}$$

Al introducir los datos del problema se obtiene el siguiente valor de la aceleración:

$$a = \frac{(45 \text{ m s}^{-1})^2 - 0}{2(1{,}8 \cdot 10^3 \text{ m} - 0)} = 0{,}56 \text{ m s}^{-2}$$

IMPORTANTE

El signo positivo de la aceleración indica que tiene el sentido del semieje positivo de las x. Tiene igual sentido que la velocidad.

La segunda ley de Newton nos permite calcular la fuerza realizada por los motores:

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$$

Como los vectores **F** y **a** tienen la misma dirección podemos utilizar sus módulos:

$$F = ma = 80 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 0{,}56 \text{ m s}^{-2} = 4{,}48 \cdot 10^4 \text{ N} = 44{,}8 \text{ kN}$$

Una patinadora de masa $m = 50$ kg se desliza sobre una superficie horizontal de hielo, gracias a una fuerza constante de 12 N, paralela al suelo, que tira de ella, sin que el hielo oponga ninguna resistencia a su avance. Calcula su aceleración y su velocidad cuando haya recorrido 25 m.

Solución

Consideremos a la patinadora situada en el origen de unos ejes de coordenadas cartesianas y desplazándose en el sentido del semieje positivo de las x. En estas circunstancias, tanto la velocidad como la aceleración son positivas, y tenemos los siguientes datos e incógnitas:

Datos:

- Masa de la patinadora: $m = 50$ kg.
- Fuerza constante: $F = 12$ N.
- Espacio o distancia recorrida: $x = 25$ m.
- Velocidad inicial: $v_0 = 0$, porque parte del reposo en el punto de referencia elegido, el origen de coordenadas.
- Posición inicial: $x_0 = 0$, porque inicia el movimiento en el origen de coordenadas.

Incógnitas:

- La velocidad de la patinadora y su aceleración.

Como la masa y la fuerza son constantes, la aceleración también lo será; por consiguiente, el movimiento de la patinadora es rectilíneo y uniformemente acelerado. Podemos calcular su aceleración a partir de la ecuación fundamental de la dinámica:

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$$

Como la fuerza y la aceleración tienen la misma dirección podemos utilizar sus módulos:

$$F = m \cdot a \ ; \quad a = \frac{F}{m} = \frac{12 \text{ N}}{50 \text{ kg}} = 0{,}24 \text{ m s}^{-2}$$

El cálculo de la velocidad es un problema de cinemática. Con los datos que tenemos, la ecuación más adecuada es:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

que se simplifica al considerar que tanto x_0 como v_0 son nulos.

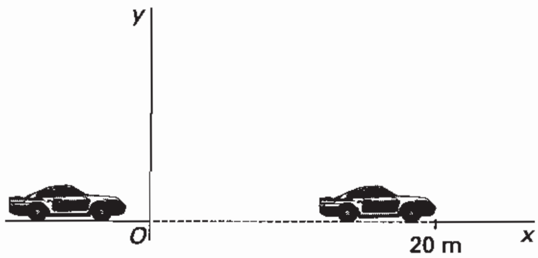
$$v^2 = 2ax \ ; \quad v = \sqrt{2ax} = \sqrt{2 \cdot 0{,}24 \text{ m s}^{-2} \cdot 25 \text{ m}} = 3{,}5 \text{ m s}^{-1}$$

Un coche de masa $m = 1{,}4$ t se aproxima a un semáforo con una velocidad de 50 km h^{-1}. Cuando está a 20 m de distancia frena y se detiene en el semáforo. ¿Qué fuerza media realizan los frenos?

Solución

Si tomamos como referencia el punto en donde empieza a frenar el coche, tenemos los siguientes *datos:*

- Masa del coche: $m = 1.400$ kg.
- Velocidad inicial: $v_0 = 50 \text{ km h}^{-1} = \dfrac{50 \cdot 10^3 \text{ m}}{3.600 \text{ s}} = 13{,}9 \text{ m s}^{-1}$.
- Velocidad final: $v_f = 0$, porque el coche se detiene.
- Distancia recorrida: $x = 20$ m.



La *incógnita* es la fuerza media que realizan los frenos, y podemos calcularla determinando previamente la aceleración de frenado correspondiente a un movimiento uniformemente decelerado:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \; ; \qquad a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)}$$

De acuerdo con nuestro sistema de referencia $x_0 = 0$, y la aceleración es:

$$a = \frac{0 - (13{,}9 \text{ m s}^{-1})^2}{2 \cdot 20 \text{ m}} = -4{,}8 \text{ m s}^{-2}$$

El principio fundamental de la dinámica nos permite calcular la fuerza media realizada por los frenos:

$$F = ma = 1{,}4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot (-4{,}8 \text{ m s}^{-2}) = -6{,}7 \cdot 10^3 \text{ N} = -6{,}7 \text{ kN}$$

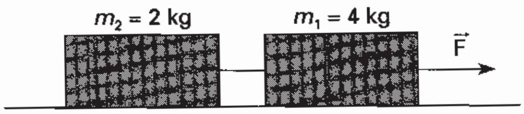
IMPORTANTE

La fuerza es negativa porque se opone al movimiento del coche, tiene el mismo sentido que la aceleración y sentido opuesto a la velocidad.

Los bloques m_1 y m_2 de la figura se hallan unidos mediante una cuerda, y se sitúan sobre una superficie horizontal sin rozamiento. La fuerza $F = 36$ N arrastra todo el conjunto. Calcula:

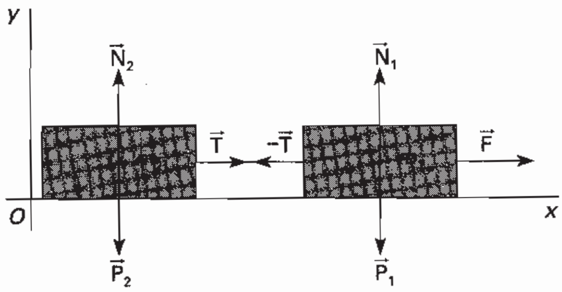
a) La aceleración con que se mueven.

b) La tensión de la cuerda que une ambos bloques.



Solución

En un problema de dinámica siempre es necesario conocer las fuerzas que actúan, pero si además, como ocurre en este caso, aparecen varias, es imprescindible hacer un esquema con todas las que intervienen:



Las fuerzas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ son los pesos de los bloques; son fuerzas verticales y se dirigen hacia el centro de la Tierra. Están equilibradas por las fuerzas $\mathbf{N}_1$ y $\mathbf{N}_2$ que representan la reacción del plano.

La fuerza $\mathbf{T}$ es la acción que el bloque m_1 ejerce sobre el m_2 y que transmite la cuerda. Según el principio de acción y reacción, el bloque m_2 ejerce sobre el m_1 una reacción $-\mathbf{T}$. Por tanto, el valor numérico de la tensión es idéntico en ambos extremos.

a) Si suponemos que la fuerza **F** arrastra todo el conjunto en el sentido del semieje positivo de las x, las fuerzas que tengan ese sentido, el del movimiento, serán positivas, y negativas las que tengan el sentido contrario.

Según la ley fundamental de la dinámica, la aceleración del conjunto es la siguiente:

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma m \cdot \mathbf{a}\ ; \quad \Sigma F = F - T + T = F$$

$$a = \frac{\Sigma F}{\Sigma m} = \frac{36\ \text{N}}{4\ \text{kg} + 2\ \text{kg}} = 6\ \text{m s}^{-2}$$

b) Para calcular la tensión de la cuerda aislamos ambos bloques y aplicamos a cada uno de ellos la ecuación principal de la dinámica.

IMPORTANTE

Recuerda que las fuerzas que tienen el mismo sentido que el movimiento son positivas, y negativas las que tienen sentido contrario.

Para el bloque 1:

$$F - T = m_1 \cdot a\ ; \quad T = F - m_1 \cdot a = 36\ \text{N} - 4\ \text{kg} \cdot 6\ \text{m s}^{-2} = 12\ \text{N}$$

Para el bloque 2:

$$T = m_2 \cdot a = 2\ \text{kg} \cdot 6\ \text{m s}^{-2} = 12\ \text{N}$$

Como ya sabíamos, el valor numérico de la tensión es el mismo en ambos extremos de la cuerda.

Resolviendo el sistema formado a partir de las dos últimas ecuaciones podríamos calcular la aceleración del conjunto y la tensión de la cuerda:

$$\begin{aligned} F - T &= m_1 \cdot a \\ T &= m_2 \cdot a \end{aligned}$$

Por ejemplo, sumando ambas ecuaciones eliminamos T y obtenemos la aceleración:

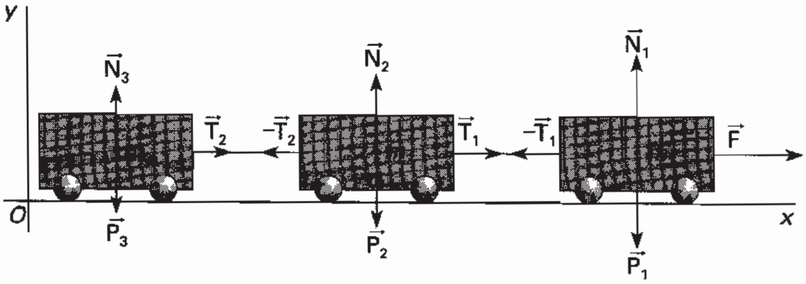
$$F - T + T = m_1 \cdot a + m_2 \cdot a\ ; \quad F = (m_1 + m_2)a$$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{36\ \text{N}}{6\ \text{kg}} = 6\ \text{m s}^{-2}$$

Una locomotora de 50 t arrastra dos vagones de 30 t y 25 t respectivamente. Si la locomotora ejerce una fuerza de tracción de 62 kN, ¿cuál es la aceleración del conjunto y la tensión que se ejerce sobre cada vagón? Suponemos que no existen rozamientos.

Solución

En la figura se han dibujado todas las fuerzas que intervienen.



Las fuerzas $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$ son los pesos de la locomotora y los vagones; son fuerzas verticales y se dirigen hacia el centro de la Tierra. Están equilibradas por las correspondientes reacciones del plano $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ y $\mathbf{N}_3$.

Según la ley de acción y reacción, si la locomotora ejerce una fuerza $\mathbf{T}_1$ sobre el primer vagón, éste ejerce una fuerza sobre la locomotora $-\mathbf{T}_1$. Análogamente, la fuerza $-\mathbf{T}_2$ es la reacción de $\mathbf{T}_2$.

Si suponemos que la fuerza $\mathbf{F}$ arrastra todo el conjunto en el sentido del semieje positivo de las x, las fuerzas que tengan ese sentido, el del movimiento, son positivas, y negativas las que tengan el sentido contrario.

La aceleración del conjunto locomotora-vagones y las tensiones $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ las obtenemos al aplicar la ecuación fundamental de la dinámica $\Sigma\, \mathbf{F} = \Sigma\, m \cdot \mathbf{a}$ a cada uno de los vagones y a la locomotora, por separado, aislados uno de los otros.

Si el segundo vagón se desplaza en el sentido positivo del eje de las x es porque existe una fuerza $\mathbf{T}_2$ que actúa sobre él, con la misma dirección y sentido que la aceleración:

$$T_2 = m_3 \cdot a$$

En el primer vagón, la ecuación fundamental de la dinámica nos permite escribir:

$$T_1 - T_2 = m_2 \cdot a$$

Esta misma ecuación aplicada a la locomotora tiene la siguiente forma:

$$F - T_1 = m_1 \cdot a$$

Resolviendo el sistema formado por estas tres últimas ecuaciones obtenemos la aceleración y las tensiones T_1 y T_2:

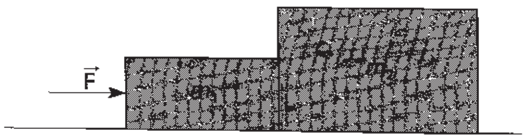
$$T_2 = 25 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot a$$

$$T_1 - T_2 = 30 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot a$$

$$62 \cdot 10^3 \text{ N} - T_1 = 50 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot a$$

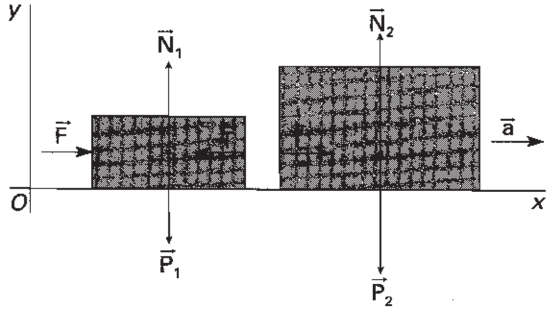
$$a = 0{,}59 \text{ m s}^{-2}\,; \quad T_1 = 32{,}4 \text{ kN}\,; \quad T_2 = 14{,}7 \text{ kN}$$

Los bloques $m_1 = 4$ kg y $m_2 = 6$ kg de la figura se apoyan sobre una superficie horizontal, sin rozamiento. La fuerza $F = 30$ N empuja al conjunto de los dos bloques que están en contacto. Calcula la aceleración del conjunto y las fuerzas de acción y reacción entre los bloques.



Solución

Para resolver el problema hemos de hacer en primer lugar un esquema con todas las fuerzas que intervienen:



Las fuerzas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ son los pesos de los bloques; son fuerzas verticales y se dirigen hacia el centro de la Tierra. Están equilibradas por las fuerzas $\mathbf{N}_1$ y $\mathbf{N}_2$, que representan la reacción del plano.

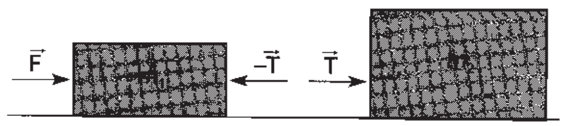
Si el bloque m_2 se mueve con una aceleración **a** es porque el bloque m_1 le empuja con una fuerza **T** que tiene la misma dirección y sentido que **a**. A su vez, el bloque m_2 ejerce una reacción sobre m_1 igual a $-\mathbf{T}$. De acuerdo con la ley de acción y reacción el valor numérico de ambas fuerzas será idéntico.

Si suponemos que la fuerza **F** produce el movimiento del conjunto de ambos bloques a lo largo del eje de las x, en el sentido del semieje positivo, tanto la fuerza **F** como la aceleración **a** serán positivas. Las fuerzas que tengan ese mismo sentido, el del movimiento, serán positivas, y negativas las que tengan sentido contrario.

De acuerdo con la segunda ley de Newton, la aceleración del conjunto es:

$$a = \frac{\Sigma F}{\Sigma m} = \frac{F + T - T}{m_1 + m_2} = \frac{30 \text{ N}}{4 \text{ kg} + 6 \text{ kg}} = 3 \text{ m s}^{-2}$$

Si ambos bloques tienen la misma aceleración y, sin embargo, tienen masas distintas, sobre ambos bloques actúan fuerzas diferentes.



El valor numérico de la fuerza T se obtiene al aplicar la ecuación fundamental de la dinámica a cualquiera de los dos bloques por separado:

Para el cuerpo m_1:

$$F - T = m_1 \cdot a \; ; \quad T = F - m_1 \cdot a = 30 \text{ N} - 4 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m s}^{-2} \; ; \quad T = 18 \text{ N}$$

Para el cuerpo m_2:

$$T = m_2 \cdot a = 6 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m s}^{-2} = 18 \text{ N}$$

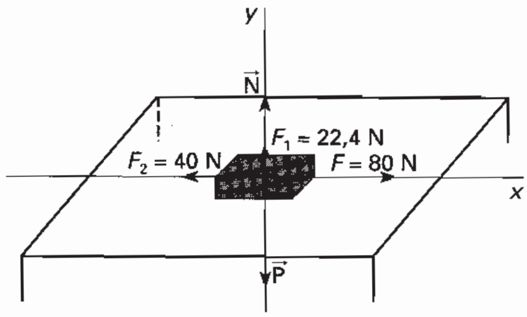
El valor de T es idéntico en ambos bloques, de acuerdo con el principio de acción y reacción.

Sobre el cuerpo de la figura, cuya masa es $m = 10$ kg, actúan las fuerzas que se indican. Calcula:

a) El peso del cuerpo.

b) La reacción normal N.

c) La aceleración del cuerpo.



Solución

a) El peso del cuerpo es la fuerza con que la Tierra lo atrae. Es una fuerza vertical, dirigida al centro de la Tierra, y cuyo valor es:

$$P = mg = 10 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m s}^{-2} = 98{,}1 \text{ N}$$

b) Si consideramos que el cuerpo está situado en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas, las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{N}$ son positivas, tienen el mismo sentido que el semieje positivo de las y, y $\mathbf{P}$ es negativa.

La reacción normal N se obtiene al considerar que la suma de las fuerzas verticales debe ser cero:

$$\mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_1 = 0 \quad ; \quad -P + N + F_1 = 0 \quad ; \quad N = P - F_1 = 98{,}1 \text{ N} - 22{,}4 \text{ N} = 75{,}7 \text{ N}$$

c) La aceleración del bloque se obtiene a partir de la segunda ley de Newton, siendo la fuerza $\mathbf{F}$ positiva y la $\mathbf{F}_2$ negativa:

$$\mathbf{a} = \frac{\Sigma \mathbf{F}}{m} \quad ; \quad a = \frac{F - F_2}{m} = \frac{80 \text{ N} - 40 \text{ N}}{10 \text{ kg}} = 4 \text{ m s}^{-2}$$

Una grúa mantiene colgado un contenedor de masa $m = 1{,}4$ t. Determina la tensión del cable de la grúa en los siguientes casos:

a) Sube el contenedor con una aceleración constante de 1,2 m s^{-2}.

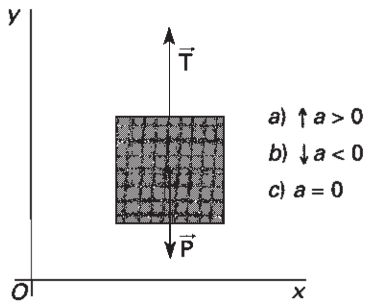
b) Lo baja con la misma aceleración.

c) El contenedor se mantiene colgado, pero en reposo.

d) Sube el contenedor con velocidad constante de 1 m s^{-1}.

Solución

Sobre el contenedor actúan su peso **P** y la tensión del cable de la grúa **T**.



En todos los casos se cumple el principio fundamental de la dinámica:

$$\Sigma \mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} \; ; \quad T - P = m \cdot a$$

Según nuestro criterio de signos, la aceleración es positiva si tiene el sentido del semieje positivo de las *y*, y negativa si tiene el sentido contrario.

a) En este caso la aceleración es positiva:

$$T - P = ma \; ; \quad T = P + ma \; ; \quad T = mg + ma \; ; \quad T = m(g + a)$$

$$T = 1{,}4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot (9{,}81 + 1{,}2) \text{ m s}^{-2} = 1{,}54 \cdot 10^4 \text{ N}$$

b) Ahora la aceleración es negativa, se dirige hacia el semieje negativo de las *y*:

$$T = m(g + a) = 1{,}4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot (9{,}81 - 1{,}2) \text{ m s}^{-2} = 1{,}21 \cdot 10^4 \text{ N}$$

c) y ***d***) En ambos casos la aceleración es nula; por tanto, la tensión es igual al peso:

$$T - P = 0 \; ; \quad T = P = mg = 1{,}4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m s}^{-2} = 1{,}37 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Un ascensor, que transporta un pasajero de masa $m = 72$ kg, se mueve con una velocidad de régimen constante y al arrancar o detenerse lo hace con una aceleración de 1,8 m s^{-2}. Calcula la fuerza que ejerce el pasajero sobre el piso del ascensor, en los siguientes casos:

a) El ascensor arranca para subir.

b) El ascensor arranca para bajar.

c) El ascensor frena y se detiene en la subida.

Solución

Sobre el pasajero actúan dos fuerzas: su peso **P** y la reacción del piso sobre él **F**.

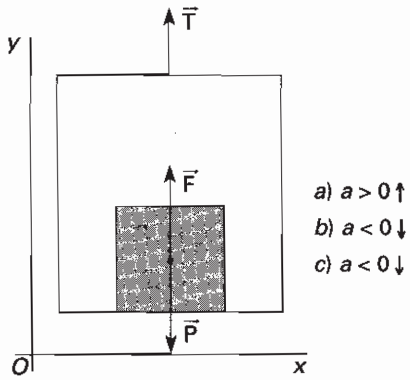
Según la ley de acción y reacción, el valor numérico de la fuerza que ejerce el piso sobre el pasajero (F) es igual al de la fuerza que ejerce el pasajero sobre el piso. En consecuencia, se trata de calcular el valor de F en los distintos casos.

Según la segunda ley de Newton

$$\Sigma \mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$$

y podemos utilizar sus módulos al tratarse de magnitudes vectoriales de igual dirección:

$$F - P = ma$$



a) Cuando el ascensor arranca para subir, la aceleración es positiva, se dirige hacia el semieje positivo de las y, como **F**:

$$F = P + ma = m(g + a) = 72\,\text{kg} \cdot (9{,}81 + 1{,}8)\,\text{m s}^{-2}$$

$$F = 8{,}36 \cdot 10^2\ \text{N}$$

b) Cuando el ascensor arranca para bajar, la aceleración es negativa, se dirige hacia abajo, hacia el semieje negativo de las y:

$$F = P + m(-a)$$

$$F = P - ma = mg - ma = m(g - a)$$

$$F = 72\ \text{kg} \cdot (9{,}81 - 1{,}8)\ \text{m s}^{-2} = 5{,}77 \cdot 10^2\ \text{N}$$

c) Cuando el ascensor frena y se detiene en la subida, la aceleración se dirige hacia abajo, hacia el semieje negativo de las y, es negativa. Estamos en una situación análoga a la del apartado ***b***), y la fuerza que ejerce el pasajero sobre el piso del ascensor es la misma:

$$F = 5{,}77 \cdot 10^2\ \text{N}$$

Un montacargas de masa $m = 1{,}2$ t transporta un paquete de 250 kg. Al arrancar adquiere su velocidad de régimen 2,6 m s^{-1}, en 2 s, y al frenar se detiene en el mismo tiempo. Calcula:

a) La fuerza que ejerce el paquete sobre el piso del montacargas cuando frena para detenerse al subir y al bajar.

b) La tensión del cable del montacargas en los dos casos anteriores.

Solución

a) Sobre el paquete actúan dos fuerzas, su peso **P** y la reacción del piso **F**. La fuerza que ejerce el paquete sobre el piso es $-\mathbf{F}$, según la ley de acción y reacción; por tanto, el problema consiste en averiguar el valor numérico de **F** (Figura A).

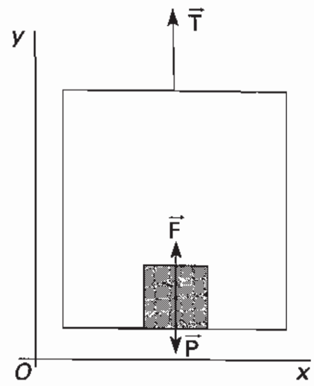


Figura A

Nos basaremos en la ley fundamental de la dinámica:

$$\Sigma\,\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$$

y como se trata de vectores de igual dirección podemos emplear sus módulos:

$$F - P = ma$$

Cuando el ascensor sube, su velocidad es positiva, tiene el mismo sentido que el semieje positivo de las *y*, $v_0 = 2{,}6\ \mathrm{m\ s^{-1}}$, y al detenerse la velocidad final es nula, $v = 0$; por consiguiente, la aceleración es:

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - 2{,}6\ \mathrm{m\ s^{-1}}}{2\ \mathrm{s}} = -1{,}3\ \mathrm{m\ s^{-2}}$$

En este caso, la fuerza que ejerce el paquete sobre el piso del montacargas es:

$$F - P = ma\ ; \quad F = P + ma = mg + ma = m(g + a)$$

$$F = 250\ \mathrm{kg} \cdot (9{,}81 - 1{,}3)\ \mathrm{m\ s^{-2}} = 2{,}13 \cdot 10^3\ \mathrm{N}$$

Cuando el ascensor baja, su velocidad es negativa, tiene el sentido del semieje negativo de las *y*, $v_0 = -2{,}6\ \mathrm{m\ s^{-1}}$, y cuando se detiene $v = 0$. La aceleración en este caso es:

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - (-2{,}6\ \mathrm{m\ s^{-1}})}{2\ \mathrm{s}} = 1{,}3\ \mathrm{m\ s^{-2}}$$

En ambos casos la aceleración tiene sentido contrario a la velocidad y, por tanto, distinto signo.

La fuerza sobre el piso del ascensor es:

$$F - P = ma\ ; \quad F = m(g + a)$$

$$F = 250\ \mathrm{kg} \cdot (9{,}81 + 1{,}3)\ \mathrm{m\ s^{-2}} = 2{,}78 \cdot 10^3\ \mathrm{N}$$

b) Las fuerzas que actúan sobre el montacargas son su peso $\mathbf{P}_1$, el del paquete que transporta $\mathbf{P}_2$ y la tensión del cable **T** (Figura B).

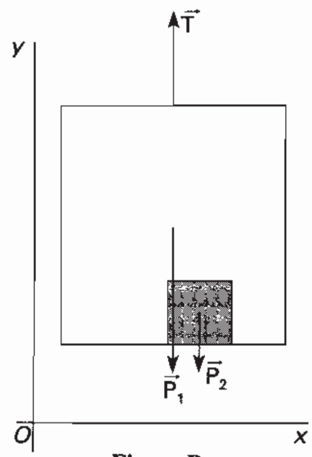


Figura B

De acuerdo con la segunda ley de Newton, podemos escribir:

$$\Sigma\,\mathbf{F} = \Sigma\, m \cdot \mathbf{a}\ ; \quad T - P_1 - P_2 = (m_1 + m_2)a\ ;$$

$$T = P_1 + P_2 + (m_1 + m_2)a$$

$$T = m_1 g + m_2 g + (m_1 + m_2)a\ ; \quad T = (m_1 + m_2) \cdot (g + a)$$

Cuando el montacargas frena al subir, la aceleración es $a = -1{,}3 \text{ m s}^{-2}$, y la tensión del cable es:

$$T = (1.200 + 250) \text{ kg} \cdot (9{,}81 - 1{,}3) \text{ m s}^{-2} = 1{,}23 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Cuando frena al bajar, la aceleración es positiva, $a = 1{,}3 \text{ m s}^{-2}$, y la tensión es:

$$T = (1.200 + 250) \text{ kg} \cdot (9{,}81 + 1{,}3) \text{ m s}^{-2} = 1{,}61 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Un bloque de masa $m = 8$ kg se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal lisa. Al actuar sobre él una fuerza constante le comunica una aceleración de $6{,}5 \text{ m s}^{-2}$. Calcula el valor de la fuerza:

a) Si es paralela a la superficie.

b) Si forma un ángulo de 45° con la horizontal.

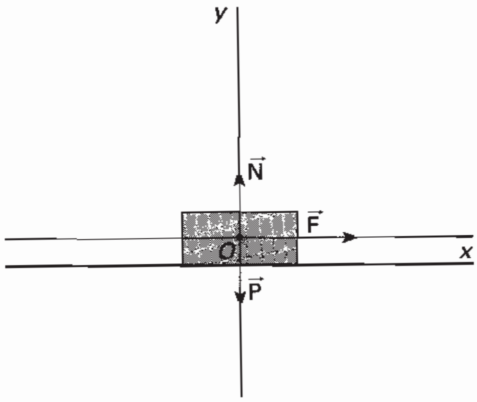


Figura A

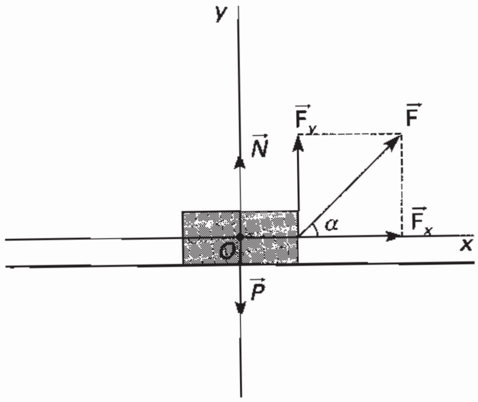


Figura B

Solución

a) Si suponemos que el bloque se encuentra inicialmente en el origen de un sistema de coordenadas que tomamos como referencia, y que se desplaza en el sentido positivo del eje de las x, la velocidad, la aceleración y la fuerza son positivas (Figura A).

La segunda ley de la dinámica nos permite calcular el valor de la fuerza:

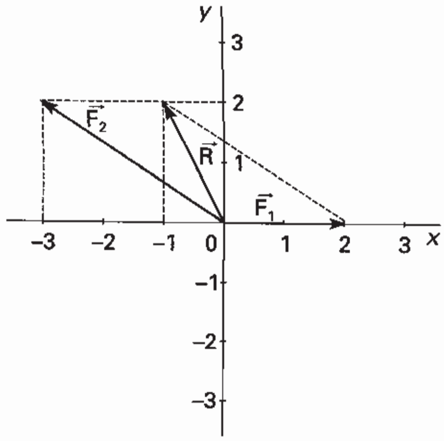
$$F = ma = 8 \text{ kg} \cdot 6{,}5 \text{ m s}^{-2} = 52 \text{ N}$$

b) Cuando la fuerza forma un ángulo con la horizontal (Figura B), sólo su componente en esa dirección produce aceleración. Por tanto, aplicando la segunda ley de Newton se obtiene: $F_x = ma$

$$F_x = F \cdot \cos \alpha = ma \; ; \quad F = \frac{ma}{\cos \alpha}$$

$$F = \frac{8 \text{ kg} \cdot 6{,}5 \text{ m s}^{-2}}{\cos 45°} = \frac{52 \text{ N}}{0{,}707} = 73{,}5 \text{ N}$$

Determina numérica y gráficamente la resultante de las fuerzas $\mathbf{F}_1$ (2, 0) y $\mathbf{F}_2$ (−3, 2) expresadas en N. ¿Cuál es la expresión vectorial de la resultante?



Solución

La determinación gráfica de la resultante aparece en la figura, al aplicar la regla del paralelogramo.

Su valor coincide con el obtenido numéricamente:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (2, 0) + (-3, 2) = (-1, 2)$$

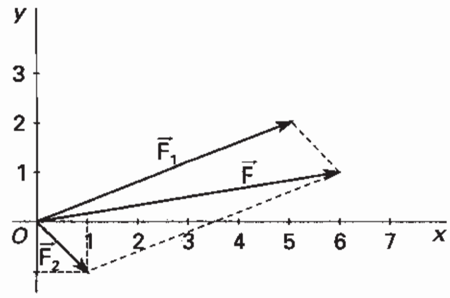
El módulo, o valor numérico, de la resultante es:

$$R = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}\ \mathrm{N}$$

Si **i** y **j** son los vectores unitarios correspondientes a los ejes x e y, la expresión vectorial de la fuerza resultante es: $\mathbf{R} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

Al descomponer la fuerza **F** (6, 1) en las fuerzas $\mathbf{F}_1$ (5, 2) y $\mathbf{F}_2$, ¿cuáles son las componentes de $\mathbf{F}_2$? Resuelve el problema gráfica y numéricamente.

Solución



La fuerza $\mathbf{F}_2$ se obtiene gráficamente aplicando la regla del paralelogramo.

Numéricamente, $\mathbf{F}_2$ es la diferencia entre **F** y $\mathbf{F}_1$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{F} - \mathbf{F}_1 = (6, 1) - (5, 2) = (1, -1)$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j}$$

Sobre una partícula de masa $m = 4$ kg obligada a moverse en el plano xy actúan las siguientes fuerzas (expresadas en N).

$$\mathbf{F}_1 = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_2 = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

a) ¿Cuál es el vector aceleración de la partícula?

b) ¿Cuánto vale el módulo de la aceleración?

Solución

a) La fuerza resultante que actúa sobre la partícula es:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} = 7\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$$

La aceleración la obtenemos al aplicar la ecuación fundamental de la dinámica:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{(7\mathbf{i} - 3\mathbf{j})\ \mathrm{N}}{4\ \mathrm{kg}} = \left(\frac{7}{4}\mathbf{i} - \frac{3}{4}\mathbf{j}\right) \mathrm{m\ s^{-2}}$$

b) El módulo de la aceleración es:

$$a = \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = 1{,}9\ \mathrm{m\ s^{-2}}$$

2 IMPULSO MECÁNICO Y MOMENTO LINEAL. CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL

En la resolución de estos problemas seguiremos aplicando el mismo criterio de signos. En realidad, lo haremos en todos los cuadernos.

Recuerda que el impulso mecánico (**I**) y el momento lineal o cantidad de movimiento (**p**) son magnitudes vectoriales; por tanto, debes conocer su dirección y sentido, y así determinar su signo.

Siempre se cumple que el impulso mecánico de la fuerza que actúa sobre un cuerpo es igual a la variación del momento lineal de éste:

$$\mathbf{I} = \Delta \mathbf{p}$$

$$\mathbf{F} \cdot \Delta t = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$$

Cuando $\mathbf{F} = 0 \Rightarrow \Delta \mathbf{p} = 0 \Rightarrow \mathbf{p} = \text{cte.}$

Éste es el principio de conservación del momento lineal.

PROBLEMAS RESUELTOS

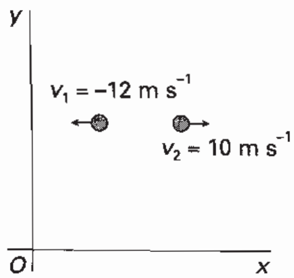
Una pelota de 105 g de masa llega a la pared de un frontón con una velocidad de 12 m s^{-1} y rebota con una velocidad de 10 m s^{-1}. El tiempo de contacto con la pared es de $2 \cdot 10^{-2}$ s. Calcula:

a) La variación que experimenta el momento lineal de la pelota.

b) La fuerza media que actúa sobre la pelota.

Solución

Para resolver el problema hemos de elegir un sistema de referencia. Supongamos que la pared del frontón se encuentra situada en el origen de coordenadas cartesianas, coincidiendo con el plano *yz*. La pelota se desplaza horizontalmente, y cuando se acerca a la pared del frontón lo hace en el sentido del semieje negativo de las *x*; por tanto, su velocidad es negativa. Cuando rebota y se aleja del frontón, se mueve en el sentido del semieje positivo de las x, ahora su velocidad es positiva. En consecuencia, disponemos de los siguientes *datos:*



- Masa de la pelota: $m = 0{,}105$ kg.
- Velocidad inicial: $v_1 = -12 \text{ m s}^{-1}$.
- Velocidad final: $v_2 = 10 \text{ m s}^{-1}$.
- Tiempo: $t = 2 \cdot 10^{-2}$ s.

a) El momento lineal o cantidad de movimiento inicial de la pelota es:

$$p_1 = mv_1 = 0{,}105 \text{ kg} \cdot (-12 \text{ m s}^{-1}) = -1{,}26 \text{ kg m s}^{-1}$$

El momento lineal final es:

$$p_2 = mv_2 = 0{,}105 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m s}^{-1} = 1{,}05 \text{ kg m s}^{-1}$$

La diferencia entre el momento lineal final y el momento lineal inicial es la variación que experimenta el momento lineal de la pelota:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = 1{,}05 \text{ kg m s}^{-1} - (-1{,}26 \text{ kg m s}^{-1}) = 2{,}31 \text{ kg m s}^{-1}$$

b) La fuerza media que actúa sobre la pelota la obtenemos a partir de la relación entre impulso mecánico y variación del momento lineal.

$$\text{Impulso mecánico} = \text{Variación del momento lineal}$$

$$F \cdot \Delta t = mv_2 - mv_1 \; ; \quad F \cdot \Delta t = \Delta p \; ; \quad F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2{,}31 \text{ kg m s}^{-1}}{2 \cdot 10^{-2} \text{ s}}$$

$$F = 115{,}5 \text{ N}$$

Una moto de masa $m = 320$ kg arranca con aceleración constante y alcanza una velocidad de 90 km h^{-1} en 5 s. ¿Qué fuerza ha impulsado a la moto durante ese tiempo?

Solución

Tomamos como sistema de referencia el punto en el que arranca la moto. Consideremos que en ese punto se encuentra el origen de un sistema de coordenadas cartesianas, y que la moto se desplaza en el sentido del semieje positivo de las x. Disponemos de los siguientes *datos:*

- Masa de la moto: $m = 320$ kg.
- Velocidad inicial: $v_i = 0$.
- Velocidad final: $v_f = 90 \text{ km h}^{-1} = \dfrac{90 \cdot 10^3 \text{ m}}{3.600 \text{ s}} = 25 \text{ m s}^{-1}$.
- Tiempo: $t = 5$ s.

La fuerza media que ha impulsado a la moto la podemos obtener a partir de la ecuación fundamental de la dinámica, calculando previamente la aceleración:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t} = \frac{25 \text{ m s}^{-1} - 0}{5 \text{ s}} = 5 \text{ m s}^{-2}$$

La fuerza es: $F = ma = 320 \text{ kg} \cdot 5 \text{ m s}^{-2} = 1.600 \text{ N} = 1{,}6 \text{ kN}$

Al mismo resultado se llega teniendo en cuenta que el impulso mecánico de la fuerza es igual a la variación de la cantidad de movimiento de la moto:

$$F \cdot \Delta t = mv_f - mv_i\,; \quad F = \frac{m(v_f - v_i)}{\Delta t} = \frac{320 \text{ kg} \cdot (25 - 0) \text{ m s}^{-1}}{5 \text{ s}}$$

$$F = 1.600 \text{ N} = 1{,}6 \text{ kN}$$

La atleta finlandesa Heli Rantanen fue medalla de oro en lanzamiento de jabalina en Atlanta-96, con un lanzamiento de 67,94 m. La jabalina salió de su mano con una velocidad de 25,8 m s^{-1}. Suponiendo que al llegar a la posición de lanzamiento su velocidad era de 4 m s^{-1}, ¿qué fuerza desarrolló su brazo si el lanzamiento se produjo en 0,05 s?

Dato: Masa de la jabalina $m = 800$ g.

Solución

Resolveremos el problema considerando que el impulso mecánico de la fuerza ejercida por el brazo de la lanzadora es igual a la variación del momento lineal de la jabalina.

Disponemos de los siguientes *datos* en unidades del SI:

- Masa de la jabalina: $m = 0{,}8$ kg.
- Velocidad inicial: $v_i = 4 \text{ m s}^{-1}$.
- Velocidad final: $v_f = 25{,}8 \text{ m s}^{-1}$. Es la velocidad de la jabalina cuando abandona la mano de la atleta.
- Tiempo durante el que actúa la fuerza: $t = 0{,}05$ s.
- Distancia recorrida por la jabalina: $s = 67{,}94$ m.

Como el impulso mecánico es igual a la variación de la cantidad de movimiento, se cumple:

$$F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v = m(v_2 - v_1)$$

$$F = \frac{m(v_2 - v_1)}{\Delta t} = \frac{0{,}8 \text{ kg} \cdot (25{,}8 - 4) \text{ m s}^{-1}}{0{,}05 \text{ s}} = 349 \text{ N}$$

PARA PRACTICAR

El enunciado del problema nos facilita un dato que no necesitamos para resolver el problema, la distancia recorrida por la jabalina. Este dato nos permitiría calcular el ángulo del lanzamiento. ¿Sabrías calcularlo? Recuerda tus conocimientos en cinemática sobre el tiro oblicuo.

Un automóvil que se desplaza a 90 km h^{-1} frena bruscamente y se detiene en 3,8 s.

a) ¿Cuál es la fuerza media que ejerce el cinturón de seguridad sobre el conductor, cuya masa es $m = 72$ kg?

b) Otro pasajero, de igual masa, situado en los asientos traseros del coche, sin cinturón de seguridad, choca con el asiento delantero como consecuencia de la frenada, siendo el tiempo del choque de 0,2 s. ¿Qué fuerza media soporta?

Solución

a) Tomamos como referencia el punto donde empieza la frenada, y situamos en ese punto el origen de un sistema de coordenadas. Si el automóvil se desplaza en el sentido del semieje positivo de las x, la velocidad inicial es positiva:

$$v_0 = 90 \text{ km h}^{-1} = \frac{90.000 \text{ m}}{3.600 \text{ s}} = 25 \text{ m s}^{-1}$$

La velocidad final es cero porque el automóvil se detiene: $v = 0$. El impulso mecánico es igual a la variación del momento lineal:

$$\mathbf{F} \cdot \Delta t = \Delta \mathbf{p}$$

y como los vectores tienen igual dirección podemos emplear sus módulos:

$$F \cdot \Delta t = m(v - v_0) \; ; \quad F = \frac{m(v - v_0)}{\Delta t}$$

$$F = \frac{72 \text{ kg} \cdot (0 - 25 \text{ m s}^{-1})}{3,8 \text{ s}} = -474 \text{ N} = -48 \text{ kp}$$

El signo negativo indica que la fuerza y la aceleración tienen sentido contrario a la velocidad, se dirigen hacia el semieje negativo de las x.

b) En este caso el razonamiento es idéntico, pero el tiempo es menor:

$$F = \frac{72 \text{ kg} \cdot (0 - 25 \text{ m s}^{-1})}{0,2 \text{ s}} = -9.000 \text{ N} = -918 \text{ kp}$$

Parece evidente la conveniencia de usar el cinturón de seguridad.

Un padre y su hijo, con masas de 75 kg y 40 kg respectivamente, están parados en una pista de hielo. El niño empuja a su padre con una fuerza de 30 N durante 0,6 s. Calcula:

a) La aceleración y la velocidad del padre.

b) La fuerza que actúa sobre el hijo, su aceleración y su velocidad.

Solución

Situamos inicialmente al padre y al hijo en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas, que tomamos como referencia.

Datos:

- Velocidad inicial del padre y del hijo igual a cero, porque inicialmente están en reposo.
- Masa del padre: $m_p = 75$ kg.
- Masa del hijo: $m_h = 40$ kg.
- Fuerza que actúa sobre el padre: $F_p = 30$ N.
- Tiempo: $t = 0{,}5$ s.

a) Como la masa del padre es constante y la fuerza que actúa sobre él también, la aceleración con que se mueve también es constante.

Si suponemos que el hijo empuja al padre horizontalmente y en el sentido del semieje positivo de las x, tanto la fuerza como la aceleración son positivas.

La ecuación fundamental de la dinámica nos permite calcular la aceleración del padre:

$$F = m \cdot a \ ; \qquad a = \frac{F}{m} = \frac{30 \text{ N}}{75 \text{ kg}} = 0{,}4 \text{ m s}^{-2}$$

Como la aceleración es constante, la velocidad la calculamos mediante ecuaciones características del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado:

$$v = v_0 + at = 0{,}4 \text{ m s}^{-2} \cdot 0{,}5 \text{ s} = 0{,}2 \text{ m s}^{-1}$$

b) Según la ley de acción y reacción, si el hijo ejerce sobre su padre una fuerza de 30 N, sobre él actúa una fuerza de igual valor numérico y sentido contrario; por tanto, el muchacho retrocede, en el sentido negativo del eje de las x, empujado por una fuerza de -30 N.

Su aceleración, que también es negativa al dirigirse en el mismo sentido que la fuerza, se obtiene al aplicar la segunda ley de Newton:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-30 \text{ N}}{40 \text{ kg}} = -0{,}75 \text{ m s}^{-2}$$

Conocida la aceleración, la velocidad se obtiene teniendo en cuenta que se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado:

$$v = v_0 + at = -0{,}75 \text{ m s}^{-2} \cdot 0{,}5 \text{ s} = -0{,}375 \text{ m s}^{-1}$$

Habríamos llegado a este mismo resultado al aplicar la ley de conservación del momento lineal. Sobre el padre y el hijo no actúa ninguna fuerza exterior; por consiguiente, los momentos lineales inicial y final son iguales. Pero como inicialmente están en reposo, el momento lineal inicial es cero y el momento lineal final también debe serlo:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f = 0\ ; \quad m_p \cdot \mathbf{v}_p + m_h \cdot \mathbf{v}_h = 0$$

Como ambas velocidades tienen la misma dirección, podemos utilizar sus módulos:

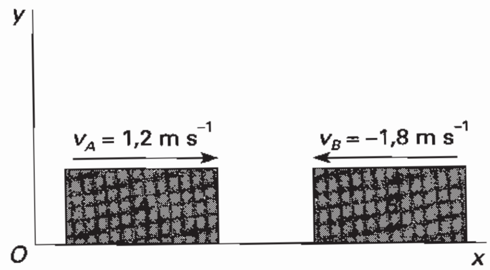
$$m_p \cdot v_p + m_h \cdot v_h = 0\ ; \quad v_h = -\frac{m_p \cdot v_p}{m_h} = -\frac{75\ \text{kg} \cdot 0{,}2\ \text{m s}^{-1}}{40\ \text{kg}} = -0{,}375\ \text{m s}^{-1}$$

Velocidad que coincide con la obtenida con el primer procedimiento. El hijo se mueve en el sentido del semieje negativo de las x con una velocidad de 0,375 m s^{-1}.

Dos cuerpos A y B tienen masas de 0,5 kg y 0,4 kg, y se mueven acercándose el uno al otro con velocidades de 1,2 m s^{-1} y 1,8 m s^{-1}, respectivamente. Tras el choque quedan unidos y se mueven al unísono. ¿Cuál es su velocidad después del choque? ¿En qué sentido se mueven?

Solución

En la figura hemos representado los dos cuerpos, tomando los ejes de coordenadas como referencia.



La velocidad del cuerpo A tiene el sentido del semieje positivo de las x; por tanto, es una velocidad positiva. La velocidad del cuerpo B es negativa porque tiene el sentido del semieje negativo de las x.

Por consiguiente, disponemos de los siguientes *datos:*

- Masa del cuerpo A: $m_A = 0{,}5$ kg.
- Masa del cuerpo B: $m_B = 0{,}4$ kg.
- Velocidad de A: $v_A = 1{,}2$ m s^{-1}.
- Velocidad de B: $v_B = -1{,}8$ m s^{-1}.

De acuerdo con la ley de conservación del momento lineal, el momento lineal antes del choque debe ser igual al momento lineal después del choque.

Momento lineal antes del choque o momento lineal inicial:

$$p_i = m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B = 0{,}5\ \text{kg} \cdot 1{,}2\ \text{m s}^{-1} + 0{,}4\ \text{kg} \cdot (-1{,}8\ \text{m s}^{-1}) = -0{,}12\ \text{kg m s}^{-1}$$

Momento lineal final (después del choque):

$$p_f = (m_A + m_B)v_f = (0{,}5 + 0{,}4)\ \text{kg} \cdot v_f = 0{,}9\ \text{kg} \cdot v_f$$

La igualdad entre ambos momentos lineales nos permite obtener la velocidad después del choque:

$$p_i = p_f \,; \quad -0{,}12 \text{ kg m s}^{-1} = 0{,}9 \text{ kg} \cdot v_f \,; \quad v_f = -0{,}13 \text{ m s}^{-1}$$

IMPORTANTE

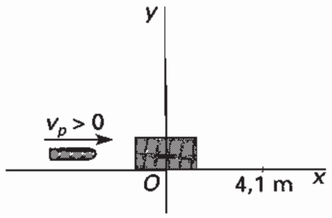
El signo negativo de la velocidad indica que después del choque los cuerpos unidos se mueven hacia la izquierda, en el sentido del semieje negativo de las x. En el mismo sentido que se movía inicialmente el cuerpo B.

Un proyectil de masa 10 g se mueve con una velocidad de 250 m s^{-1} cuando choca con un bloque de madera de 1,8 kg, y se incrusta en él. ¿Cuál es la velocidad del conjunto bloque-proyectil después de la colisión? ¿Qué distancia recorre el conjunto bloque-proyectil en 3 s?

Solución

Consideremos que en el momento del impacto el bloque se encuentra en el origen de un sistema de coordenadas que tomamos como referencia, y que la bala se mueve en el sentido del semieje positivo de las x, es decir, que su velocidad es positiva.

Disponemos de los siguientes *datos:*



- Masa del proyectil: $m_p = 1 \cdot 10^{-2}$ kg.
- Velocidad inicial del proyectil: $v_p = 250 \text{ m s}^{-1}$.
- Masa del bloque de madera: $m_b = 1{,}8$ kg.
- Velocidad inicial del bloque: $v_b = 0$.
- Tiempo: $t = 3$ s.

Las *incógnitas* son:

- Velocidad del conjunto bloque-proyectil: v_f.
- Posición del conjunto bloque-proyectil: x.

En el choque del proyectil con el bloque de madera se conserva el momento lineal (no actúan fuerzas exteriores a la bala y al bloque); por tanto, el momento lineal antes del choque debe ser igual al momento lineal después del choque.

Momento lineal del bloque y el proyectil antes del choque:

$$p_1 = m_b v_b + m_p v_p = 1{,}8 \text{ kg} \cdot 0 + 1 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot 250 \text{ m s}^{-1} = 2{,}5 \text{ kg m s}^{-1}$$

Momento lineal del conjunto bloque-proyectil después del choque:

$$p_2 = (m_b + m_p) \cdot v_f = (1 \cdot 10^{-2} \text{ kg} + 1{,}8 \text{ kg}) \cdot v_f = 1{,}81 \text{ kg} \cdot v_f$$

Como $p_1 = p_2$, obtenemos el valor de v_f:

$$2{,}5 \text{ kg m s}^{-1} = 1{,}81 \text{ kg} \cdot v_f \, ; \quad v_f = \frac{2{,}5 \text{ kg m s}^{-1}}{1{,}81 \text{ kg}} = 1{,}38 \text{ m s}^{-1}$$

IMPORTANTE

El signo positivo de la velocidad después del choque nos indica que el conjunto bloque-proyectil se mueve en el sentido positivo del semieje de las x, es decir, en el mismo sentido que el proyectil antes de la colisión.

De acuerdo con la primera ley de la dinámica, el conjunto bloque-proyectil se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme, con velocidad constante de 1,38 m s^{-1}.

La posición del conjunto bloque-proyectil después de 3 s es:

$$x = x_0 + v_f \cdot t = 0 + 1{,}38 \text{ m s}^{-1} \cdot 3 \text{ s} = 4{,}1 \text{ m}$$

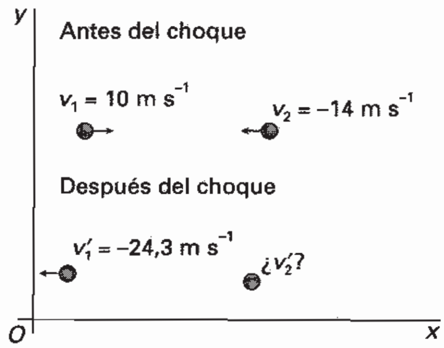
Por consiguiente, el conjunto bloque-proyectil recorre 4,1 m en 3 s.

Dos bolas de masas $m_1 = 40$ g y $m_2 = 100$ g se mueven sobre una superficie horizontal lisa, de forma que se pueden considerar como partículas libres, sin rozamiento. Se dirigen en línea recta una hacia la otra con velocidades de 10 y 14 m s^{-1}, respectivamente. Después del choque, la primera bola rebota con una velocidad de 24,3 m s^{-1}. ¿Qué velocidad adquiere la segunda bola después del choque?

Solución

Al considerar que no existen rozamientos y que las bolas se mueven libremente, su momento lineal permanece constante. Es decir, resolveremos el problema considerando que el momento lineal antes del choque es igual al momento lineal después del choque.

Según nuestro criterio de signos, las velocidades que tienen el sentido del semieje positivo de las x son positivas, y las que tienen el sentido contrario negativas. En consecuencia tenemos los siguientes *datos:*



- Velocidades de las bolas antes del choque:

$$v_1 = 10 \text{ m s}^{-1} \, ; \quad v_2 = -14 \text{ m s}^{-1}$$

- Velocidad de la 1.ª bola después del choque:

$$v_1' = -24{,}3 \text{ m s}^{-1}$$

- Masas de las bolas:

$$m_1 = 0{,}04 \text{ kg} \; ; \quad m_2 = 0{,}1 \text{ kg}$$

Momento lineal antes del choque:

$$\mathbf{p}_1 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$$

Como son vectores de igual dirección podemos utilizar sus módulos:

$$p_1 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$
$$p_1 = 0{,}04 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m s}^{-1} + 0{,}1 \text{ kg} \cdot (-14 \text{ m s}^{-1}) = -1{,}0 \text{ kg m s}^{-1}$$

Momento lineal después del choque:

$$p_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$
$$p_2 = 0{,}04 \text{ kg} \cdot (-24{,}3 \text{ m s}^{-1}) + 0{,}1 \text{ kg} \cdot v'_2 \; ; \quad p_2 = -0{,}97 \text{ kg m s}^{-1} + 0{,}1 \text{ kg} \cdot v'_2$$

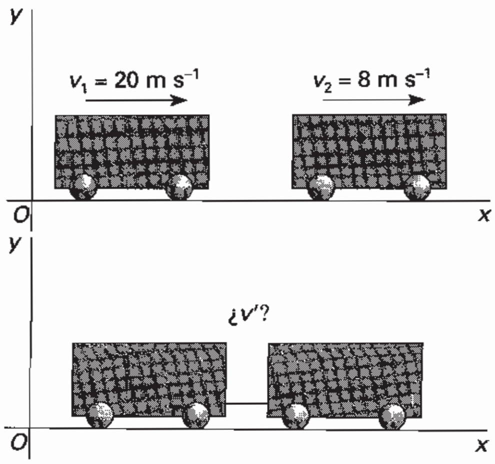
Al igualar ambos momentos lineales obtenemos la velocidad de la 2.ª bola después del choque:

$$-1{,}0 \text{ kg m s}^{-1} = -0{,}97 \text{ kg m s}^{-1} + 0{,}1 \text{ kg} \cdot v'_2$$
$$v'_2 = -0{,}30 \text{ m s}^{-1}$$

Por tanto, la 2.ª bola sigue moviéndose en el mismo sentido después del choque, pero con menor velocidad.

Dos vagones de 20 y 30 t respectivamente se dirigen a lo largo de una vía horizontal, sin rozamientos, en el mismo sentido, con velocidades de 20 m s^{-1} y 8 m s^{-1} respectivamente. Cuando colisionan se enganchan y continúan moviéndose juntos. ¿Cuál es la velocidad después de la colisión?

Solución



Al considerar que no existen rozamientos, los vagones se mueven libremente y su momento lineal se mantiene constante: el momento lineal antes de la colisión es igual al momento lineal después de la colisión.

Supongamos que ambos vagones se mueven antes de la colisión en el sentido positivo del eje de las *x*.

Disponemos de los siguientes *datos:*

- Velocidades de los vagones antes de la colisión:

$$v_1 = 20 \text{ m s}^{-1} \; ; \quad v_2 = 8 \text{ m s}^{-1}$$

• Masas de los vagones:

$$m_1 = 20 \cdot 10^3 \text{ kg} \; ; \quad m_2 = 30 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

La *incógnita* es la velocidad común de ambos vagones después de la colisión: v'.

Momento lineal de los vagones antes de la colisión:

$$\mathbf{p}_1 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$$

Como son vectores de igual dirección podemos utilizar sus módulos:

$$p_1 = m_1v_1 + m_2v_2 = 20 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 20 \text{ m s}^{-1} + 30 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 8 \text{ m s}^{-1} = 6{,}4 \cdot 10^5 \text{ kg m s}^{-1}$$

Momento lineal de los vagones después de la colisión:

$$p_2 = (m_1 + m_2)v' = (20 \cdot 10^3 + 30 \cdot 10^3) \text{ kg} \cdot v' = 50 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot v'$$

Al igualar ambos momentos lineales obtenemos la velocidad de los vagones después de la colisión:

$$6{,}4 \cdot 10^5 \text{ kg m s}^{-1} = 50 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot v' \; ; \quad v' = 12{,}8 \text{ m s}^{-1}$$

IMPORTANTE

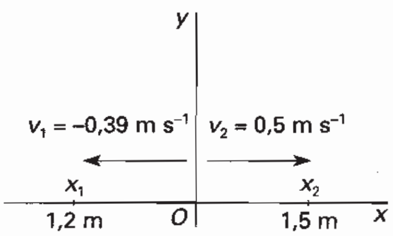
El signo positivo de la velocidad después del choque indica que los dos vagones se mueven en el mismo sentido que lo hacían antes del choque.

Dos amigas de masas $m_1 = 58$ kg y $m_2 = 45$ kg patinan sobre una pista de hielo, de rozamiento despreciable. En un instante en el que ambas están en reposo, la primera empuja a su amiga, por lo que esta última se mueve con una velocidad de 0,5 m s^{-1}. ¿A qué distancia se encuentran ambas amigas después de 3 s?

Solución

Según la ley de acción y reacción, cuando la primera amiga empuja con una fuerza **F** a la segunda, ésta ejerce sobre la primera otra fuerza de igual módulo y sentido contrario $-\mathbf{F}$, que la obliga a moverse en sentido contrario al de su compañera.

Supongamos que las dos amigas están situadas inicialmente en el origen de un sistema de coordenadas, que tomamos como referencia.



Si la primera amiga empuja a la segunda horizontalmente y en el sentido del semieje positivo de las x, su velocidad será positiva: $v_2 = 0{,}5$ m s^{-1}.

Como no existen fuerzas de rozamiento, las dos amigas se mueven libremente y se cumple el principio de conservación del momento lineal: el momento lineal inicial es igual al momento lineal final.

El momento lineal inicial es nulo porque ambas patinadoras están en reposo, luego el momento lineal final también es nulo:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0\ ; \quad v_1 = \frac{-m_2 v_2}{m_1}$$

$$v_1 = \frac{-45\ \text{kg} \cdot 0{,}5\ \text{m s}^{-1}}{58\ \text{kg}} = -0{,}39\ \text{m s}^{-1}$$

El signo menos de la velocidad nos indica que la primera patinadora se mueve en sentido contrario a la segunda. Es algo que ya sabíamos al cumplirse la ley de acción y reacción.

Como una vez iniciado el movimiento las patinadoras se mueven libremente al no actuar sobre ellas ninguna fuerza, las dos realizan un movimiento rectilíneo y uniforme. Sus posiciones una vez transcurridos 3 s son las siguientes:

$$x_1 = v_1 t = -0{,}39\ \text{m s}^{-1} \cdot 3\ \text{s} = -1{,}2\ \text{m}$$

$$x_2 = v_2 t = 0{,}5\ \text{m s}^{-1} \cdot 3\ \text{s} = 1{,}5\ \text{m}$$

Por tanto, se encuentran separadas una distancia de:

$$1{,}2\ \text{m} + 1{,}5\ \text{m} = 2{,}7\ \text{m}$$

Un astronauta sale de su nave en el espacio y lanza un pequeño aparato de masa $m_1 = 2{,}4$ kg, diseñado para analizar determinadas radiaciones solares, con una velocidad de 14 m s^{-1}. Si la masa del astronauta es $m_2 = 94$ kg, ¿qué distancia recorre en 1 minuto?

Solución

Supongamos que el astronauta y el aparato están inicialmente en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas que tomamos como referencia, y que el aparato se mueve en el sentido del semieje positivo de las x. En estas circunstancias, la velocidad del aparato es positiva, y tenemos los siguientes *datos:*

- Masa del astronauta: $m_2 = 94$ kg.
- Masa del aparato: $m_1 = 2{,}4$ kg.
- Velocidad del aparato: $v_1 = 14\ \text{m s}^{-1}$.

Vamos a averiguar en primer lugar la velocidad del astronauta, para después calcular su posición cuando ha transcurrido un minuto.

En ausencia de fuerzas exteriores, el momento lineal del conjunto astronauta-aparato se mantiene constante: Momento lineal inicial = Momento lineal final.

El momento lineal inicial es nulo, pues suponemos que tanto el astronauta como el aparato están en reposo; por tanto, el momento lineal después del lanzamiento también es nulo:

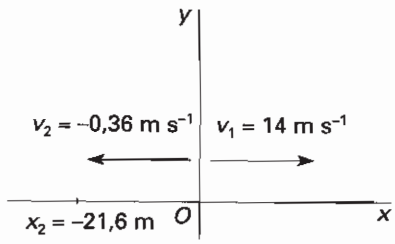
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0\ ; \quad v_2 = \frac{-m_1 v_1}{m_2}$$

$$v_2 = \frac{-2{,}4 \text{ kg} \cdot 14 \text{ m s}^{-1}}{94 \text{ kg}} = -0{,}36 \text{ m s}^{-1}$$

El signo negativo de la velocidad nos indica que el astronauta se desplaza en sentido contrario al del aparato, es decir, en el sentido del semieje negativo de las x.

De acuerdo con la primera ley de Newton, el astronauta realiza un movimiento rectilíneo y uniforme, y su posición cuando han transcurrido 60 s es la siguiente:

$$x_2 = v_2 t = -0{,}36 \text{ m s}^{-1} \cdot 60 \text{ s} = -21{,}6 \text{ m}$$



Por tanto, el astronauta ha recorrido una distancia de 21,6 m en el sentido del semieje negativo de las x. Ha retrocedido 21,6 m.

Un rifle de masa $m = 4{,}8$ kg dispara una bala de 20 g con una velocidad de 280 m s^{-1}. Calcula:

a) El momento lineal de la bala.

b) La velocidad de retroceso del rifle.

Solución

Vamos a considerar como referencia un sistema de coordenadas cartesianas, con el rifle situado en el origen de coordenadas. La bala se mueve en el sentido positivo del eje de las x; por tanto, su velocidad es positiva.

a) El momento lineal o cantidad de movimiento de la bala es:

$$p = mv = 20 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 280 \text{ m s}^{-1} = 5{,}6 \text{ kg m s}^{-1}$$

b) La fuerza que actúa sobre la bala se produce por la explosión de la pólvora en el interior del arma. Como no actúa ninguna fuerza externa, el momento lineal del conjunto rifle-bala se mantiene constante, es decir, el momento lineal inicial es igual al momento lineal final.

Tanto el rifle como la bala están inicialmente en reposo; por consiguiente, el momento inicial es nulo, y también debe serlo el momento lineal final:

$$m_r \cdot v_r + m_b \cdot v_b = 0 \; ; \quad v_r = \frac{-m_b \cdot v_b}{m_r}$$

$$v_r = -\frac{20 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 280 \text{ m s}^{-1}}{4{,}8 \text{ kg}} = -1{,}2 \text{ m s}^{-1}$$

IMPORTANTE

El signo negativo de la velocidad del rifle indica que éste se mueve en sentido contrario a la bala, es decir, en el sentido del semieje negativo de las x. El rifle retrocede.

CLASES DE FUERZAS

En este apartado tratamos problemas relacionados con distintas clases de fuerzas. Encontrarás, por tanto, problemas muy variados.

En primer lugar, resolvemos problemas relacionados con las fuerzas de rozamiento. Determinamos la influencia que estas fuerzas ejercen en el movimiento de los cuerpos que se deslizan por planos horizontales e inclinados.

Después estudiamos las fuerzas gravitatorias y trabajamos con problemas relacionados con el peso de los cuerpos y la aceleración de la gravedad.

Por último, abordamos el estudio de las fuerzas relacionadas con el movimiento circular uniforme y las fuerzas elásticas.

Fuerzas de rozamiento

Las fuerzas de rozamiento se deben a las interacciones que se producen entre átomos y moléculas de las superficies en contacto, y a la existencia de rugosidades en ambas superficies. Siempre se oponen al movimiento.

Su valor es el siguiente:

a) Plano horizontal: $F_r = \mu N = \mu mg$

b) Plano inclinado: $F_r = \mu N = \mu mg \cos \alpha$

donde μ es el coeficiente de rozamiento, cuyo valor depende de la naturaleza de los materiales en contacto y del grado de pulido de sus superficies.

PROBLEMAS RESUELTOS

Un coche de Fórmula 1 de masa $m = 525$ kg frena al final de la recta horizontal de tribunas, cuando lleva una velocidad de 288 km h^{-1}. Por un fallo mecánico se le bloquean los frenos, lo que impide el giro de las ruedas. Si el coeficiente de rozamiento entre la goma y el asfalto es 0,95, calcula:

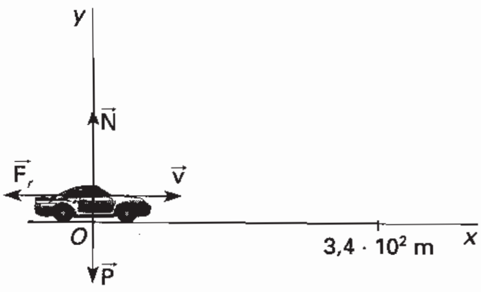
a) La distancia que recorre hasta detenerse.

b) El número de operarios del circuito necesarios para retirar el coche de la pista, suponiendo que cada uno de ellos ejerce una fuerza igual a su peso, que es de 70 kp.

Solución

a) Tomamos como referencia el punto en donde empieza a frenar el coche.

En la figura hemos dibujado todas las fuerzas que intervienen.



El peso del coche **P** y la reacción del plano **N** tienen el mismo módulo y sentido contrario, se anulan.

La velocidad inicial del coche es positiva, y su valor en unidades del SI es:

$$v_0 = 288 \text{ km h}^{-1} = \frac{288 \cdot 10^3 \text{ m}}{3.600 \text{ s}} = 80 \text{ m s}^{-1}$$

La fuerza de rozamiento es la fuerza de frenado, su valor numérico es:

$$F_r = \mu m g = 0{,}95 \cdot 525 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m s}^{-2} = 4{,}9 \cdot 10^3 \text{ N}$$

IMPORTANTE

Tanto la fuerza de rozamiento como la aceleración que produce son negativas, tienen sentido contrario a la velocidad, que es positiva.

El valor de la aceleración es:

$$a = \frac{F_r}{m} = \frac{-4{,}9 \cdot 10^3 \text{ N}}{525 \text{ kg}} = -9{,}3 \text{ m s}^{-2}$$

La distancia que recorre el coche hasta detenerse (velocidad final $v = 0$) se obtiene a partir de la relación cinemática correspondiente:

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \; ; \; x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - (80 \text{ m s}^{-1})^2}{2(-9{,}3 \text{ m s}^{-2})} = 3{,}4 \cdot 10^2 \text{ m}$$

b) Los empleados del circuito podrían retirar el coche averiado empujándolo horizontalmente o levantándolo verticalmente. Veamos qué procedimiento es más acertado.

La fuerza que cada empleado puede realizar es su propio peso:

$$F = P = mg = 70 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m s}^{-2} = 687 \text{ N}$$

Si empujan al coche horizontalmente, deben contrarrestar la fuerza de rozamiento, y el número de empleados es:

$$\frac{4{,}9 \cdot 10^3 \text{ N}}{687 \text{ N emp.}^{-1}} = 7{,}1 \text{ empleados (8 personas)}$$

Si deciden levantarlo deben equilibrar el peso del coche:

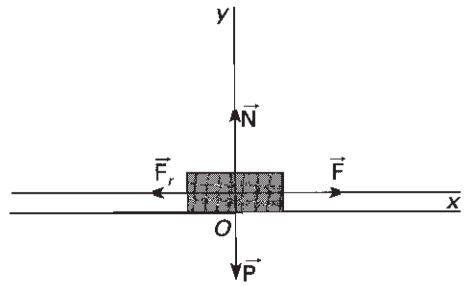
$$\frac{525 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ N kg}^{-1}}{687 \text{ N emp.}^{-1}} = 7{,}5 \text{ empleados (8 personas)}$$

El primer procedimiento es ligeramente más ventajoso.

Determina el valor de todas las fuerzas que actúan sobre un bloque de masa $m = 20$ kg apoyado sobre una superficie horizontal. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la superficie es $\mu = 0{,}4$. Si se le empuja con una fuerza horizontal de 100 N, ¿qué distancia recorre el bloque en 2 s partiendo del reposo?

Solución

En la figura aparecen dibujadas todas las fuerzas que intervienen.



El peso del cuerpo **P** es una fuerza vertical, dirigida hacia el centro de la Tierra. Su módulo en este caso es:

$$P = mg = 20 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m s}^{-2} = 196 \text{ N}$$

La fuerza **N** es la reacción del plano y tiene el mismo valor numérico que **P**, pero sentido contrario.

La fuerza de rozamiento $\mathbf{F}_r$ se opone al movimiento, tiene sentido opuesto a **F**, y su valor es:

$$F_r = \mu N = \mu mg = 0{,}4 \cdot 20 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m s}^{-2} = 78{,}5 \text{ N}$$

Como el movimiento del bloque se realiza de acuerdo con la segunda ley de Newton, la aceleración del bloque es:

$$a = \frac{F - F_r}{m} = \frac{100 \text{ N} - 78{,}5 \text{ N}}{20 \text{ kg}} = 1{,}08 \text{ m s}^{-2}$$

El bloque se desplaza a lo largo del plano con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, sin velocidad inicial (parte del reposo), y en 2 s recorre la siguiente distancia:

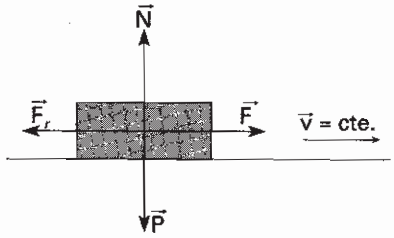
$$x = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} 1{,}08 \text{ m s}^{-2} \cdot (2 \text{ s})^2 = 2{,}16 \text{ m}$$

Calcula la fuerza mínima horizontal que habría que aplicar para mover un bloque de madera de 100 kg que se apoya sobre una superficie horizontal, también de madera. Una vez en movimiento, ¿cuál es la fuerza necesaria para mantenerlo en movimiento con velocidad constante?

Datos: Los coeficientes de rozamiento estático y cinético de la madera sobre madera son 0,45 y 0,30 respectivamente.

Solución

En la figura aparecen dibujadas todas las fuerzas que intervienen.



El peso del cuerpo **P** y la reacción del plano **N** tienen el mismo valor numérico pero sentido contrario, y se anulan.

Para que el bloque se mueva con velocidad constante hay que aplicar una fuerza **F** cuyo módulo sea igual al de la fuerza de rozamiento, que siempre se opone al movimiento.

El módulo de la fuerza de rozamiento estático F_{r_e} es igual al producto del coeficiente de rozamiento estático μ_e por el módulo de la reacción normal, N, que al ser una superficie horizontal es igual al peso:

$$F = F_{r_e} = \mu_e mg = 0{,}45 \cdot 100 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ N kg}^{-1} = 4{,}4 \cdot 10^2 \text{ N}$$

Cuando el cuerpo se mueve, la fuerza de rozamiento cinético F_{r_c} sigue oponiéndose al movimiento del bloque, pero ahora su valor es menor porque el coeficiente de rozamiento cinético es menor que el coeficiente de rozamiento estático:

$$F = F_{r_c} = \mu_c mg = 0{,}30 \cdot 100 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ N kg}^{-1} = 2{,}9 \cdot 10^2 \text{ N}$$

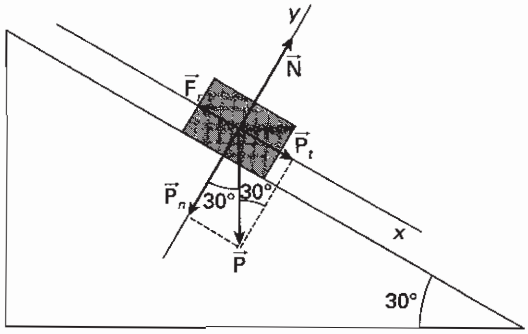
IMPORTANTE

La fuerza necesaria para mantener el bloque en movimiento es menor que la necesaria para iniciar el movimiento. Cuando el bloque se mueve, las rugosidades existentes en ambas superficies se acoplan más difícilmente y el bloque se desliza con más facilidad. La fuerza de rozamiento cinético es menor que la de rozamiento estático.

Determina el valor de todas las fuerzas que actúan sobre un bloque de masa $m = 10$ kg, apoyado sobre un plano inclinado 30° sobre la horizontal. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es $\mu = 0{,}2$. ¿Cuánto tiempo tarda el bloque en recorrer 4 m en el plano, partiendo del reposo?

Solución

En la figura aparecen dibujadas todas las fuerzas que intervienen.



El peso del cuerpo **P** es una fuerza vertical que se dirige hacia el centro de la Tierra, cuyo valor es:

$$P = mg = 10 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m s}^{-2} = 98{,}1 \text{ N}$$

El peso aparece descompuesto en dos componentes, la componente tangencial $\mathbf{P}_t$, paralela al plano, y la componente normal $\mathbf{P}_n$, perpendicular al plano. Sus módulos son los siguientes:

$$P_t = P \cdot \text{sen } 30° = 98{,}1 \text{ N} \cdot 0{,}50 = 49 \text{ N}$$

$$P_n = P \cdot \cos 30° = 98{,}1 \text{ N} \cdot 0{,}866 = 85 \text{ N}$$

Los ángulos indicados en la figura son iguales a 30° porque tienen sus lados perpendiculares o son alternos internos entre paralelas.

La fuerza **N** es la reacción del plano y tiene el mismo módulo que $\mathbf{P}_n$ pero sentido contrario.

La fuerza de rozamiento entre el plano y el bloque se opone al movimiento, tiene sentido opuesto a P_t, y su valor es:

$$F_r = \mu N = \mu mg \cdot \cos 30° = 0{,}2 \cdot 85 \text{ N} = 17 \text{ N}$$

Como el movimiento del bloque se realiza de acuerdo con la segunda ley de Newton, la aceleración del bloque es:

$$\mathbf{a} = \frac{\Sigma \mathbf{F}}{m}; \quad a = \frac{P_t - F_r}{m} = \frac{49 \text{ N} - 17 \text{ N}}{10 \text{ kg}} = 3{,}2 \text{ m s}^{-2}$$

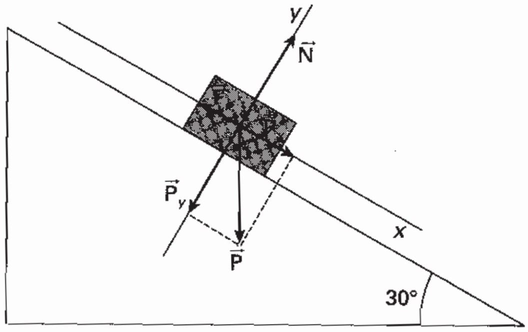
El bloque desciende a lo largo del plano con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado sin velocidad inicial (parte del reposo), y recorre los 4 m en el siguiente tiempo:

$$x = \frac{1}{2} at^2; \quad t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \text{ m}}{3{,}2 \text{ m s}^{-2}}} = 1{,}58 \text{ s}$$

Averigua la aceleración con que desciende un cuerpo al deslizarse por un plano inclinado 30° con la horizontal, si el coeficiente de rozamiento cinético entre ambos es $\mu = 0{,}25$.

Solución

En la figura se han dibujado todas las fuerzas que intervienen.



El peso **P** del cuerpo se ha descompuesto en dos fuerzas $\mathbf{P}_x$ y $\mathbf{P}_y$, paralela y perpendicular al plano respectivamente.

La componente $\mathbf{P}_y$ se contrarresta con la reacción del plano **N**, puesto que tienen el mismo módulo, pero sentido contrario.

Por tanto, la componente del peso $\mathbf{P}_x$ y la fuerza de rozamiento $\mathbf{F}_r$ son las fuerzas que determinan el movimiento del cuerpo. Sus valores son los siguientes:

$$P_x = P \text{ sen } \alpha = mg \text{ sen } \alpha$$

$$F_r = \mu N = \mu mg \cos \alpha$$

De acuerdo con el criterio de signos, P_x es positiva y la fuerza de rozamiento F_r negativa.

La aceleración se obtiene al aplicar la ley fundamental de la dinámica:

$$\Sigma \mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$$

$$P_x - F_r = ma\,; \quad mg \text{ sen } 30° - \mu mg \cos 30° = ma$$

Ecuación que se simplifica eliminando la masa:

$$a = g \text{ sen } 30° - \mu g \cos 30° = g(\text{sen } 30° - \mu \cos 30°)$$

$$a = 9{,}81 \text{ m s}^{-2} \left(0{,}5 - 0{,}25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2{,}8 \text{ m s}^{-2}$$

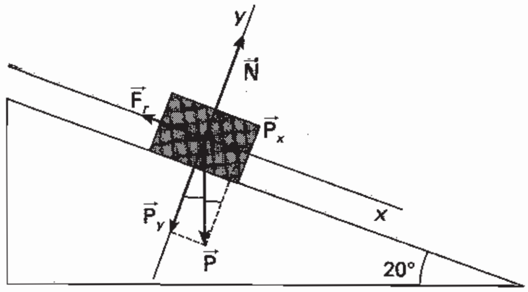
IMPORTANTE

Hemos resuelto el problema sin conocer la masa del cuerpo. La aceleración con que desciende un cuerpo por un plano inclinado es independiente de su masa.

Un bloque de 5,4 kg está situado sobre un plano inclinado 20° sobre la horizontal. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el plano es $\mu_e = 0{,}40$. Averigua si el bloque desciende o no, y el ángulo mínimo a partir del cual se inicia el movimiento.

Solución

En la figura se han dibujado todas las fuerzas que intervienen.



El peso del bloque **P** se ha descompuesto en dos componentes, la componente paralela al plano $\mathbf{P}_x$ y la componente perpendicular al plano $\mathbf{P}_y$.

La fuerza **N** es la reacción normal del plano y tiene el mismo módulo que $\mathbf{P}_y$, pero sentido contrario, y se equilibran entre sí.

La fuerza de rozamiento $\mathbf{F}_r$ entre el plano y el bloque se opone al movimiento, tiene sentido opuesto a $\mathbf{P}_x$.

El bloque comienza el descenso cuando el módulo de la componente tangencial del peso P_x sea igual al módulo de la fuerza de rozamiento. Para un ángulo de inclinación del plano de 20° los valores de ambas fuerzas son los siguientes:

$$P_x = P \text{ sen } \alpha = mg \text{ sen } \alpha = 5{,}4 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ N kg}^{-1} \cdot \text{sen } 20° = 18 \text{ N}$$

$$F_r = \mu_e P \cos \alpha = \mu_e mg \cos \alpha = 0{,}40 \cdot 5{,}4 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ N kg}^{-1} \cdot \cos 20° = 20 \text{ N}$$

Como la fuerza de rozamiento estático es mayor que la fuerza paralela al plano, el bloque no desciende, permanece en reposo.

Se iniciará el descenso cuando ambas fuerzas sean iguales. Esto nos permite calcular el valor del ángulo mínimo necesario para que esto ocurra:

$$F_r = P_x \; ; \quad mg \text{ sen } \alpha = \mu_e mg \cos \alpha \; ; \quad \mu_e = \text{tg } \alpha$$

$$\text{tg } \alpha = 0{,}40 \; ; \quad \alpha = \text{arctg } 0{,}40 \; ; \quad \alpha = 21{,}8°$$

En consecuencia, cuando el ángulo del plano inclinado es igual o mayor que 21,8° el bloque desciende, en caso contrario no.

IMPORTANTE

El coeficiente de rozamiento estático es igual a la tangente del ángulo mínimo a partir del cual se inicia el movimiento del bloque. Este hecho se emplea experimentalmente para determinar los coeficientes de rozamiento estático.

A lo largo de un plano inclinado 30° sobre la horizontal se lanza hacia arriba un cuerpo de masa $m = 20$ kg, con una velocidad de 12,4 m s^{-1}. El coeficiente de rozamiento cinético del cuerpo con el plano es $\mu = 0{,}39$. Calcula:

a) El módulo de la fuerza de rozamiento y de la componente tangencial del peso.

b) La aceleración del cuerpo.

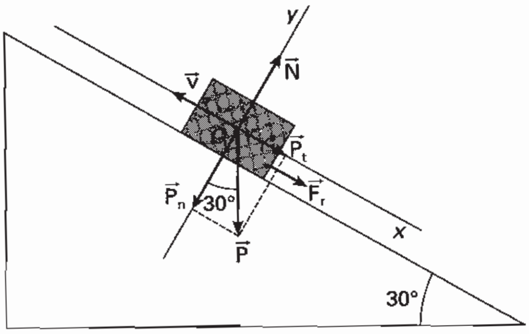
c) El tiempo que tarda en detenerse y la distancia que recorre hasta pararse.

Solución

a) Como hemos visto en problemas anteriores, los valores de la componente tangencial del peso P_t y la fuerza de rozamiento F_r son:

$$P_t = P \text{ sen } \alpha = mg \text{ sen } \alpha = 20 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ N kg}^{-1} \cdot \text{sen } 30° = 98 \text{ N}$$
$$F_r = \mu N = \mu mg \cos \alpha = 0{,}39 \cdot 20 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ N kg}^{-1} \cdot \cos 30° = 66 \text{ N}$$

b) En la figura se han dibujado todas las fuerzas que intervienen. Como la fuerza de rozamiento siempre se opone al movimiento, tanto esta fuerza como la componente tangencial del peso tienen en este caso el mismo sentido, y se oponen al ascenso del cuerpo por el plano inclinado.



Si tomamos como referencia el punto donde hemos dibujado el cuerpo en el plano y situamos los ejes de coordenadas en ese punto, la velocidad es negativa porque su sentido coincide con el semieje negativo de las x. Las fuerzas $\mathbf{F}_r$ y $\mathbf{P}_t$ son positivas, tienen sentido contrario a la velocidad y, en consecuencia, la aceleración del cuerpo también es positiva: $v < 0$; $a > 0$.

La segunda ley de Newton nos permite calcular la aceleración del cuerpo:

$$\Sigma \mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} \; ; \quad F_r + P_t = ma \; ; \quad a = \frac{F_r + P_t}{m} = \frac{98 \text{ N} + 66 \text{ N}}{20 \text{ kg}} = 8{,}2 \text{ m s}^{-2}$$

c) Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente variado, con velocidad final nula porque el cuerpo se detiene. El tiempo y la posición del cuerpo se obtienen a partir de las correspondientes ecuaciones de este tipo de movimientos:

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - (-12{,}4 \text{ m s}^{-1})}{8{,}2 \text{ m s}^{-2}} = 1{,}5 \text{ s}$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = -12{,}4 \text{ m s}^{-1} \cdot 1{,}5 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 8{,}2 \text{ m s}^{-2} \cdot (1{,}5 \text{ s})^2 = -9{,}4 \text{ m}$$

El cuerpo se desplaza 9,4 m a lo largo del semieje negativo de las x; es decir, asciende 9,4 m a lo largo del plano.

Fuerzas gravitatorias

La ley de la gravitación universal de Newton nos permite calcular el valor de las fuerzas gravitatorias: Todos los cuerpos se atraen entre sí con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa:

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

donde m_1 y m_2 son las masas que se atraen, r la distancia que las separa, y G la constante de gravitación, cuyo valor es:

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2\ kg^{-2}}$$

¿Cuál es el peso de un cuerpo de 20 kg? Comprueba tu resultado aplicando la ley de Newton de la gravitación universal. Basándote en la coincidencia de ambos resultados, ¿qué fórmula propondrías para calcular g?

Datos: Masa de la Tierra $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; constante de gravitación $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; radio de la Tierra $R_T = 6.377$ km.

Solución

El peso de un cuerpo es la fuerza con que la Tierra lo atrae. Es una fuerza vertical dirigida hacia el centro de la Tierra. Su valor en este caso es:

$$P = mg = 20\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{N\ kg^{-1}} = 196{,}2\ \mathrm{N}$$

Basándonos en la ley de gravitación universal de Newton podemos calcular, por otro procedimiento, el peso del cuerpo:

$$P = G\frac{M_T \cdot m}{R_T^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2\ kg^{-2}} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg} \cdot 20\ \mathrm{kg}}{(6{,}377 \cdot 10^6\ \mathrm{m})^2} = 196{,}2\ \mathrm{N}$$

La coincidencia entre ambos resultados nos permite igualar ambas fórmulas y deducir otra que permite averiguar el valor de g:

$$mg = G\frac{M_T \cdot m}{R_T^2}; \quad g = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

IMPORTANTE

La aceleración de la gravedad g depende, por tanto, de R_T. Cuando nos alejamos de la Tierra aumenta R_T y disminuyen g y el peso de los cuerpos. Sin embargo, para pequeñas alturas su valor disminuye muy poco.

La última relación nos permite calcular g en otros astros.

¿Qué fuerza interactúa entre una manzana de 245 g y la Tierra?

Solución

La Tierra atrae a la manzana con una fuerza que es su peso:

$$F = P = mg = 0{,}245\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m s}^{-2} = 2{,}40\ \text{N}$$

Según la ley de acción y reacción, la manzana atrae a la Tierra con esa misma fuerza.

El efecto de una fuerza de 2,4 N sobre la manzana es apreciable, le comunica una aceleración de 9,81 m s^{-2}; sin embargo, esta misma fuerza aplicada sobre la Tierra, cuya masa es de $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, es absolutamente insignificante.

Es frecuente encontrar en los medios de comunicación fervientes defensores de la influencia que ejercen los astros sobre los humanos en el momento de su nacimiento. Por el contrario, los detractores de estas ideas afirman que es mayor la influencia gravitatoria del ginecólogo que asiste al parto que la que ejerce el planeta Marte, por ejemplo. ¿Cuál es tu opinión?

Datos: Masa de Marte $M_m = 6{,}4 \cdot 10^{23}$ kg; distancia mínima Tierra-Marte $r_m = 7{,}83 \cdot 10^{10}$ m; masa del ginecólogo $m_g = 75$ kg; masa del bebé $m_b = 3{,}2$ kg; distancia bebé-ginecólogo $r_g = 0{,}50$ m.

Solución

Veamos si la ley de Newton de la gravitación universal nos ayuda a resolver el dilema.

La fuerza gravitatoria entre el ginecólogo y el bebé es:

$$F_g = G \frac{m_g \cdot m_b}{r_g^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2\ \text{kg}^{-2} \cdot \frac{75\ \text{kg} \cdot 3{,}2\ \text{kg}}{(0{,}50\ \text{m})^2} = 6{,}4 \cdot 10^{-8}\ \text{N}$$

La fuerza gravitatoria entre el bebé y Marte es:

$$F_m = G \frac{M_m \cdot m_b}{r_m^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2\ \text{kg}^{-2} \cdot \frac{6{,}40 \cdot 10^{23}\ \text{kg} \cdot 3{,}2\ \text{kg}}{(7{,}83 \cdot 10^{10}\ \text{m})^2} = 2{,}2 \cdot 10^{-8}\ \text{N}$$

Por tanto, la fuerza atractiva ejercida por el ginecólogo que asiste al parto es indudablemente mayor que la ejercida por el planeta Marte, que aunque es de enorme tamaño está demasiado lejos.

Con toda seguridad, los defensores de la astrología dirán que existen otras fuerzas, y en eso sí tendrían razón. Pero sólo existen otras tres clases de fuerzas físicas, y todas ellas (electromagnéticas, nucleares fuertes y nucleares débiles) son todavía más insignificantes, menos influyentes, en el hecho que ha provocado la controversia.

Averigua el peso de 1 kg de oro en la superficie de la Tierra y a una altura de 200 km. ¿En cuál de los dos lugares le interesaría comprar el oro a un joyero?

Datos: Radio de la Tierra $R_T = 6{,}37 \cdot 10^3$ km; valor de g en la superficie terrestre $= 9{,}81 \text{ N kg}^{-1}$.

Solución

La ley de la gravitación universal de Newton nos permite calcular el peso en la superficie terrestre, P, y a una altura de 200 km, P_h:

$$P = G \frac{M_T \cdot m}{R_T^2} = mg = 1 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ N kg}^{-1} = 9{,}81 \text{ N}$$

$$P_h = G \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2}$$

Al dividir ambas ecuaciones se obtiene:

$$\frac{P}{P_h} = \frac{(R_T + h)^2}{R_T^2}; \quad P_h = P \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} = 9{,}81 \text{ N} \cdot \frac{(6.370 \text{ km})^2}{(6.570 \text{ km})^2} = 9{,}22 \text{ N}$$

Por tanto, el peso es menor al alejarnos de la Tierra.

Un joyero avispado decidiría comprar su oro a 200 km de altura, o a mayor altura si fuera posible, y venderlo en la superficie. Pero no es todo tan sencillo. Si la pesada del oro se realiza con una balanza ordinaria, no ganaría nada, porque las balanzas miden masas y la masa es constante, no varía con la altura. Si utiliza un dinamómetro para pesar el oro sí obtendría una ganancia, porque el peso es menor cuanto mayor sea la altura. En cualquier caso, el coste del viaje no haría demasiado rentable el desplazamiento.

Calcula la fuerza gravitatoria con que se atraen dos protones situados en el núcleo de un átomo a una distancia de 10^{-15} m (1 Fm).

Datos: Masa del protón $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; constante de gravitación $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.

Solución

La fuerza atractiva viene dada por la ley de Newton de la gravitación:

$$F = G \frac{m_p \cdot m_p}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot \frac{(1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{ kg})^2}{(10^{-15} \text{ m})^2} = 1{,}86 \cdot 10^{-34} \text{ N}$$

Esta fuerza es tan pequeña que cuando se estudian los núcleos de los átomos no se tiene en consideración. Las fuerzas eléctricas y nucleares son enormemente más intensas.

¿Cuál es la masa y el peso de un cuerpo de 50 kg en la Tierra y en la Luna?

Datos: Masa de la Tierra $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; masa de la Luna $M_L = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg; radio de la Tierra $R_T = 6.380$ km; radio de la Luna $R_L = 1.740$ km.

Solución

La masa es constante, excepto si se mueve a velocidades comparables a la de la luz, por tanto, es igual a 50 kg en la Tierra y en la Luna.

El peso, $P = mg$, depende del valor de la aceleración de la gravedad. Calculemos el valor de ésta en la Tierra y en la Luna:

$$g_T = G\frac{M_T}{R_T^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6{,}38 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 9{,}80 \text{ N kg}^{-1}$$

$$g_L = G\frac{M_L}{R_L^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot \frac{7{,}35 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{(1{,}74 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 1{,}62 \text{ N kg}^{-1}$$

Como la aceleración de la gravedad es mayor en la Tierra que en la Luna, el peso del cuerpo será mayor en la Tierra que en la Luna:

$$P_T = mg_T = 50 \text{ kg} \cdot 9{,}80 \text{ N kg}^{-1} = 490 \text{ N}$$
$$P_L = mg_L = 50 \text{ kg} \cdot 1{,}62 \text{ N kg}^{-1} = 81 \text{ N}$$

Calcula la masa de la Tierra sabiendo que su radio es de 6.380 km y la aceleración de la gravedad en su superficie vale 9,8 m s^{-2}.

Dato: Constante de gravitación universal $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

Solución

La aceleración de la gravedad en la superficie terrestre en función de la masa de la Tierra (M_T) y de su radio (R_T) es:

$$g = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

Despejando M_T se obtiene:

$$M_T = \frac{g \cdot R_T^2}{G} = \frac{9{,}8 \text{ N kg}^{-1} \cdot (6{,}38 \cdot 10^6 \text{ m})^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}} = 5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Realmente, es fácil calcular la masa de la Tierra.

Fuerzas en el movimiento circular

En el movimiento circular uniforme la dirección del vector velocidad, que es tangente a la trayectoria, cambia en cada punto, aunque su módulo es constante; por tanto, existe una aceleración que, como se dirige hacia el centro de la circunferencia, se denomina aceleración centrípeta.

De acuerdo con las leyes de Newton de la dinámica, cuando un cuerpo varía su vector velocidad es porque sobre él actúa una fuerza, pues de no ser así continuaría moviéndose a velocidad constante en línea recta. En este caso, la fuerza correspondiente es la fuerza centrípeta, que es la responsable del movimiento circular uniforme, cuyo valor es:

$$F_c = ma_c = \frac{mv^2}{R} = mw^2R$$

donde R es el radio de la circunferencia descrita y w la velocidad angular.

La Tierra describe una órbita, que podemos considerar circular, alrededor del Sol, dando una vuelta por año. Suponiendo que el movimiento circular es uniforme, ¿qué fuerza origina el movimiento de la Tierra? Comprueba el resultado aplicando la ley de gravitación universal.

Datos: Masa de la Tierra $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; masa del Sol $M_S = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg; distancia de la Tierra al Sol $R = 149{,}6 \cdot 10^6$ km.

Solución

La Tierra describe un movimiento circular uniforme dando una vuelta (2π radianes) en 1 año, luego el módulo de su velocidad angular es:

$$w = \frac{2\pi \text{ rad}}{(365 \cdot 24 \cdot 3.600) \text{ s}} = 1{,}99 \cdot 10^{-7} \text{ rad s}^{-1}$$

Aunque el módulo de la velocidad se mantiene constante, ya que se trata de un movimiento uniforme, el vector velocidad cambia de dirección al ser tangente a la trayectoria y existe una aceleración, llamada *aceleración centrípeta* o *normal*, que está dirigida hacia el centro de la circunferencia. Su valor es:

$$a_c = w^2 \cdot R = (1{,}99 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1})^2 \cdot 149{,}6 \cdot 10^9 \text{ m} = 5{,}92 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$$

La ley fundamental de la dinámica permite calcular la fuerza centrípeta que origina el movimiento de la Tierra:

$$F_c = M_T \cdot a_c = 5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 5{,}92 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2} = 3{,}54 \cdot 10^{22} \text{ N}$$

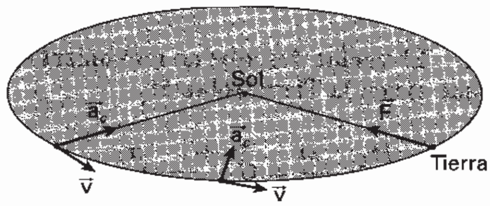
Ahora bien, esta fuerza es la fuerza gravitatoria que el Sol ejerce sobre la Tierra, que también podemos calcular aplicando la ley de la gravitación universal de Newton:

$$F = G\frac{M_S \cdot M_T}{R^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2\ kg^{-2}} \cdot \frac{1{,}99 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{(149{,}6 \cdot 10^{9}\ \mathrm{m})^2} = 3{,}54 \cdot 10^{22}\ \mathrm{N}$$

Efectivamente, hemos llegado al mismo resultado por dos caminos distintos.

IMPORTANTE

La fuerza centrípeta dirigida hacia el Sol, responsable del movimiento de la Tierra en su órbita, no es más que la fuerza gravitatoria que el Sol ejerce sobre la Tierra.



Un coche de juguete de masa $m = 250$ g recorre una pista circular de 2,2 m de diámetro, con una velocidad cuyo módulo es constante e igual a 0,54 m s^{-1}.

a) ¿Está sometido el coche a algún tipo de aceleración?

b) ¿Qué fuerza actúa sobre el coche durante su movimiento?

Solución

a) El coche realiza un movimiento circular uniforme, y aunque el módulo de su velocidad es constante, el vector velocidad no lo es, porque cambia su dirección al ser tangente a la trayectoria circular. Por consiguiente, sí existe una aceleración, llamada centrípeta porque se dirige hacia el centro de la circunferencia. Su módulo es:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(0{,}54\ \mathrm{m\ s^{-1}})^2}{1{,}1\ \mathrm{m}} = 0{,}27\ \mathrm{m\ s^{-2}}$$

b) La segunda ley de Newton nos permite calcular la fuerza que actúa sobre el coche:

$$F_c = ma_c = 0{,}250\ \mathrm{kg} \cdot 0{,}27\ \mathrm{m\ s^{-2}} = 6{,}7 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{N}$$

Esta fuerza, denominada fuerza centrípeta, de módulo constante, tiene el mismo sentido que la aceleración y la misma dirección; es decir, es perpendicular a la trayectoria y se dirige hacia el centro de la circunferencia.

Un satélite de comunicaciones de masa $m = 350$ kg se encuentra en una órbita circular alrededor de la Tierra, a 750 km de altura. Calcula:

a) La fuerza centrípeta que origina su movimiento.

b) Su velocidad orbital.

c) El tiempo que tarda en dar una vuelta alrededor de la Tierra.

Datos: Masa de la Tierra $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; radio de la Tierra $R_T = 6{,}38 \cdot 10^6$ m.

Solución

a) El satélite describe un movimiento circular uniforme bajo la acción de la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre él:

$$F = G\frac{M_T \cdot m}{r^2} = G\frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2\,\text{kg}^{-2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 350\ \text{kg}}{(6{,}38 \cdot 10^6\ \text{m} + 0{,}75 \cdot 10^6\ \text{m})^2}$$

$$F = 2{,}75 \cdot 10^3\ \text{N}$$

b) La velocidad del satélite en su órbita se obtiene a partir del valor de la fuerza centrípeta:

$$F = \frac{mv^2}{r}; \qquad v = \sqrt{\frac{F \cdot r}{m}}$$

donde r es el radio de la circunferencia que describe el satélite:

$$r = R_T + h = 6{,}38 \cdot 10^6\ \text{m} + 0{,}75 \cdot 10^6\ \text{m} = 7{,}13 \cdot 10^6\ \text{m}$$

Introduciendo los valores de F, m y r se obtiene la velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{2{,}75 \cdot 10^3\ \text{N} \cdot 7{,}13 \cdot 10^6\ \text{m}}{350\ \text{kg}}} = 7{,}48 \cdot 10^3\ \text{m s}^{-1} = 7{,}48\ \text{km s}^{-1}$$

c) Como el movimiento del satélite es circular uniforme, el tiempo invertido en cada vuelta se obtiene dividiendo el espacio recorrido en una vuelta (longitud de la circunferencia descrita = $2\pi r$) por la velocidad del satélite:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 7{,}13 \cdot 10^6\ \text{m}}{7{,}48 \cdot 10^3\ \text{m s}^{-1}} = 5{,}99 \cdot 10^3\ \text{s}$$

Una partícula de 420 g recorre una circunferencia de 80 cm de diámetro dando 45 vueltas cada minuto.

a) ¿Cuál es su aceleración?

b) ¿Qué fuerza produce el movimiento de la partícula?

Solución

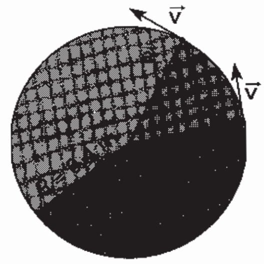
a) La partícula describe un movimiento circular uniforme, con una velocidad angular que tiene el siguiente valor en unidades del SI:

$$w = \frac{45 \text{ vueltas}}{1 \text{ min}} = \frac{45 \cdot 2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 1{,}5\pi \text{ rad s}^{-1} = 4{,}7 \text{ s}^{-1}$$

Aunque el movimiento es uniforme y el módulo de la velocidad se mantiene constante, como se trata de un movimiento circular, el vector velocidad no es constante, porque al ser tangente a la trayectoria cambia de dirección, y existe una aceleración, llamada aceleración centrípeta o normal, que está dirigida hacia el centro de la circunferencia, de módulo:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = w^2 R$$

donde w es la velocidad angular y R el radio de la circunferencia:



$$a_c = w^2 R = (4{,}7 \text{ s}^{-1})^2 \cdot 0{,}40 \text{ m} = 8{,}8 \text{ m s}^{-2}$$

b) La ley fundamental de la dinámica permite calcular la fuerza centrípeta que produce el movimiento circular uniforme de la partícula:

$$F_c = ma_c = mw^2 R = 0{,}42 \text{ kg} \cdot 8{,}8 \text{ m s}^{-2} = 3{,}7 \text{ N}$$

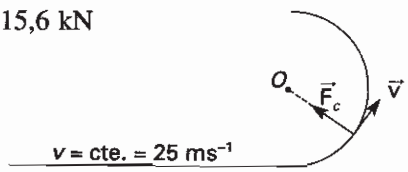
Un automóvil de 1.500 kg de masa se mueve en un tramo recto con una velocidad $v = 90$ km/h e inicia una curva, permaneciendo el trazado horizontal, cuyo radio de curvatura es $R = 60$ m, y manteniendo siempre la misma velocidad tangencial v. Determina la dirección, el sentido y el valor de la fuerza que el asfalto ejerce sobre el automóvil durante su recorrido por la curva.

Solución

Como el módulo de la velocidad tangencial se mantiene constante cuando el automóvil describe la curva, su movimiento es circular uniforme.

La fuerza responsable del movimiento circular uniforme del automóvil es la fuerza centrípeta, que es la fuerza ejercida por el asfalto sobre las ruedas del automóvil gracias al rozamiento. Su valor es:

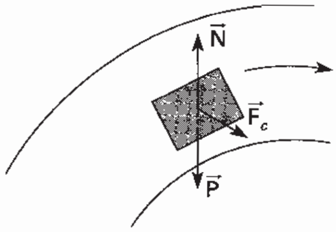
$$F_c = \frac{mv^2}{R} = \frac{1.500 \text{ kg} \cdot (25 \text{ m s}^{-1})^2}{60 \text{ m}} = 1{,}56 \cdot 10^4 \text{ N} = 15{,}6 \text{ kN}$$



La fuerza centrípeta es perpendicular a la trayectoria, como puede observarse en la figura, y dirigida hacia el centro de la curva.

Un coche toma una curva de 60 m de radio en una carretera horizontal. El coeficiente de rozamiento de las ruedas con el suelo es $\mu = 0{,}75$. ¿Con qué velocidad máxima podría tomar la curva sin derrapar?

Solución



Las fuerzas que intervienen aparecen dibujadas en la figura.

El peso **P** y la reacción del suelo **N** se anulan.

Para que el coche gire debe actuar una fuerza perpendicular a la velocidad y dirigida al centro de la curva, que es la fuerza centrípeta, responsable de su movimiento circular. Esta fuerza no es otra que la fuerza de rozamiento de las ruedas con el suelo. Por tanto, el valor máximo que la fuerza centrípeta puede alcanzar debe ser igual a la fuerza de rozamiento:

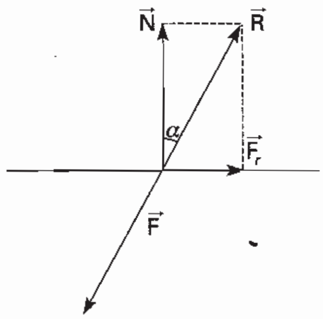
$$F_c = F_r \,; \quad \frac{mv^2}{R} = \mu mg$$

Despejando v obtenemos la velocidad máxima con la que podría tomar el coche la curva sin derrapar:

$$v = \sqrt{\mu g R} = \sqrt{0{,}75 \cdot 9{,}81 \text{ m s}^{-2} \cdot 60 \text{ m}} = 21 \text{ m s}^{-1}$$

Un ciclista toma una curva circular de 65 m de radio a una velocidad de 12 m s^{-1}. ¿Cuál es su inclinación respecto a la vertical?

Solución



El ciclista cuando inclina su bicicleta ejerce una fuerza sobre el suelo **F** que, para mantenerse en equilibrio, tiene que ir hacia abajo y coincidir con su misma dirección, como puedes observar en la figura.

De acuerdo con la tercera ley de Newton, el suelo debe ejercer una fuerza de reacción **R** de igual módulo y sentido contrario a **F**.

La fuerza **R** es la resultante de las fuerzas que ejerce el suelo sobre el ciclista: la fuerza de rozamiento $\mathbf{F}_r$ y la reacción del peso **N**.

Ahora bien, la fuerza de rozamiento está dirigida hacia el centro de la curva y perpendicular a ella, es decir, es la fuerza centrípeta:

$$F_r = F_c = mv^2/R$$

y el peso es: $P = mg$

Podemos calcular el ángulo de inclinación del ciclista respecto a la vertical, α, mediante una relación trigonométrica sencilla:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{F_r}{N} = \frac{mv^2/R}{mg} = \frac{v^2}{Rg} = \frac{(12\ \text{m s}^{-1})^2}{65\ \text{m} \cdot 9{,}81\ \text{m s}^{-2}} = 0{,}226\ ; \quad \alpha = 12{,}7°$$

Se hace girar en un plano vertical una piedra de masa $m = 50$ g, mediante una cuerda de 50 cm de longitud, dando 60 vueltas por minuto. ¿Qué tensión soporta la cuerda cuando la piedra está en el punto más alto y en el más bajo de su trayectoria?

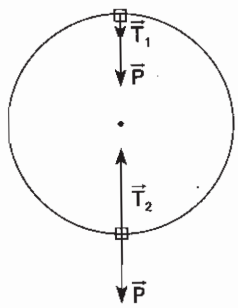
Solución

Disponemos de los siguientes *datos:*

- Masa de la piedra: $m = 50 \cdot 10^{-3}$ kg.
- Radio de la circunferencia: $R = 0{,}50$ m.
- Velocidad angular:

$$w = \frac{60\ \text{vueltas}}{1\ \text{min}} = \frac{60 \cdot 2\pi\ \text{rad}}{60\ \text{s}} = 6{,}28\ \text{rad s}^{-1}$$

- Velocidad lineal: $v = wR = 6{,}28\ \text{s}^{-1} \cdot 0{,}50\ \text{m} = 3{,}14\ \text{m s}^{-1}$.



Cuando la piedra pasa por el punto más alto de su trayectoria (véase figura), su peso y la tensión de la cuerda tienen el mismo sentido. La fuerza centrípeta, responsable del movimiento circular de la piedra y dirigida hacia el centro de la circunferencia, es la suma de ambos:

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{P} + \mathbf{T}_1$$

Como las tres fuerzas tienen la misma dirección y sentido:

$$F_c = P + T_1\ ; \quad T_1 = F_c - P = \frac{mv^2}{R} - mg$$

$$T_1 = \frac{50 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot (3{,}14\ \text{m s}^{-1})^2}{0{,}50\ \text{m}} - 50 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m s}^{-2}$$

$$T_1 = 0{,}5\ \text{N}$$

En el punto más bajo de la trayectoria, la tensión de la cuerda $\mathbf{T}_2$ y el peso de la piedra $\mathbf{P}$ tienen sentido contrario; por consiguiente, la fuerza centrípeta, que es la resultante de ambos, vale:

$$F_c = T_2 - P\ ; \quad T_2 = F_c + P = \frac{mv^2}{R} + mg$$

$$T_2 = \frac{50 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot (3{,}14\ \text{m s}^{-1})^2}{0{,}50\ \text{m}} + 50 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m s}^{-2} = 1{,}48\ \text{N}$$

Fuerzas elásticas

Los materiales elásticos sufren deformaciones cuando se les somete a la acción de una fuerza suficientemente intensa, pero vuelven a su estado inicial cuando cesa la fuerza deformadora. Los muelles pueden servirnos como ejemplo de materiales elásticos. Cumplen la ley de Hooke: *La deformación de un muelle elástico es proporcional a la fuerza deformadora:*

$$F = k \cdot \Delta x$$

donde k es la constante elástica del muelle e Δx la deformación del muelle.

Al colgar un cuerpo de masa $m = 54$ kg de un resorte, su longitud se alarga 16 cm.

a) ¿Cuál es la constante elástica del resorte?

b) ¿Cómo debería ser el resorte para que su longitud aumentase, en las mismas condiciones, sólo 1,6 cm?

Solución

a) La fuerza que alarga el resorte es el peso del cuerpo colgado:

$$F = P = mg = 54 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ N kg}^{-1} = 5{,}3 \cdot 10^2 \text{ N}$$

La constante elástica del resorte se obtiene al aplicar la ley de Hooke:

$$F = k \cdot \Delta x$$

$$k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{5{,}3 \cdot 10^2 \text{ N}}{16 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 3{,}3 \cdot 10^3 \text{ N m}^{-1}$$

b) El nuevo resorte se alarga sólo 1,6 cm en las mismas condiciones, es decir, se alarga diez veces menos que el primero (16 cm); por tanto, debería ser diez veces menos elástico, más duro, su constante elástica debería ser diez veces mayor: $k_1 = 10k = 3{,}3 \cdot 10^4 \text{ N m}^{-1}$. En efecto, la constante elástica del resorte es ahora:

$$k = \frac{5{,}3 \cdot 10^2 \text{ N}}{1{,}6 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 3{,}3 \cdot 10^4 \text{ N m}^{-1}$$

Sobre un muelle de constante elástica $k = 2{,}1 \cdot 10^3\ \mathrm{N\ m^{-1}}$ se coloca un cuerpo de masa $m = 30\ \mathrm{kg}$. ¿Qué longitud se acorta el muelle?

Solución

El muelle cumple la ley de Hooke: La deformación de un muelle es directamente proporcional a la fuerza que se le aplica:

$$F = k \cdot \Delta x$$

donde k es la constante elástica del muelle e Δx la deformación que experimenta.

En este caso, la fuerza que actúa sobre el muelle es el peso colocado sobre él:

$$F = P = mg = 30\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m\ s^{-2}} = 294\ \mathrm{N}$$

y sufre una compresión que acorta su longitud:

$$\Delta x = \frac{F}{k} = \frac{294\ \mathrm{N}}{2{,}1 \cdot 10^3\ \mathrm{N\ m^{-1}}} = 0{,}14\ \mathrm{m} = 14\ \mathrm{cm}$$

El muelle de un dinamómetro se alarga 1,5 cm al colgarle una masa de 50 g. ¿Cuál es su constante elástica?

Solución

El muelle cumple la ley de Hooke: $F = k \cdot \Delta x$

La fuerza que ejerce la tracción sobre el muelle es el peso colgado:

$$F = P = mg = 50 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m\ s^{-2}} = 0{,}49\ \mathrm{N}$$

Por tanto, la constante elástica del muelle es:

$$k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{0{,}49\ \mathrm{N}}{1{,}5 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}} = 32{,}7\ \mathrm{N\ m^{-1}}$$

El sistema de suspensión de un coche incluye cuatro muelles iguales entre los que se distribuye, de manera uniforme, el peso total del vehículo. La deformación máxima proyectada es de 10 cm, y la masa total del coche a plena carga es de 1,5 t. Si el fabricante introduce un margen de seguridad del 20 %, ¿cuál debe ser la constante elástica de los muelles?

Solución

La fuerza que produce la compresión de los muelles es el peso del coche:

$$P = mg = 1{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m\ s^{-2}} = 1{,}47 \cdot 10^4\ \mathrm{N}$$

Como el peso se distribuye entre los cuatro muelles, la fuerza que soporta cada uno es:

$$F = \frac{P}{4} = \frac{1{,}47 \cdot 10^4 \text{ N}}{4} = 3{,}67 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Los muelles cumplen la ley de Hooke y, por tanto, experimentan una deformación que es proporcional a la fuerza que soportan:

$$F = k \cdot \Delta x$$

donde k es la constante elástica de los muelles e Δx la longitud que se acorta cada muelle. En consecuencia, la constante elástica de cada muelle es:

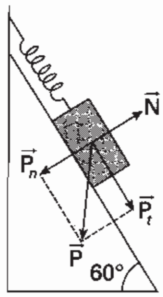
$$k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{3{,}67 \cdot 10^3 \text{ N}}{0{,}1 \text{ m}} = 3{,}67 \cdot 10^4 \text{ N m}^{-1}$$

Como el fabricante aumenta en un 20 % este valor, la constante elástica de los muelles utilizados es: $k_1 = \left(1 + \frac{20}{100}\right) \cdot k$

$$k_1 = 1{,}20 \cdot k = 1{,}20 \cdot 3{,}67 \cdot 10^4 \text{ N m}^{-1} = 4{,}40 \cdot 10^4 \text{ N m}^{-1}$$

Un bloque de masa $m = 3{,}5$ kg está apoyado sobre un plano inclinado 60° sobre la horizontal y sujeto por un resorte, que sufre un alargamiento de 8,2 cm. ¿Cuál es la constante elástica del muelle?

Solución



Las fuerzas que intervienen están dibujadas en la figura.

La componente normal del peso $\mathbf{P}_n$ se equilibra con la reacción del plano $\mathbf{N}$. Por tanto, la fuerza que produce el deslizamiento del bloque es la componente del peso paralela al plano $\mathbf{P}_t$. Su valor es:

$$P_t = mg \text{ sen } \alpha = 3{,}5 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m s}^{-2} \cdot \text{sen } 60° = 29{,}7 \text{ N}$$

Como el muelle cumple la ley de Hooke, su constante elástica es:

$$P_t = k \cdot x \, ; \quad k = \frac{P_t}{x} = \frac{29{,}7 \text{ N}}{8{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 3{,}6 \cdot 10^3 \text{ N m}^{-1}$$

PROBLEMA DE RECAPITULACIÓN 1

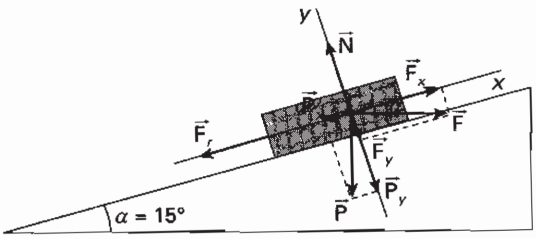
Se desea subir un cuerpo de $m = 4$ kg por un plano inclinado 15° sobre la horizontal, siendo el coeficiente de rozamiento cinético entre el plano y el cuerpo $\mu = 0{,}65$. ¿Qué fuerza horizontal mínima se debe aplicar?

a) El cuerpo sube con velocidad constante.

b) El cuerpo sube con una aceleración de 2 m s^{-2}.

Solución

a) En la figura aparecen todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.



La reacción del plano **N** contrarresta la componente normal del peso $\mathbf{P}_y$ y la componente normal de la fuerza horizontal aplicada $\mathbf{F}_y$, de acuerdo con la tercera ley de la dinámica:

$$\mathbf{N} + \mathbf{P}_y + \mathbf{F}_y = 0\ ; \quad N = F_y + P_y$$

Según la ley fundamental de la dinámica, se cumple:

$$\Sigma\, \mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}\ ; \quad F_x - P_x - F_r = m \cdot a$$

Como la velocidad es constante, la aceleración es nula, y resulta:

$$F_x - P_x - F_r = 0\ ; \quad F_x = P_x + F_r$$

Los valores de estas fuerzas son los siguientes:

$$F_x = F \cos \alpha\ ; \quad P_x = P \cdot \text{sen}\ \alpha = mg \text{ sen}\ \alpha$$

$$F_r = \mu N = \mu(P_y + F_y) = \mu(mg \cos \alpha + F \text{ sen}\ \alpha)$$

Sustituyendo se obtiene:

$$F_x = P_x + F_r\ ;$$

$$F \cos \alpha = mg \text{ sen}\ \alpha + \mu(mg \cos \alpha + F \text{ sen}\ \alpha)$$

$$F = \frac{mg(\text{sen}\ \alpha + \mu \cos \alpha)}{\cos \alpha - \mu \text{ sen}\ \alpha} =$$

$$= \frac{4 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m s}^{-2}\ (\text{sen}\ 15° + 0{,}65 \cos 15°)}{\cos 15° - 0{,}65 \text{ sen}\ 15°}$$

$$F = 43{,}6 \text{ N}$$

b) Si el cuerpo asciende con una aceleración constante de 2 m s^{-2}, la segunda ley de Newton nos permite escribir:

$$F_x - P_x - F_r = ma$$

$$F_x = P_x + F_r + ma$$

Introduciendo sus respectivos valores, resulta:

$$F \cos \alpha = mg \text{ sen}\ \alpha + \mu(mg \cos \alpha + F \text{ sen}\ \alpha) + ma$$

Despejando F, resulta:

$$F = \frac{mg\ (\text{sen}\ \alpha + \mu \cos \alpha) + ma}{\cos \alpha - \mu \text{ sen}\ \alpha}$$

$$F = \frac{4 \cdot 9{,}81 \cdot (\text{sen}\ 15° + 0{,}65 \cos 15°) + 4 \cdot 2}{\cos 15° - 0{,}65 \text{ sen}\ 15°}$$

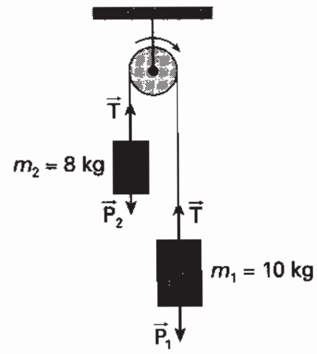
$$F = 53{,}7 \text{ N}$$

PROBLEMA DE RECAPITULACIÓN 2

Dos cuerpos, de 8 y 10 kg respectivamente, cuelgan de los extremos de un hilo que pasa por una polea, que suponemos no influye en el problema. ¿Con qué aceleración se moverán? ¿Cuál es la tensión del hilo en sus dos extremos?

Solución

Las fuerzas que intervienen están representadas en la figura.



Los pesos de ambos cuerpos actúan verticalmente hacia abajo, y sus valores son:

$$P_1 = m_1 g = 10 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m s}^{-2} = 98{,}1 \text{ N}$$
$$P_2 = m_2 g = 8 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m s}^{-2} = 78{,}5 \text{ N}$$

Según la ley de acción y reacción, el módulo de la tensión del hilo es igual en ambos extremos.

Consideraremos positivas las fuerzas que tienen igual sentido que el movimiento, y negativas las que tienen sentido contrario.

Al aplicar la ecuación fundamental de la dinámica a los dos cuerpos por separado, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$P_1 - T = m_1 a$$
$$T - P_2 = m_2 a$$

Al resolver este sistema de dos ecuaciones obtenemos la aceleración y la tensión.

Por ejemplo, sumando ambas ecuaciones se obtiene una relación que nos permite calcular la aceleración con que se mueven los cuerpos:

$$P_1 - T + T - P_2 = m_1 a + m_2 a \;;$$
$$P_1 - P_2 = (m_1 + m_2)a$$

$$a = \frac{P_1 - P_2}{m_1 + m_2} =$$
$$= \frac{98{,}1 \text{ N} - 78{,}5 \text{ N}}{10 \text{ kg} + 8 \text{ kg}} = 1{,}09 \text{ m s}^{-2}$$

La tensión del hilo se obtiene al sustituir el valor de la aceleración en cualquiera de las dos ecuaciones:

En la primera ecuación:

$$P_1 - T = m_1 a$$
$$T = P_1 - m_1 a =$$
$$= 98{,}1 \text{ N} - 10 \text{ kg} \cdot 1{,}09 \text{ m s}^{-2} = 87{,}2 \text{ N}$$

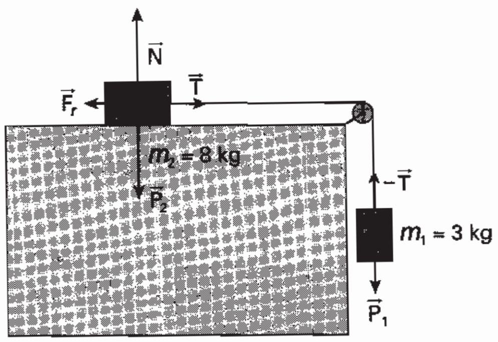
En la segunda ecuación:

$$T - P_2 = m_2 a$$
$$T = P_2 + m_2 a =$$
$$= 78{,}5 \text{ N} + 8 \text{ kg} \cdot 1{,}09 \text{ m s}^{-2} = 87{,}2 \text{ N}$$

Como ya sabíamos, la tensión es la misma en ambos extremos.

PROBLEMA DE RECAPITULACIÓN 3

Un bloque de madera de masa 8 kg se desplaza sobre una superficie horizontal, también de madera, por la acción de una masa de 3 kg que cuelga verticalmente, según se indica en la figura. El coeficiente de rozamiento cinético es $\mu = 0{,}30$. Suponemos que la cuerda es inextensible y que al igual que la polea no tiene masa. ¿Cuál es la aceleración del conjunto y la tensión de la cuerda?



Solución

Al aplicar la ecuación fundamental de la dinámica a cada cuerpo por separado, considerando positivas las fuerzas cuyo sentido coincide con el del movimiento, resulta:

Para el bloque que cae verticalmente:

$$P_1 - T = m_1 a$$

Para el bloque apoyado en el plano horizontal:

$$T - F_r = m_2 a$$

Como la cuerda es inextensible, los dos bloques se mueven con la misma aceleración.

Al resolver el sistema formado por las dos ecuaciones anteriores se obtienen los valores de a y T. Por ejemplo, sumando ambas ecuaciones se elimina la tensión y se obtiene la aceleración:

$$P_1 - T + T - F_r = m_1 a + m_2 a$$

$$P_1 - F_r = (m_1 + m_2)a$$

$$m_1 g - \mu m_2 g = (m_1 + m_2)a$$

$$a = \frac{m_1 g - \mu m_2 g}{m_1 + m_2}$$

$$a = \frac{3 \cdot 9{,}81 - 0{,}30 \cdot 8 \cdot 9{,}81}{3 + 8} =$$

$$= 0{,}54 \text{ m s}^{-2}$$

La tensión de la cuerda se obtiene introduciendo el valor de la aceleración en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales:

En la 1.ª ecuación:

$$P_1 - T = m_1 a$$

$$T = P_1 - m_1 a = m_1 g - m_1 a = m_1(g - a)$$

$$T = 3 \text{ kg} (9{,}81 \text{ m s}^{-2} - 0{,}54 \text{ m s}^{-2}) = 27{,}8 \text{ N}$$

En la 2.ª ecuación:

$$T - F_r = m_2 a$$

$$T = F_r + m_2 a = \mu m_2 g + m_2 a =$$

$$= m_2(\mu g + a)$$

$$T = 8 \text{ kg} (0{,}30 \cdot 9{,}81 \text{ m s}^{-2} + 0{,}54 \text{ m s}^{-2}) =$$

$$= 27{,}8 \text{ N}$$

De acuerdo con la ley de acción y reacción el módulo de la tensión es igual en ambos bloques.

PROBLEMA DE RECAPITULACIÓN 4

Se quiere desplazar un contenedor de masa $m = 250$ kg que descansa sobre un piso horizontal de cemento. El coeficiente de rozamiento estático entre el contenedor y el suelo es 0,58. Averigua el número de trabajadores necesarios para mover el contenedor, si cada uno de ellos realiza una fuerza igual al 70 % de su peso (70 kg), en los siguientes casos:

a) Tiran del contenedor mediante una cuerda paralela al suelo.

b) Tiran del contenedor mediante una cuerda que forma un ángulo de 10° con la horizontal.

Solución

a) Las fuerzas que intervienen aparecen dibujadas en la Figura A.

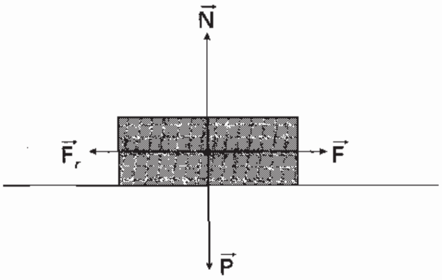


Figura A

El peso del contenedor **P** y la reacción normal del plano **N** se anulan, de acuerdo con la ley de acción y reacción. En consecuencia, el contenedor se pondrá en movimiento cuando la fuerza aplicada **F** sea como mínimo igual a la fuerza de rozamiento $\mathbf{F}_r$.

El módulo de la fuerza de rozamiento es:

$$F = F_r = \mu N = \mu m g =$$
$$= 0{,}58 \cdot 250 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m s}^{-2} = 1{,}42 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Cada trabajador realiza una fuerza igual al 70 % de su peso:

$$P_1 = m_1 g = 70 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m s}^{-2} = 686 \text{ N}$$
$$F_1 = 0{,}70 \cdot 686 \text{ N} = 480 \text{ N}$$

El número de trabajadores necesarios es:

$$n = \frac{F}{F_1} = \frac{1{,}42 \cdot 10^3 \text{ N}}{480 \text{ N/trab.}} = 3 \text{ trabajadores}$$

b) Cuando la fuerza aplicada forma un ángulo de 10° con la horizontal, las fuerzas que actúan aparecen dibujadas en la Figura B.

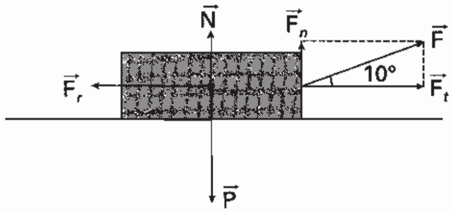


Figura B

Ahora la reacción normal **N** es menor debido a la componente normal $\mathbf{F}_n$ de la fuerza aplicada. Según la ley de acción y reacción, la suma de las fuerzas verticales es cero:

$$\mathbf{N} + \mathbf{P} + \mathbf{F}_n = 0 \,; \quad N + F_n = P \,;$$
$$N = P - F_n$$

Para iniciar el movimiento, la componente paralela al suelo $\mathbf{F}_t$ de la fuerza aplicada **F** debe ser igual a la fuerza de rozamiento:

$$\mathbf{F}_t = -\mathbf{F}_r \,; \quad F_t = F_r$$

Los módulos de F_t y F_r son los siguientes:

$$F_t = F \cdot \cos \alpha$$

$$F_r = \mu N = \mu(P - F_n) = \mu(mg - F \text{ sen } \alpha)$$

Como $F_t = F_r$, resulta:

$$F \cdot \cos \alpha = \mu(mg - F \text{ sen } \alpha)$$

y despejando F se obtiene:

$$F = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \text{ sen } \alpha} =$$

$$= \frac{0{,}58 \cdot 250 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m s}^{-2}}{1{,}08} =$$

$$= 1{,}32 \cdot 10^3 \text{ N}$$

En este caso se necesita una fuerza menor para mover el contenedor.

El número de trabajadores es ahora:

$$n = \frac{1{,}32 \cdot 10^3 \text{ N}}{480 \text{ N/trab.}} = 2{,}75 \text{ trabajadores}$$

Serían necesarios los mismos 3 trabajadores, pero realizarían un menor esfuerzo que en el caso ***a***).