

PÁGINA 74

PRACTICA**Ecuaciones de 1.º y 2.º grados****1** ■■■ Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(4x + 3)(4x - 3) - 4(3 - 2x)^2 = 3x$

b) $2x + 3(x - 4)^2 = 37 + (x - 3)(x + 3)$

c) $\frac{x + 3}{5} - \frac{(x - 1)^2}{4} = \frac{5}{4}x - \left(\frac{x + 2}{2}\right)^2$

d) $\frac{(x - 1)(x + 2)}{12} - \frac{x - 3}{3} = 1 + \frac{(x + 1)(x - 2)}{6}$

a) $16x^2 - 9 - 4(9 + 4x^2 - 12x) = 3x$

$16x^2 - 9 - 36 - 16x^2 + 48x = 3x \rightarrow 48x - 3x = 45 \rightarrow 45x = 45 \rightarrow x = 1$

Solución: $x = 1$

b) $2x + 3(x^2 - 8x + 16) = 37 + x^2 - 9$

$2x + 3x^2 - 24x + 48 = 28 + x^2 \rightarrow 2x^2 - 22x + 20 = 0$

$x^2 - 11x + 10 = 0 \rightarrow x = \frac{11 \pm 9}{2} = \begin{matrix} 10 \\ 1 \end{matrix}$

Soluciones: $x_1 = 10, x_2 = 1$

c) $\frac{x + 3}{5} - \frac{x^2 - 2x + 1}{4} = \frac{5x}{4} - \frac{x^2 + 4x + 4}{4}$

$4x + 12 - 5x^2 + 10x - 5 = 25x - 5x^2 - 20x - 20$

$9x + 27 = 0 \rightarrow x = -3$

Solución: $x = -3$

d) $(x - 1)(x + 2) - 4(x - 3) = 12 + 2(x + 1)(x - 2)$

$x^2 + x - 2 - 4x + 12 = 12 + 2x^2 - 2x - 4$

$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix}$

Soluciones: $x_1 = 1, x_2 = -2$

2 Comprueba que las ecuaciones siguientes son de 2.º grado incompletas. Resuélvelas sin aplicar la fórmula general.

a) $\frac{x+7}{12} - \frac{x^2+1}{4} = 1 - \frac{x^2+2}{3}$

b) $(x+1)^2 - (x-2)^2 = (x+3)^2 + x^2 - 20$

c) $\frac{x(x-2)}{4} - \frac{x+1}{6} = \frac{x-3}{2} - \frac{x-4}{3}$

d) $x\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{x-2}{2} + \frac{x^2-1}{3} = 0$

a) $x+7 - 3(x^2+1) = 12 - 4(x^2+2)$

$$x+7 - 3x^2 - 3 = 12 - 4x^2 - 8$$

$$x^2 + x = 0 \rightarrow x(x+1) = 0 \rightarrow x = 0; x = -1$$

Soluciones: $x_1 = 0, x_2 = -1$

b) $x^2 + 2x + 1 - x^2 + 4x - 4 = x^2 + 6x + 9 + x^2 - 20$

$$2x^2 - 8 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = 2; x = -2$$

Soluciones: $x_1 = 2, x_2 = -2$

c) $3x(x-2) - 2(x+1) = 6(x-3) - 4(x-4)$

$$3x^2 - 6x - 2x - 2 = 6x - 18 - 4x + 16$$

$$3x^2 - 10x = 0 \rightarrow x(3x - 10) = 0 \rightarrow x = 0; x = \frac{10}{3}$$

Soluciones: $x_1 = 0, x_2 = \frac{10}{3}$

d) $x\left(\frac{2x+1}{2}\right) - \frac{x-2}{2} + \frac{x^2-1}{3} = 0$

$$3x(2x+1) - 3(x-2) + 2(x^2-1) = 0$$

$$6x^2 + 3x - 3x + 6 + 2x^2 - 2 = 0 \rightarrow 8x^2 + 4 = 0 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

3 Averigua cuáles de las siguientes “ecuaciones” no tienen solución y cuáles tienen infinitas soluciones. (Recuerda que en realidad no son ecuaciones, porque no tienen término en x).

a) $x - \frac{1-x}{2} = 2x - \frac{2x-7}{4}$

b) $(3x+2)^2 - (3x-2)^2 = 24x$

c) $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{1+x}{2} = \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{2+x}{4}$

d) $(3x+1)(2x-3) - (x-3)(6x+4) = 7x$

a) $4x - 2(1-x) = 8x - 2x + 7$

$$4x - 2 + 2x = 6x + 7$$

$$6x - 6x = 9 \rightarrow 0x = 9 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

$$b) 9x^2 + 4 + 12x - 9x^2 - 4 + 12x = 24x$$

$$0x = 0 \rightarrow \text{Tiene infinitas soluciones.}$$

$$c) x^2 + 2x + 1 - 8(1 + x) = x^2 - 2x + 1 - 4(2 + x)$$

$$x^2 + 2x + 1 - 8 - 8x = x^2 - 2x + 1 - 8 - 4x$$

$$-6x - 7 = -6x - 7 \rightarrow 0x = 0 \rightarrow \text{Tiene infinitas soluciones.}$$

$$d) 6x^2 - 7x - 3 - (6x^2 - 14x - 12) = 7x$$

$$6x^2 - 7x - 3 - 6x^2 + 14x + 12 = 7x$$

$$0x = -9 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

4 ■□□ Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(2x-1)^2}{16} = \frac{35}{16}$$

$$b) x + \frac{3x+1}{2} - \frac{x-2}{3} = x^2 - 2$$

$$c) \frac{1}{2}(x-2)^2 = x - \frac{11}{4}$$

$$d) (x+1)^2 = \frac{x}{2}(5x+6) - (2x^2+1)$$

$$e) 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25x}{2} = \left(\frac{1}{2} - x\right)(7x+1) - 4$$

$$a) 4(x^2 - 6x + 9) - (4x^2 - 4x + 1) = 35$$

$$4x^2 - 24x + 36 - 4x^2 + 4x - 1 = 35$$

$$-20x = 0$$

$$\text{Solución: } x = 0$$

$$b) 6x + 3(3x+1) - 2(x-2) = 6(x^2-2)$$

$$6x + 9x + 3 - 2x + 4 = 6x^2 - 12$$

$$6x^2 - 13x - 19 = 0 \rightarrow x = \frac{13 \pm 25}{12} = \begin{cases} 19/6 \\ -1 \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = \frac{19}{6}; x_2 = -1$$

$$c) 2(x^2 - 4x + 4) = 4x - 11$$

$$2x^2 - 8x + 8 - 4x + 11 = 0$$

$$2x^2 - 12x + 19 = 0 \rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{-8}}{4} \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

$$d) 2(x^2 + 2x + 1) = 5x^2 + 6x - 2(2x^2 + 1)$$

$$2x^2 + 4x + 2 = 5x^2 + 6x - 4x^2 - 2$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

$$e) 4x^2 + 4x + 1 + 25x = 5x + 1 - 14x^2 - 8$$

$$18x^2 + 24x + 8 = 0 \rightarrow 9x^2 + 12x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-12 \pm 0}{18} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Solución: } x = -\frac{2}{3}$$

Otras ecuaciones

5 ■■■ Resuelve.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

c) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

d) $x^4 - x^2 - 6 = 0$

a) Cambio de variable: $x^2 = y$

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

$$x^2 = 4 \rightarrow x_1 = 2; x_2 = -2$$

$$x^2 = 1 \rightarrow x_3 = 1; x_4 = -1$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = -1$$

b) Cambio de variable: $x^2 = y$

$$4y^2 - 17y + 4 = 0 \rightarrow y = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{8} = \frac{17 \pm 15}{8} = \begin{cases} 4 \\ 1/4 \end{cases}$$

$$x^2 = 4 \rightarrow x_1 = 2; x_2 = -2$$

$$x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x_3 = \frac{1}{2}; x_4 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = -\frac{1}{2}$$

c) Cambio de variable: $x^2 = y$

$$y^2 - 3y - 4 = 0 \rightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} y = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \\ y = -1 \rightarrow \text{No vale} \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 2; x_2 = -2$$

d) Cambio de variable: $x^2 = y$

$$y^2 - y - 6 = 0 \rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} y = 3 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ y = -2 \rightarrow \text{No vale.} \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$$

6 ■■■ Resuelve.

a) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

b) $x^4 - 16 = 0$

c) $x^4 - 25x^2 = 0$

d) $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$

e) $(x^2 + 1)^2 + 6 = 5(x^2 + 1)$

f) $(2x^2 + 1)^2 - 5 = (x^2 + 2)(x^2 - 2)$

a) Cambio de variable: $x^2 = y$

$$y^2 - 4y + 3 = 0 \rightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} y = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ y = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = 1, x_4 = -1$$

$$b) x^4 = 16 \rightarrow x = \pm \sqrt[4]{16}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 2, x_2 = -2$$

$$c) x^2(x^2 - 25) = 0$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = -5$$

$$d) \text{ Cambio de variable: } x^2 = y$$

$$y^2 - 18y + 81 = 0 \rightarrow y = \frac{18 \pm \sqrt{0}}{2} = 9 \rightarrow x^2 = 9$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 3, x_2 = -3$$

$$e) x^4 + 2x^2 + 1 + 6 = 5x^2 + 5$$

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0. \text{ Cambio de variable: } x^2 = y$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \rightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \begin{cases} y = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ y = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}, x_3 = 1, x_4 = -1$$

$$f) 4x^4 + 4x^2 + 1 - 5 = x^4 - 4$$

$$3x^4 + 4x^2 = 0 \rightarrow x^2(3x^2 + 4) = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$3x^2 + 4 = 0 \text{ no tiene solución.}$$

La solución de la ecuación es $x = 0$.

7 ■■■ Resuelve.

$$a) \frac{x+2}{x} + 3x = \frac{5x+6}{2}$$

$$b) \frac{x-4}{x} - \frac{x-1}{4x} = -3x$$

$$c) \frac{x-3}{x} + \frac{x+3}{x^2} = \frac{2}{3}$$

$$d) x - \frac{x-1}{x+1} = \frac{3x-1}{2}$$

$$a) 2(x+2) + 2x \cdot 3x = x(5x+6)$$

$$2x+4+6x^2 = 5x^2+6x \rightarrow x^2-4x+4=0 \rightarrow (x-2)^2=0 \rightarrow x=2$$

Comprobamos sobre la ecuación inicial la validez de la solución.

Solución: $x = 2$.

$$b) 4(x-4) - (x-1) = -3x \cdot 4x$$

$$4x-16-x+1 = -12x^2 \rightarrow 12x^2+3x-15=0 \rightarrow 4x^2+x-5=0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{8} = \frac{-1 \pm 9}{8} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -10/8 = -5/4 \end{cases}$$

Se comprueba sobre la ecuación inicial que las dos soluciones son válidas.

$$\text{Soluciones: } x_1 = 1, x_2 = -\frac{5}{4}$$

$$c) 3x(x-3) + 3(x+3) = 2x^2$$

$$3x^2 - 9x + 3x + 9 - 2x^2 = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow x = 3$$

Se comprueba que la solución es válida.

Solución: $x = 3$

$$d) 2x(x+1) - 2(x-1) = (3x-1)(x+1)$$

$$2x^2 + 2x - 2x + 2 = 3x^2 + 2x - 1 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Se comprueba que las dos soluciones son válidas.

Soluciones: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$

8 ■■■ Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) \frac{x+1}{x-1} - 3 = \frac{2-x}{x}$$

$$b) \frac{3x+1}{4x+3} - \frac{1}{x} = 3$$

$$c) \frac{3x+4}{x+3} - \frac{1}{2} = \frac{x+19}{4x+6}$$

$$d) \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x} = \frac{2-5x}{x^2+3x}$$

$$a) (x+1)x - 3x(x-1) = (2-x)(x-1)$$

$$x^2 + x - 3x^2 + 3x = -x^2 + 3x - 2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Se comprueba la validez de las dos soluciones.

Soluciones: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$

$$b) x(3x+1) - (4x+3) = 3x(4x+3)$$

$$3x^2 + x - 4x - 3 = 12x^2 + 9x \rightarrow 9x^2 + 12x + 3 = 0 \rightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6} = \begin{cases} -1 \\ -1/3 \end{cases}$$

Las dos soluciones son válidas.

Soluciones: $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$

$$c) 2(3x+4) - (x+3) = x+19$$

$$6x + 8 - 3 = x + 19 \rightarrow 4x = 14 \rightarrow x = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

Solución: $x = \frac{7}{2}$

$$d) x - 2(x+3) = 2 - 5x$$

$$x - 2x - 6 = 2 - 5x \rightarrow 4x = 8 \rightarrow x = 2$$

Solución: $x = 2$

9 ■■■ Resuelve.

a) $x + \sqrt{25 - x^2} = 2x + 1$

b) $3x + \sqrt{6x + 10} = 35$

c) $x + 1 - \sqrt{5x + 1} = 0$

d) $\sqrt{4x^2 + 7x - 2} = x + 2$

a) $\sqrt{25 - x^2} = x + 1 \rightarrow 25 - x^2 = x^2 + 2x + 1 \rightarrow 2x^2 + 2x - 24 = 0$

$$x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = 3 \rightarrow \sqrt{25 - 9} = 3 + 1 \rightarrow x = 3 \text{ es solución.}$

$x = -4 \rightarrow \sqrt{25 - 16} \neq -4 + 1 \rightarrow x = -4 \text{ no vale.}$

Solución: $x = 3$

b) $\sqrt{6x + 10} = 35 - 3x \rightarrow 6x + 10 = 1225 + 9x^2 - 210x$

$9x^2 - 216x + 1215 = 0 \rightarrow x^2 - 24x + 135 = 0$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{24 \pm 6}{2} = \begin{cases} 15 \\ 9 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = 15 \rightarrow \sqrt{6 \cdot 15 + 10} \neq 35 - 45 \text{ no vale.}$

$x = 9 \rightarrow \sqrt{54 + 10} = 37 - 27 \rightarrow \text{Válida.}$

Solución: $x = 9$

c) $\sqrt{5x + 1} = x + 1 \rightarrow 5x + 1 = x^2 + 2x + 1 \rightarrow x^2 - 3x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

Comprobación:

$x = 0 \rightarrow \sqrt{1} = 1 \rightarrow \text{Válida.}$

$x = 3 \rightarrow \sqrt{15 + 1} = 3 + 1 \rightarrow \text{Válida.}$

Soluciones: $x_1 = 0, x_2 = 3$

d) $(\sqrt{4x^2 + 7x - 2})^2 = x^2 + 4x + 4 \rightarrow 4x^2 + 7x - 2 - x^2 - 4x - 4 = 0$

$$3x^2 + 3x - 6 = 0 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 18}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = 1 \rightarrow \sqrt{4 + 7 - 2} = 1 + 2 \rightarrow x = 1 \text{ es solución.}$

$x = -2 \rightarrow \sqrt{16 - 14 - 2} = -2 + 2 \rightarrow x = -2 \text{ es solución.}$

Soluciones: $x_1 = 1, x_2 = -2$

10 ■■■ Dos de las siguientes ecuaciones no tienen solución. Averigua cuáles son y resuelve las otras.

a) $x - 17 = \sqrt{169 - x^2}$

b) $\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{3 - x} = 0$

c) $\sqrt{5x - 7} - \sqrt{1 - x} = 0$

d) $2\sqrt{5 - 4x} + 4x = 5$

a) $x^2 - 34x + 289 = 169 - x^2$

$$2x^2 - 34x + 120 = 0 \rightarrow x^2 - 17x + 60 = 0$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2} = \begin{cases} 12 \\ 5 \end{cases}$$

Comprobación:

$$x = 12 \rightarrow 12 - 17 = \sqrt{169 - 289} \rightarrow \text{No vale.}$$

$$x = 5 \rightarrow 5 - 17 = \sqrt{169 - 25} \rightarrow \text{No vale.}$$

No tiene solución.

b) $\sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{3 - x} \rightarrow x^2 + 3 = 3 - x \rightarrow x^2 + x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

Comprobación:

$$x = 0 \rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{3} \rightarrow \text{Es solución.}$$

$$x = -1 \rightarrow \sqrt{4} = \sqrt{4} \rightarrow \text{Es solución.}$$

Soluciones: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$

c) $\sqrt{5x - 7} = \sqrt{1 - x} \rightarrow 5x - 7 = 1 - x \rightarrow 6x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

Comprobación:

$$\sqrt{5 \cdot \frac{4}{3} - 7} \neq \sqrt{1 - \frac{4}{3}} \rightarrow \text{No vale.}$$

La ecuación no tiene solución.

d) $4(5 - 4x) = (5 - 4x)^2 \rightarrow 20 - 16x = 25 + 16x^2 - 40x$

$$16x^2 - 24x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{24 \pm \sqrt{256}}{32} = \frac{24 \pm 16}{32} = \begin{cases} 5/4 \\ 1/4 \end{cases}$$

Comprobación:

$$x = \frac{5}{4} \rightarrow 2\sqrt{5 - \frac{5}{4} \cdot 4} + 4 \cdot \frac{5}{4} = 5 \rightarrow x = \frac{5}{4} \text{ es solución.}$$

$$x = \frac{1}{4} \rightarrow 2\sqrt{5 - 4 \cdot \frac{1}{4}} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 5 \rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ es solución.}$$

Soluciones: $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = \frac{1}{4}$

11 ■■■ Di cuáles son las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $(x-2)(2x-3) = 0$

b) $x(x-3)(x+1) = 0$

c) $(x+5)(x^2-4) = 0$

d) $x(x^2+4) = 0$

e) $(x-2)(x^2-2x-3) = 0$

f) $x(x^2+3x+2) = 0$

a) $x-2=0 \rightarrow x_1=2; 2x-3=0 \rightarrow x_2=\frac{3}{2}$

Soluciones: $x_1=2, x_2=\frac{3}{2}$

b) Soluciones: $x_1=0; x_2=3; x_3=-1$

c) $x_1=-5; x^2=4 \rightarrow x_2=2; x_3=-2$

Soluciones: $x_1=-5; x_2=2; x_3=-2$

d) $x=0; x^2+4 \neq 0$

Solución: $x=0$

e) $x_1=2; x^2-2x-3=0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x_2=3 \\ x_3=-1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=2; x_2=3; x_3=-1$

f) $x_1=0; x^2+3x+2=0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{cases} x_2=-2 \\ x_3=-1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=0; x_2=-2; x_3=-1$

12 ■■■ Descompón en factores y resuelve.

a) $x^3 - 4x = 0$

b) $x^3 + x^2 - 6x = 0$

c) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

d) $x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$

a) $x(x^2-4) = 0$

Soluciones: $x_1=0; x_2=2; x_3=-2$

b) $x(x^2+x-6) = 0 \rightarrow x_1=0; x^2+x-6=0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=0; x_2=-3; x_3=2$

c)

1	2	-1	-2
1	1	3	2
1	3	2	0

 $x^2+3x+2=0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=1; x_2=-1; x_3=-2$

d)

1	-1	-5	-3
-1	-1	2	3
1	-2	-3	0

 $x^2-2x-3=0 \rightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=-1$ (doble); $x_2=3$

PÁGINA 75

Sistemas de ecuaciones

13 ■■■ Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones y comprueba las soluciones:

$$\text{a) } \begin{cases} 5x + 3 = 20 - 9y \\ 2x - 3y = 5x - y \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y = 30 \\ 6,5x + 3,2y = 158,7 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 4 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{2x}{3} + y + 1 = 0 \\ \frac{x+1}{2} + \frac{y-1}{3} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 5x + 9y = 17 \\ -3x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 15x + 27y = 51 \\ -15x - 10y = 0 \end{cases}$$

$$17y = 51 \rightarrow y = 3$$

$$\text{Si } y = 3 \rightarrow 5x + 27 = 17 \rightarrow 5x = -10 \rightarrow x = -2$$

$$\text{Solución: } x = -2; y = 3$$

$$\text{b) } \begin{cases} y = 30 - x \\ 6,5x + 3,2(30 - x) = 158,7 \end{cases} \rightarrow 6,5x + 96 - 3,2x = 158,7$$

$$3,3x = 62,7 \rightarrow x = 19$$

$$y = 30 - 19 = 11$$

$$\text{Solución: } x = 19; y = 11$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x - 3y = 24 \\ 2x - y = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 24 \\ -2x + y = -8 \end{cases}$$

$$-2y = 16 \rightarrow y = -8$$

$$2x + 24 = 24 \rightarrow x = 0$$

$$\text{Solución: } x = 0; y = -8$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x + 3y = -3 \\ 3x + 3 + 2y - 2 + 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -3 \\ 3x + 2y = -7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x - 6y = 6 \\ 9x + 6y = -21 \end{cases}$$

$$5x = -15 \rightarrow x = -3$$

$$2(-3) + 3y = -3 \rightarrow 3y = 3 \rightarrow y = 1$$

$$\text{Solución: } x = -3; y = 1$$

14 ■■■ Resuelve los siguientes sistemas aplicando dos veces el método de reducción:

$$\text{a) } \begin{cases} 13x - 12y = 127 \\ 21x + 17y = 96 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 8,6x + 5,4y = 11 \\ 25x - 12y = -245 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \text{a) } 273x - 252y = 2667 \\ -273x - 221y = -1248 \\ \hline -473y = 1419 \rightarrow y = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 221x - 204y = 2159 \\ 252x + 204y = 1152 \\ \hline 473x = 3311 \rightarrow x = 7 \end{array}$$

Solución: $x = 7$, $y = -3$

$$\begin{array}{r} \text{b) } -215x - 135y = -275 \\ 215x - 103,2y = -2107 \\ \hline -238,2y = -2382 \rightarrow y = 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 103,2x + 64,8y = 132 \\ 135x - 64,8y = -1323 \\ \hline 238,2x = -1191 \rightarrow x = -5 \end{array}$$

Solución: $x = -5$, $y = 10$

15 ■■■ Averigua cuál de los siguientes sistemas no tiene solución y cuál tiene infinitas soluciones:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 4 - y \\ 3x - 5 = 7 - 6y \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5 + x = y \\ 7x - y + 17 = 3x + 3y \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 6y = 12 \end{cases} \right\} \text{ Tiene infinitas soluciones.}$$

$$\text{b) } \left. \begin{cases} x - y = -5 \\ 4x - 4y = -17 \end{cases} \right\} \text{ No tiene solución.}$$

16 ■■■ Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x+15}{8} + \frac{3(y+1)}{16} = 3 \\ \frac{7-x}{2} - \frac{1+y}{12} = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{x+2}{5} - \frac{3y-1}{10} = \frac{-3}{10} \\ \frac{2x+3}{8} + \frac{y+7}{4} = \frac{19}{8} \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 2(x+15) + 3(y+1) = 48 \\ 6(7-x) - (1+y) = 36 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 30 - 3y + 3 = 48 \\ 42 - 6x - 1 - y = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 15 & 6x + 9y = 45 \\ -6x - y = -5 & -6x - y = -5 \end{cases}$$

$$8y = 40 \rightarrow y = 5 \rightarrow 2x + 15 = 15 \rightarrow x = 0$$

Solución: $x = 0$, $y = 5$

$$\text{b) } \begin{cases} 2(x+2) - 3y + 1 = -3 \\ 2x + 3 + 2y + 14 = 19 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -8 & -2x + 3y = 8 \\ 2x + 2y = 2 & 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$5y = 10$$

$$y = 2 \rightarrow 2x - 6 = -8 \rightarrow 2x = -2 \rightarrow x = -1$$

Solución: $x = -1$, $y = 2$

17 ■■■ Resuelve.

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x(x - y) = 2y^2 - 8 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x = y - 3 \\ (y - 3)^2 + y^2 = 5 \end{cases} \rightarrow y^2 - 6y + 9 + y^2 - 5 = 0 \rightarrow 2y^2 - 6y + 4 = 0$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \rightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \begin{cases} y_1 = 1 \rightarrow x_1 = 1 - 3 = -2 \\ y_2 = 2 \rightarrow x_2 = 2 - 3 = -1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = -2$, $y_1 = 1$; $x_2 = -1$, $y_2 = 2$

$$\text{b) } \begin{cases} x = 1 - y \\ (1 - y)y + 2y = 2 \end{cases} \rightarrow y - y^2 + 2y = 2 \rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$y = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} y_1 = 1 \rightarrow x_1 = 1 - 1 = 0 \\ y_2 = 2 \rightarrow x_2 = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 0$, $y_1 = 1$; $x_2 = -1$, $y_2 = 2$

$$\text{c) } \begin{cases} y = 3 - 2x \\ x(3 - 2x) - (3 - 2x)^2 = 0 \end{cases} \rightarrow 3x - 2x^2 - 9 - 4x^2 - 12x = 0$$

$$-6x^2 + 15x - 9 = 0 \rightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{Si } x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 3 - 4 = -1$$

$$\text{Si } x_2 = 3 \rightarrow y_2 = 3 - 6 = -3$$

Soluciones: $x_1 = 2$, $y_1 = -1$; $x_2 = 3$, $y_2 = -3$

$$d) \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x \\ x\left(x + \frac{3}{2}x\right) = 2\left(-\frac{3}{2}x\right)^2 - 8 \rightarrow \frac{5}{2}x^2 = \frac{9}{2}x^2 - 8 \rightarrow -2x^2 = -8 \end{cases}$$

$$x^2 = 4 \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow y_1 = -\frac{3}{2} \cdot 2 = -3 \\ x_2 = -2 \rightarrow y_2 = -\frac{3}{2}(-2) = 3 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 2, y_1 = -3; x_2 = -2, y_2 = 3$

18 ■■■ Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción y comprueba que tienen cuatro soluciones:

$$a) \begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 35 \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 32 \\ x^2 - y^2 + x - y = 28 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^2 + 2y^2 + x + 1 = 0 \\ x^2 - 2y^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$$

$$\frac{2x^2}{2x^2} = 50 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = \pm 5$$

$$\text{Si } x = 5 \rightarrow 25 + y^2 = 41 \rightarrow y^2 = 16 \rightarrow y = \pm 4$$

$$\text{Si } x = -5 \rightarrow 25 + y^2 = 41 \rightarrow y^2 = 16 \rightarrow y = \pm 4$$

Soluciones: $x_1 = 5, y_1 = 4; x_2 = 5, y_2 = -4; x_3 = -5, y_3 = 4; x_4 = -5, y_4 = -4$

$$b) \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 35 \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\frac{4x^2}{4x^2} = 36 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$$

$$\text{Si } x = 3 \rightarrow 27 + 2y^2 = 35 \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2$$

$$\text{Si } x = -3 \rightarrow 27 + 2y^2 = 35 \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2$$

Soluciones: $x_1 = 3, y_1 = 2; x_2 = 3, y_2 = -2; x_3 = -3, y_3 = 2; x_4 = -3, y_4 = -2$

$$c) \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 32 \\ x^2 - y^2 + x - y = 28 \end{cases}$$

$$\frac{2x^2 + 2x}{2x^2 + 2x} = 60 \rightarrow x^2 + x = 30 \rightarrow x^2 + x - 30 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} = \frac{-1 \pm 11}{2} = \begin{cases} -6 \\ 5 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Si } x = -6 \rightarrow 36 + y^2 - 6 + y = 32 \rightarrow y^2 + y - 2 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Si } x = 5 \rightarrow 25 + y^2 + 5 + y = 32 \rightarrow y^2 + y - 2 = 0 \rightarrow y = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = -6, y_1 = -2; x_2 = -6, y_2 = 1; x_3 = 5, y_3 = -2; x_4 = 5, y_4 = 1$

$$d) \begin{cases} x^2 + 2y^2 + x + 1 = 0 \\ x^2 - 2y^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{2x^2}{2x^2} + 4x + 2 = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow (x + 1)^2 = 0 \rightarrow x = -1$$

Si $x = -1 \rightarrow 1 + 2y^2 - 1 + 1 = 0 \rightarrow 2y^2 = -1 \rightarrow$ No tiene solución.

Inecuaciones

19 ■■■ Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $2x + 7 < 3$

b) $3 - x \leq 9$

c) $3 \leq 2x + 2$

d) $3 - 2x \geq x - 9$

a) $2x < -4 \rightarrow x < -2$

Solución: $(-\infty, -2)$

b) $3 - x \leq 9 \rightarrow -x \leq 6 \rightarrow x \geq -6$

Solución: $[-6, +\infty)$

c) $2x \geq 1 \rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

Solución: $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

d) $-2x - x \geq -9 - 3 \rightarrow -3x \geq -12 \rightarrow 3x \leq 12 \rightarrow x \leq 4$

Solución: $(-\infty, 4]$

20 ■■■ Resuelve.

a) $\frac{7 - 3x}{2} < x + 1$

b) $\frac{x + 4}{3} + 3 \geq \frac{x + 10}{6}$

c) $2x - 2(3x - 5) < x$

d) $x - 1 - \frac{x - 1}{2} < 0$

a) $7 - 3x < 2x + 2 \rightarrow -5x < -5 \rightarrow 5x > 5 \rightarrow x > 1$

Solución: $(1, +\infty)$

b) $2x + 8 + 18 \geq x + 10 \rightarrow x \geq -16$

Solución: $[-16, +\infty)$

c) $2x - 6x + 10 < x \rightarrow -5x < -10 \rightarrow 5x > 10 \rightarrow x > 2$

Solución: $(2, +\infty)$

d) $2x - 2 - x + 1 < 0 \rightarrow x - 1 < 0 \rightarrow x < 1$

Solución: $(-\infty, 1)$

21 ■■■ Halla las soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones:

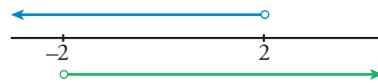
a) $\begin{cases} 2 - x > 0 \\ 2 + x > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 3 \leq x + 1 \\ 2x + 6 \geq x + 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{2x + 5}{3} < x - 1 \\ \frac{x}{3} - 1 < \frac{2x - 1}{5} \end{cases}$

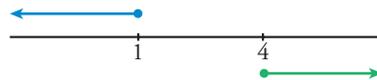
d) $\begin{cases} \frac{x + 13}{6} < \frac{39 - 2x}{18} \\ \frac{3x - 5}{4} < -1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2 - x > 0 \rightarrow -x > -2 \rightarrow x < 2 \\ 2 + x > 0 \rightarrow x > -2 \end{cases}$



Solución: $(-2, 2)$

b) $\begin{cases} 5x - 3 \leq x + 1 \rightarrow 4x \leq 4 \rightarrow x \leq 1 \\ 2x + 6 \geq x + 2 \rightarrow x \geq -4 \end{cases}$



No tiene solución.

c) $\begin{cases} \frac{2x + 5}{3} < x - 1 \rightarrow 2x + 5 < 3x - 3 \rightarrow -x < -8 \rightarrow x > 8 \\ \frac{x}{3} - 1 < \frac{2x - 1}{5} \rightarrow 5x - 15 < 6x - 3 \rightarrow -x < 12 \rightarrow x > -12 \end{cases}$



Solución: $(8, +\infty)$

d) $\begin{cases} 3x + 39 < 39 - 2x \rightarrow 5x < 0 \rightarrow x < 0 \\ 3x - 5 < -4 \rightarrow 3x < 1 \rightarrow x < 1/3 \end{cases}$



Solución: $(-\infty, 0)$

22 ■■■ Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 4 \leq 0$

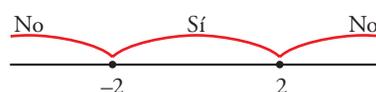
b) $x^2 - 9 > 0$

c) $x^2 - 4x < 0$

d) $x^2 + 3x > 0$

a) $x^2 - 4 \leq 0$

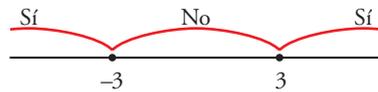
$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow (x + 2)(x - 2) = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$



Solución: $[-2, 2]$

b) $x^2 - 9 > 0$

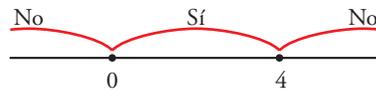
$$x^2 - 9 = 0 \rightarrow (x + 3)(x - 3) = 0 \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$



Solución: $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

c) $x^2 - 4x < 0$

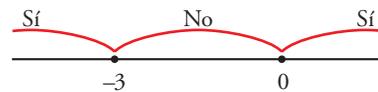
$$x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$



Solución: $(0, 4)$

d) $x^2 + 3x > 0$

$$x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(x + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$



Solución: $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$

23 ■■■ Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $(x - 1)(x - 5) < 0$

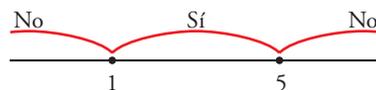
b) $(x + 2)(x - 3) > 0$

c) $(4 - x)(2 + x) \geq 0$

d) $2x(3 - x) \leq 0$

a) $(x - 1)(x - 5) < 0$

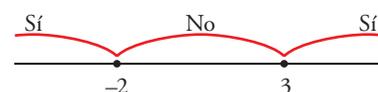
$$(x - 1)(x - 5) = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$$



Solución: $(1, 5)$

b) $(x + 2)(x - 3) > 0$

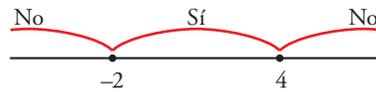
$$(x + 2)(x - 3) = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$



Solución: $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

$$c) (4 - x)(2 + x) \geq 0$$

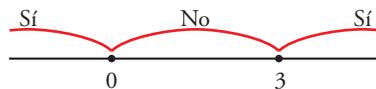
$$(4 - x)(2 + x) = 0 \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$$



Solución: $[-2, 4]$

$$d) 2x(3 - x) \leq 0$$

$$2x(3 - x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$



Solución: $(-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$

24 ■■■ Traduce a lenguaje algebraico:

- La mitad de un número menos 10 unidades es menor que 7.
- Si a los tres cuartos de un número le resto 2, obtengo más que si a su mitad le sumo 5.
- El producto de dos números consecutivos no supera a 8.
- El perímetro de un rectángulo cuya base mide 3 cm más que la altura es menor que 50 m.

$$a) \frac{x}{2} - 10 < 7$$

$$b) \frac{3}{4}x - 2 > \frac{x}{2} + 5$$

$$c) x(x + 1) \leq 8$$

$$d) 4x + 6 < 50$$

PÁGINA 76

PIENSA Y RESUELVE

25 ■■■ Resuelve estas ecuaciones de grado superior a dos en las que puedes despejar la incógnita:

$$a) x^3 - 64 = 0$$

$$b) \frac{625}{x} - x^3 = 0$$

$$c) \frac{3x}{4} + \frac{16}{9x^2} = 0$$

$$d) \frac{x}{8} - \frac{2}{81x^3} = 0$$

$$a) x^3 - 64 = 0 \rightarrow x^3 = 64 \rightarrow x = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4.$$

Solución: $x = 4$

$$b) \frac{625}{x} - x^3 = 0 \rightarrow 625 - x^4 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt[4]{625} = \pm 5$$

Soluciones: $x_1 = 5, x_2 = -5$

$$c) \frac{3x}{4} + \frac{16}{9x^2} = 0 \rightarrow 27x^3 + 64 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{64}{27}} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{Solución: } x = -\frac{4}{3}$$

$$d) \frac{x}{8} - \frac{2}{81x^3} = 0 \rightarrow 81x^4 - 16 = 0 \rightarrow x^4 = \frac{16}{81} \rightarrow x = \pm \frac{2}{3}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -\frac{2}{3}$$

26 ■■■ Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) \frac{2x}{x^2 - 1} = 2 + \frac{x}{x - 1}$$

$$b) 1 = \frac{3x}{x^2 - 9} - \frac{x}{2x - 6}$$

$$c) \frac{4 - x}{x^2 + 2x + 1} - \frac{2 - x}{x + 1} = 2$$

$$d) \frac{2x + 4}{x^2 - 5x} + \frac{x + 4}{x} = \frac{1}{x - 5}$$

$$a) 2x = 2(x^2 - 1) + x(x + 1)$$

$$2x = 2x^2 - 2 + x^2 + x \rightarrow 3x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{1 \pm 5}{6} = \begin{cases} 1 \rightarrow \text{No vale.} \\ -2/3 \end{cases}$$

$$\text{Solución: } x = -\frac{2}{3}$$

$$b) 2(x^2 - 9) = 6x - x(x + 3) \rightarrow 2x^2 - 18 = 6x - x^2 - 3x \rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x = 3 \rightarrow \text{No vale.} \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\text{Solución: } x = -2$$

$$c) 4 - x - (2 - x)(x + 1) = 2(x^2 + 2x + 1)$$

$$4 - x - 2x - 2 + x^2 + x = 2x^2 + 4x + 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 2x + 2 = 2x^2 + 4x \rightarrow x^2 + 6x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 0, x_2 = -6$$

$$d) 2x + 4 + (x + 4)(x - 5) = x \rightarrow 2x + 4 + x^2 - x - 20 = x \rightarrow x^2 - 16 = 0 \rightarrow x = \pm 4$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 4, x_2 = -4$$

27 ■■■ Resuelve.

a) $x + \sqrt{7 - 3x} = -1$

b) $\sqrt{x} + \sqrt{3x - 2} = 2$

c) $\sqrt{2x} + \sqrt{5x - 6} = 4$

d) $\sqrt{5x + 1} - \sqrt{x + 1} = 2$

🔗 Mira los ejercicios resueltos de la página 64.

a) $\sqrt{7 - 3x} = -1 - x \rightarrow 7 - 3x = 1 + x^2 + 2x \rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2} = \begin{cases} -6 \\ 1 \end{cases}$$

Comprobación:

$$x = -6 \rightarrow -6 + \sqrt{7 - 18} = -1$$

$$x = 1 \rightarrow 1 + \sqrt{7 - 3} = 3 \neq -1 \rightarrow \text{No vale.}$$

Solución: $x = -6$

b) $\sqrt{3x - 2} = 2 - \sqrt{x} \rightarrow 3x - 2 = 4 + x - 4\sqrt{x} \rightarrow (4\sqrt{x})^2 = (6 - 2x)^2 \rightarrow$

$$\rightarrow 16x = 36 + 4x^2 - 24x \rightarrow 4x^2 - 40x + 36 = 0 \rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} 9 \\ 1 \end{cases}$$

Comprobación:

$$x = 9 \rightarrow \sqrt{25} + \sqrt{9} \neq 2 \rightarrow \text{No vale.}$$

$$x = 1 \rightarrow \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$$

Solución: $x = 1$

c) $\sqrt{5x - 6} = 4 - 2\sqrt{x} \rightarrow 5x - 6 = 16 + 2x - 8\sqrt{2x} \rightarrow (8\sqrt{2x})^2 = (22 - 3x)^2 \rightarrow$

$$\rightarrow 128x = 484 + 9x^2 - 132x \rightarrow 9x^2 - 260x + 484 = 0$$

$$x = \frac{260 \pm 224}{18} = \begin{cases} 242/9 \\ 2 \end{cases}$$

Comprobación:

$$x = \frac{242}{9} \rightarrow \sqrt{\frac{1156}{9}} + \sqrt{\frac{484}{9}} = \frac{34}{3} + \frac{22}{3} = \frac{56}{3} \neq 4 \rightarrow \text{No vale.}$$

$$x = 2 \rightarrow \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$$

Solución: $x = 2$

d) $\sqrt{5x + 1} = 2 + \sqrt{x + 1} \rightarrow 5x + 1 = 4 + x + 1 + 4\sqrt{x + 1} \rightarrow$

$$\rightarrow 4x - 4 = 4\sqrt{x + 1} \rightarrow \sqrt{x + 1} = x - 1 \rightarrow x + 1 = x^2 - 2x + 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 3x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Comprobación:

$$x = 0 \rightarrow \sqrt{1} - \sqrt{1} = 0 \neq 2 \rightarrow \text{No vale.}$$

$$x = 3 \rightarrow \sqrt{16} - \sqrt{4} = 2$$

Solución: $x = 3$

28 ■■■ Resuelve.

a) $(9x^2 - 4)(2x - 3)^2$

b) $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$

c) $3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = 0$

d) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0$

$$a) (9x^2 - 4)(2x - 3)^2 = 0 \begin{cases} 9x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{4}{9} \rightarrow x_1 = \frac{2}{3}; x_2 = \frac{2}{3} \\ (2x - 3)^2 = 0 \rightarrow 2x - 3 = 0 \rightarrow x_3 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{3}{2}$

$$b) \begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

La solución es $x = 2$.

$$c) \begin{array}{c|cccc} & 3 & -10 & 9 & -2 \\ 1 & & 3 & -7 & 2 \\ \hline & 3 & -7 & 2 & 0 \end{array}$$

$$3x^2 - 7x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{7 \pm 5}{6} \begin{cases} x = 2 \\ x = 1/3 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = \frac{1}{3}$

$$d) \begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & -9 & 10 \\ 1 & & 2 & -1 & -10 \\ \hline & 2 & -1 & -10 & 0 \end{array}$$

$$2x^2 - x - 10 = 0 \rightarrow x = \frac{1 + 9}{4} \begin{cases} x = -2 \\ x = 5/2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = \frac{5}{2}$

29 ■■■ Resuelve y comprueba las soluciones.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{20} \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2\sqrt{x+1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} y = 2 - x \\ 3y + 3x = -2xy \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 - x \\ 3(2 - x) + 3x = -2x(2 - x) \end{cases}$$

$$6 - 3x + 3x = -4x + 2x^2 \rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = -1 \rightarrow y = 2 + 1 = 3 \\ x = 3 \rightarrow y = 2 - 3 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = -1, y_1 = 3; x_2 = 3, y_2 = -1$$

$$\text{b) } \begin{cases} 20y + 20x = xy \\ x = 3 - 2y \end{cases} \rightarrow 20y + 20(3 - 2y) = (3 - 2y)y$$

$$20y + 60 - 40y = 3y - 2y^2 \rightarrow 2y^2 - 23y + 60 = 0 \rightarrow y = \frac{23 \pm 7}{4} \begin{cases} x = 4 \\ x = 15/2 \end{cases}$$

$$\text{Si } y = 4 \rightarrow x = 3 - 8 = -5$$

$$\text{Si } y = \frac{15}{2} \rightarrow x = 3 - 2 \cdot \frac{15}{2} = -12$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = -5, y_1 = 4; x_2 = -12, y_2 = \frac{15}{2}$$

$$\text{c) } \begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases} \rightarrow \sqrt{y^2 - 2y + 1} + y = 5 \rightarrow \sqrt{(y-1)^2} + y = 5 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2y = 6 \rightarrow y = 3 \rightarrow x = 9 - 6 + 1 = 4$$

$$\text{Solución: } x = 4, y = 3$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2\sqrt{x+1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \rightarrow y = \frac{2x-1}{3}$$

$$2\sqrt{x+1} = \frac{2x-1}{3} + 1 \rightarrow 2\sqrt{x+1} = \frac{2x-1+3}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow (2\sqrt{x+1})^2 = \left(\frac{2x+2}{3}\right)^2 \rightarrow 4(x+1) = \frac{4x^2+8x+4}{9} \rightarrow$$

$$\rightarrow 36x + 36 = 4x^2 + 8x + 4 \rightarrow 4x^2 - 28x - 32 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 7x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{7 \pm 9}{2} \begin{cases} x = -1 \\ x = 8 \end{cases}$$

$$\text{Si } x = -1 \rightarrow y = -1$$

$$\text{Si } x = 8 \rightarrow y = \frac{16-1}{3} = 5$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = -1, y_1 = -1; x_2 = 8, y_2 = 5$$

30 ■■■ Resuelve.

a)
$$\begin{cases} xy = 15 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} xy = 12 \\ x^2 - 5y^2 = 16 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} xy = 4 \\ (x + y)^2 = 25 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{82}{9} \\ xy = -1 \end{cases}$$

a)
$$\begin{cases} y = \frac{15}{x} \\ x^2 + \left(\frac{15}{x}\right)^2 = 34 \rightarrow x^4 + 225 = 34x^2 \end{cases}$$

Hacemos el cambio $x^2 = z \rightarrow z^2 - 34z + 225 = 0 \rightarrow z = \frac{34 \pm 16}{2} < \frac{25}{9}$

Si $z = 25 \begin{cases} x = 5 \rightarrow y = 3 \\ x = -5 \rightarrow y = -3 \end{cases}$

Si $z = 9 \begin{cases} x = 3 \rightarrow y = 5 \\ x = -3 \rightarrow y = -5 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 5, y_1 = 3; x_2 = -5, y_2 = -3; x_3 = 3, y_3 = 5; x_4 = -3, y_4 = -5$

b)
$$\begin{cases} y = \frac{12}{x} \\ x^2 - 5\left(\frac{12}{x}\right)^2 = 16 \rightarrow x^2 - \frac{720}{x^2} = 16 \rightarrow x^4 - 16x^2 - 720 = 0 \end{cases}$$

Cambio: $x^2 = z \rightarrow z^2 - 16z - 720 = 0 \rightarrow z = \frac{16 \pm 56}{2} = \begin{cases} 36 \\ -20 \text{ (no vale)} \end{cases}$

Si $z = 36 \begin{cases} x = 6 \rightarrow y = 2 \\ x = -6 \rightarrow y = -2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 6, y_1 = 2; x_2 = -6, y_2 = -2$

c)
$$\begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ \left(x + \frac{4}{x}\right)^2 = 25 \rightarrow \left(\frac{x^2 + 4}{x}\right)^2 = 25 \rightarrow x^4 + 8x^2 + 16 = 25x^2 \rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow x^4 - 17x^2 + 16 = 0. \text{ Hacemos el cambio } x^2 = z:$$

$$z^2 - 17z + 16 = 0 \rightarrow z = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 64}}{2} = \frac{17 \pm 15}{2} = \begin{cases} 16 \\ 1 \end{cases}$$

Si $z = 16 \begin{cases} x = 4 \rightarrow y = 1 \\ x = -4 \rightarrow y = -1 \end{cases}$

Si $z = 1 \begin{cases} x = 1 \rightarrow y = 4 \\ x = -1 \rightarrow y = -4 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 4, y_1 = 1; x_2 = -4, y_2 = -1; x_3 = 1, y_3 = 4; x_4 = -1, y_4 = -4$

$$d) \begin{cases} x^2 + \left(-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{82}{9} \rightarrow x^4 + 1 - \frac{82}{9}x^2 = 0 \rightarrow 9x^4 - 82x^2 + 9 = 0 \\ y = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

Cambio: $x^2 = z$

$$9z^2 - 82z + 9 = 0 \rightarrow z = \frac{82 \pm \sqrt{6724 - 324}}{18} = \frac{82 \pm 80}{18} = \begin{cases} 9 \\ 1/9 \end{cases}$$

$$\text{Si } z = 9 \begin{cases} x = 3 \rightarrow y = -1/3 \\ x = -3 \rightarrow y = 1/3 \end{cases}$$

$$\text{Si } z = \frac{1}{9} \begin{cases} x = 1/3 \rightarrow y = -3 \\ x = -1/3 \rightarrow y = 3 \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 3, y_1 = -\frac{1}{3}; x_2 = -3, y_2 = \frac{1}{3}; x_3 = \frac{1}{3}, y_3 = -3; x_4 = -\frac{1}{3}, y_4 = 3$$

31 ■■■ Resuelve.

$$a) \begin{cases} \sqrt{x} = 4 - y \\ y^2 = 4 + x \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 0 \\ x^2 + y^2 - y = 0 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} y = 4 - \sqrt{x} \\ (4 + \sqrt{x})^2 = 4 + x \rightarrow 16 + x - 8\sqrt{x} = 4 + x \rightarrow 8\sqrt{x} = 12 \rightarrow \\ \rightarrow 2\sqrt{x} = 3 \rightarrow x = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\text{Si } x = \frac{9}{4} \rightarrow y = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{9}{4}, y = \frac{5}{2}$$

$$b) \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 0 \\ -x^2 - y^2 + y = 0 \end{cases}$$

$$2x + y = 0 \rightarrow y = -2x \text{ (lo sustituimos en la 1.ª ecuación)}$$

$$x^2 + (-2x)^2 + 2x = 0 \rightarrow 5x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(5x + 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2/5 \end{cases}$$

$$\text{Si } x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$\text{Si } x = -\frac{2}{5} \rightarrow y = \frac{4}{5}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 0, y_1 = 0; x_2 = -\frac{2}{5}, y_2 = \frac{4}{5}$$

32 ■■■ Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{5x-16}{6} + \frac{x+8}{12} < \frac{x+1}{3}$

b) $\frac{2-x}{4} - \frac{2+x}{2} > \frac{2x+7}{4} - \frac{2x+5}{3}$

c) $(x+1)^2 - (x-1)^2 + 12 \geq 0$

d) $2(x-11) - 3x(1-3x) \leq (3x+2)^2$

a) $2(5x-16) + (x+8) < 4(x+1)$

$$10x - 32 + x + 8 < 4x + 4 \rightarrow 7x < 28 \rightarrow x < 4$$

Solución: $(-\infty, 4)$

b) $3(2-x) - 6(2+x) > 3(2x+7) - 4(2x+5)$

$$6 - 3x - 12 - 6x > 6x + 21 - 8x - 20$$

$$-7x > 7 \rightarrow 7x < -7 \rightarrow x < -1$$

Solución: $(-\infty, -1)$

c) $x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 + 12 \geq 0$

$$4x + 12 \geq 0 \rightarrow 4x \geq -12 \rightarrow x \geq -3$$

Solución: $[-3, +\infty)$

d) $2x - 22 - 3x + 9x^2 \leq 9x^2 + 12x + 4$

$$-13x \leq 26 \rightarrow 13x \geq -26 \rightarrow x \geq -2$$

Solución: $[-2, +\infty)$

33 ■■■ Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + 2x - 3 > 0$

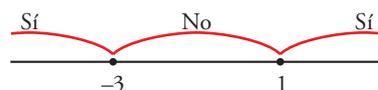
b) $x^2 - 3x - 10 \leq 0$

c) $x^2 - 4x - 5 < 0$

d) $2x^2 + 9x - 5 \geq 0$

a) $x^2 + 2x - 3 > 0$

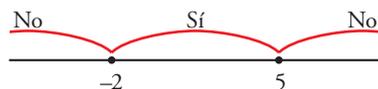
$$x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$



Solución: $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

b) $x^2 - 3x - 10 \leq 0$

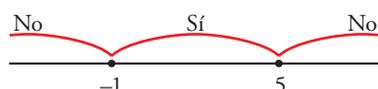
$$x^2 - 3x - 10 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$$



Solución: $[-2, 5]$

c) $x^2 - 4x - 5 < 0$

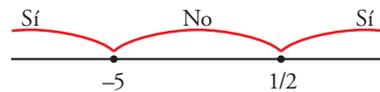
$$x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$$



Solución: $(-1, 5)$

$$d) 2x^2 + 9x - 5 \geq 0$$

$$2x^2 + 9x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 40}}{4} = \frac{-9 \pm 11}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -5 \end{cases}$$



$$\text{Solución: } (-\infty, -5] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

34 ■■■ Resuelve.

$$a) -x^2 + 3x - 2 \geq 0$$

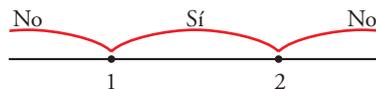
$$b) -x^2 + 2x + 3 \leq 0$$

$$c) x^2 - 2x - 7 > 5 - x$$

$$d) x^2 < \frac{x+7}{6}$$

$$a) -x^2 + 3x - 2 \geq 0$$

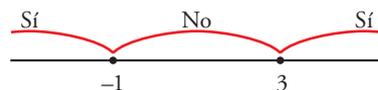
$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$



$$\text{Solución: } [1, 2]$$

$$b) -x^2 + 2x + 3 \leq 0$$

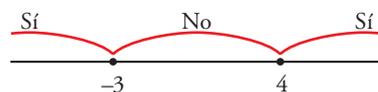
$$x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$



$$\text{Solución: } (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

$$c) x^2 - 2x - 7 > 5 - x \rightarrow x^2 - x - 12 > 0$$

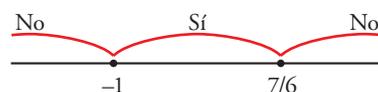
$$x^2 - x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$$



$$\text{Solución: } (-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$$

$$d) x^2 < \frac{x+7}{6} \rightarrow 6x^2 < x+7 \rightarrow 6x^2 - x - 7 < 0$$

$$6x^2 - x - 7 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 168}}{12} = \frac{1 \pm 13}{12} = \begin{cases} 7/6 \\ -1 \end{cases}$$



$$\text{Solución: } \left(-1, \frac{7}{6}\right)$$

35 ■■■ Resuelve las inecuaciones siguientes:

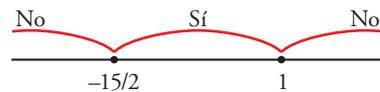
a) $3x(x+4) - x(x-1) < 15$

b) $2x(x+3) - 2(3x+5) + x > 0$

c) $\frac{x^2-9}{5} - \frac{x^2-4}{15} < \frac{1-2x}{3}$

a) $3x^2 + 12x - x^2 + x - 15 < 0 \rightarrow 2x^2 + 13x - 15 < 0$

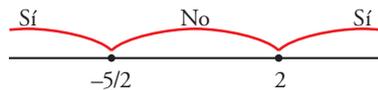
$$2x^2 + 13x - 15 = 0 \rightarrow x = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 120}}{4} = \frac{-13 \pm 17}{4} = \left\langle \begin{array}{l} -15/2 \\ 1 \end{array} \right.$$



Solución: $\left(-\frac{15}{2}, 1\right)$

b) $2x^2 + 6x - 6x - 10 + x > 0 \rightarrow 2x^2 + x - 10 > 0$

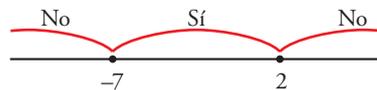
$$2x^2 + x - 10 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{4} = \frac{-1 \pm 9}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ -5/2 \end{array} \right.$$



Solución: $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup (2, +\infty)$

c) $3x^2 - 27 - x^2 + 4 < 5 - 10x \rightarrow 2x^2 + 10x - 28 < 0 \rightarrow x^2 + 5x - 14 < 0$

$$x^2 + 5x - 14 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2} = \frac{-5 \pm 9}{2} = \left\langle \begin{array}{l} -7 \\ 2 \end{array} \right.$$



Solución: $(-7, 2)$

36 ■■■ Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a)
$$\begin{cases} \frac{x+2}{4} < \frac{x}{2} - 3 \\ \frac{8-x}{3} < \frac{1+x}{2} - 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{2x+2}{3} > \frac{3x-7}{6} \\ \frac{2x-1}{4} + 2x < \frac{2x-9}{4} \end{cases}$$

a)
$$\begin{cases} x+2 < 2x-12 \rightarrow 14 < x \rightarrow x > 14 \\ 16-2x < 3+3x-6 \rightarrow 19 < 5x \rightarrow x > 19/5 \end{cases}$$



Solución: $(14, +\infty)$

b)
$$\begin{cases} 3x-3+4x+4 > 3x-7 \rightarrow 4x > -8 \rightarrow x > -2 \\ 2x-1+8x < 2x-9 \rightarrow 8x < -8 \rightarrow x < -1 \end{cases}$$



Solución: $(-2, -1)$

37 ■■■ Algunas inecuaciones no tienen solución y otras tienen por solución cualquier número. Busca entre las siguientes las que son de estos tipos.

a) $x^2 + 4 > 3$

b) $x^2 + x + 2 < 0$

c) $x^2 + 7 < 5x$

d) $x^2 + 4x + 4 > 0$

a) $x^2 + 4 > 3 \rightarrow x^2 > -1$

Solución: $(-\infty, +\infty)$

b) $x^2 + x + 2 < 0$

No tiene solución.

c) $x^2 + 7 < 5x \rightarrow x^2 - 5x + 7 < 0$

No tiene solución.

d) $x^2 + 4x + 4 > 0 \rightarrow (x + 2)^2 > 0$

Solución: $(-\infty, +\infty)$

38 ■■■ Comprueba que estos dos sistemas de inecuaciones no tienen solución.

a)
$$\begin{cases} 8x + 7 < 16 - x \\ -3x + 5 < 2x \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x + 5 < 2x - 3 \\ \frac{x + 3}{7} < x - 3 \end{cases}$$

a)
$$\begin{cases} 8x + 7 < 16 - x \rightarrow 9x < 9 \rightarrow x < 1 \\ -3x + 5 < 2x \rightarrow 5 < 5x \rightarrow x > 1 \end{cases}$$



No tiene solución.

b)
$$\begin{cases} 3x + 5 < 2x - 3 \rightarrow x < -8 \\ x + 3 < 7x - 21 \rightarrow 24 < 6x \rightarrow x > 4 \end{cases}$$



No tiene solución.

PÁGINA 77

Problemas de ecuaciones y sistemas de ecuaciones

39 ■■■ Una empresa de alquiler de coches cobra por día y por kilómetros recorridos. Un cliente pagó 160 € por 3 días y 400 km, y otro pagó 175 € por 5 días y 300 km. Averigua cuánto cobran por día y por kilómetro.

$x \leftrightarrow$ días $y \leftrightarrow$ kilómetros recorridos

$$\begin{cases} 3x + 400y = 160 \\ 5x + 300y = 175 \end{cases} \quad \begin{cases} 15x + 2000y = 800 \\ -15x - 900y = -525 \end{cases}$$

$$\hline 1100y = 275 \rightarrow y = 0,25$$

$$3x + 0,25 \cdot 400 = 160 \rightarrow 3x = 60 \rightarrow x = 20$$

La empresa cobra 20 € por día y 0,25 € por cada kilómetro recorrido.

- 40** ■■■ Un inversor compra dos cuadros por 2 650 €. Al cabo de dos años, los vende por 3 124 € ganando en uno de ellos un 20% y en el otro un 15%. ¿Cuánto le costó cada cuadro?

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2\,650 \\ 1,2x + 1,15y = 3\,124 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 2\,650 - y \\ 1,2(2\,650 - y) + 1,15y = 3\,124 \end{array}$$

$$1,2(2\,650 - y) + 1,15y = 3\,124 \rightarrow 3\,180 - 0,05y = 3\,124 \rightarrow y = 1\,120$$

$$x = 2\,650 - 1\,120 = 1\,530$$

El valor de los cuadros es de 1 530 € y de 1 120 €.

- 41** ■■■ Un joyero tiene dos lingotes de oro, uno con un 80% de pureza y otro con un 95%. ¿Cuánto debe fundir de cada uno para obtener un lingote de 5 kg con un 86% de pureza?

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,8x + 0,95y = 0,86(x + y) \\ x + y = 5 \rightarrow x = 5 - y \end{array} \right.$$

$$0,8(5 - y) + 0,95y = 0,86(5 - y + y) \rightarrow 4 - 0,8y + 0,95y = 4,3 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0,15y = 0,3 \rightarrow y = 2 \rightarrow x = 3$$

Debe fundir 3 kg del de 80% de pureza con 2 kg del lingote que tiene un 95% de pureza.

- 42** ■■■ Un comerciante compra dos motocicletas por 3 000 € y las vende por 3 330 €. Calcula cuánto pagó por cada una si en la venta de la primera ganó un 25% y en la de la segunda perdió un 10%.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 3\,000 \\ 1,25x + 0,9y = 3\,330 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 3\,000 - x \\ 1,25x + 0,9(3\,000 - x) = 3\,330 \end{array}$$

$$1,25x + 2\,700 - 0,9x = 3\,330 \rightarrow 0,35x = 630 \rightarrow x = 1\,800$$

$$y = 3\,000 - 1\,800 = 1\,200$$

Por una pagó 1 800 €, y por la otra, 1 200 €.

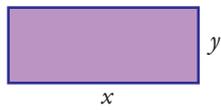
- 43** ■■■ Por la mezcla de 5 kg de pintura verde y 3 kg de pintura blanca he pagado 69 €. Calcula el precio de un kilogramo de pintura blanca y de pintura verde sabiendo que si mezclase un kilogramo de cada una el precio de la mezcla sería 15 €.

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 3y = 69 \\ x + y = 15 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5x + 3y = 69 \\ -3x - 3y = -45 \\ \hline 2x = 24 \rightarrow x = 12 \end{array}$$

$$y = 15 - x \rightarrow y = 15 - 12 = 3$$

La pintura verde cuesta 12 € el kilogramo, y la blanca, 3 €.

- 44** ■■■ Halla las dimensiones de un rectángulo del que conocemos su perímetro, 34 m, y su área, 60 m².



$$\left. \begin{array}{l} x + y = 17 \\ xy = 60 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 17 - x \\ x(17 - x) = 60 \rightarrow 17x - x^2 - 60 = 0 \end{array}$$

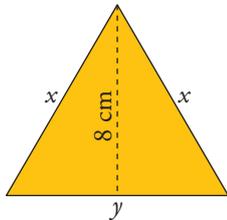
$$x^2 - 17x + 60 = 0 \rightarrow x = \frac{17 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2} = \begin{cases} 12 \\ 5 \end{cases}$$

Si $x = 12 \rightarrow y = 5$

Si $x = 5 \rightarrow y = 12$

Las dimensiones del rectángulo son 5 m y 12 m.

- 45** ■■■ Un triángulo isósceles mide 32 cm de perímetro y la altura correspondiente al lado desigual mide 8 cm. Calcula los lados del triángulo.



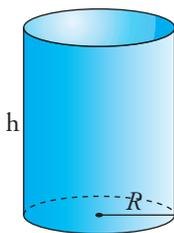
$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 32 \\ x^2 - \frac{y^2}{4} = 64 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 32 - 2x \\ 4x^2 + (32 - 2x)^2 = 256 \end{array}$$

$$4x^2 - 1024 + 128x - 4x^2 = 256 \rightarrow 128x = 1280 \rightarrow x = 10 \text{ cm}$$

$$y = 32 - 2 \cdot 10 = 12 \text{ cm}$$

Los lados iguales miden 10 cm, y el lado desigual, 12 cm.

- 46** ■■■ El área total de un cilindro es 112π cm², y entre el radio y la altura suman 14 cm. Halla su volumen.



$$\left. \begin{array}{l} 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 112\pi \\ R + h = 14 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \pi Rh + \pi R^2 = 56\pi \rightarrow Rh + R^2 = 56 \\ h = 14 - R \end{array}$$

$$R(14 - R) + R^2 = 56 \rightarrow 14R - R^2 + R^2 = 56 \rightarrow R = 4 \text{ cm}$$

$$h = 14 - 4 = 10 \text{ cm}$$

$$V_{\text{CILINDRO}} = \pi R^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 10 = 160\pi \text{ cm}^3$$

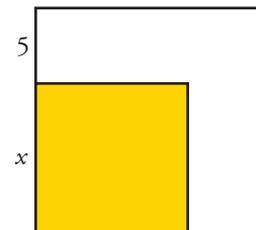
- 47** ■■■ Si el lado de un cuadrado aumenta 5 cm, su área se multiplica por 4. ¿Cuál era el lado inicial del cuadrado?

$$(x + 5)^2 = 4x^2 \rightarrow x^2 + 10x + 25 - 4x^2 = 0 \rightarrow$$

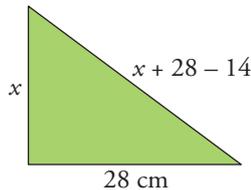
$$\rightarrow 3x^2 - 10x - 25 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 300}}{6} = \frac{10 \pm 20}{6} = \begin{cases} 5 \\ -5/3 \end{cases} \text{ no vale}$$

La longitud del lado inicial es de 5 cm.



- 48** ■■■ Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 28 cm y la hipotenusa es 14 cm menor que la suma de los dos catetos. Calcula el cateto desconocido.

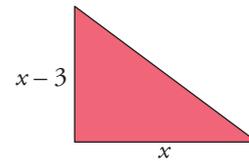


$$(x + 14)^2 = x^2 + 28^2 \rightarrow x^2 + 28x + 196 = x^2 + 784 \rightarrow$$

$$\rightarrow 28x = 588 \rightarrow x = 21$$

Los catetos miden 21 cm y 28 cm, y la hipotenusa, 35 cm.

- 49** ■■■ El perímetro de un triángulo rectángulo es 36 m y un cateto mide 3 cm menos que el otro. Halla los lados del triángulo.



$$x + (x - 3) + \sqrt{(x - 3)^2 + x^2} = 36$$

$$2x + \sqrt{2x^2 - 6x + 9} = 39 \rightarrow \sqrt{2x^2 - 6x + 9} = 39 - 2x$$

$$2x^2 - 6x + 9 = 1521 + 4x^2 - 156x$$

$$2x^2 - 150x + 1512 = 0 \rightarrow x^2 - 75x + 756 = 0$$

$$x = \frac{75 \pm \sqrt{5625 - 3024}}{2} = \frac{75 \pm 51}{2} = \begin{cases} 63 \\ 12 \end{cases} \rightarrow \text{No vale.}$$

$$\text{Hipotenusa} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$$

Los catetos miden 12 cm y 9 cm, y la hipotenusa, 15 cm.

- 50** ■■■ Una persona tarda 3 horas más que otra en hacer el mismo trabajo. Si lo hacen entre las dos, tardan 2 horas. ¿Cuánto tarda cada una por separado?

☞ Si una tarda x horas en hacer todo el trabajo, en 1 hora hará $1/x$ de este.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 3} = \frac{1}{2} \rightarrow 2(x + 3) + 2x = x(x + 3) \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x + 6 + 2x = x^2 + 3x \rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases} \rightarrow \text{No vale.}$$

Una tarda 3 h, y otra, 6 h.

- 51** ■■■ Un grifo tarda el doble de tiempo que otro en llenar un cubo de agua. Si abrimos los dos, el cubo se llena en 3 minutos. ¿Cuánto tarda cada uno por separado?

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{3} \rightarrow 6 + 3 = 2x \rightarrow x = 4,5$$

Uno tarda 4,5 minutos, y el otro, 9 minutos.

- 52** ■■■ Un grupo de amigos alquila una furgoneta por 490 € para hacer un viaje. A última hora se apuntan dos más y así se devuelven 28 € a cada uno de los otros. ¿Cuántos fueron de excursión y cuánto pagó cada uno?

x → número de amigos

y → cantidad que paga cada uno

$$\left. \begin{array}{l} xy = 490 \\ (x+2)(y-28) = 490 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} xy = 490 \\ xy - 28x + 2y - 56 = 490 \end{array} \right\} \quad -28x + 2y - 56 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} xy = 490 \\ y = 28 + 14x \end{array} \right\} \quad x(28 + 14x) = 490 \rightarrow 28x + 14x^2 - 490 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 35 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 144}}{2} = \frac{-2 \pm 12}{2} = \begin{cases} 5 \\ -7 \end{cases} \rightarrow \text{No vale.}$$

Al principio eran 5 amigos. Ahora son 7.

$$490 : 7 = 70 \text{ €}$$

Son 7 amigos y cada uno paga 70 €.

- 53** ■■■ Un comerciante quiere vender por 60 000 € los ordenadores que tiene en su almacén. Pero se le estropean dos y tiene que vender los otros 50 € más caros para recaudar lo mismo. ¿Cuántos ordenadores tenía y a qué precio los vendió?

x → número de ordenadores

y → precio de cada ordenador

$$\left. \begin{array}{l} xy = 60\,000 \\ (x-2)(y+50) = 60\,000 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} xy = 60\,000 \\ xy + 50x - 2y - 100 = 60\,000 \end{array} \right\} \quad 50x - 2y - 100 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} xy = 60\,000 \\ 25x - y - 50 = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x(25x - 50) - 60\,000 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 2\,400 = 0 \\ y = 25x - 50 \end{array} \right\}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 9\,600}}{2} = \frac{2 \pm 98}{2} = \begin{cases} 50 \text{ (Ahora serán 48 ordenadores).} \\ -48 \text{ No vale.} \end{cases}$$

$$60\,000 : 48 = 1\,250$$

Vende 48 ordenadores a 1 250 € cada uno.

PÁGINA 78

- 54** ■■■ Un transportista va a una ciudad que está a 300 km de distancia. Al volver, su velocidad media ha sido superior en 10 km/h a la velocidad de ida, y ha tardado una hora menos. Calcula las velocidades y los tiempos empleados a la ida y a la vuelta.

$$\left. \begin{array}{l} vt = 300 \\ (v+10)(t-1) = 300 \end{array} \right\} \quad vt + 10t - v - 10 = 300$$

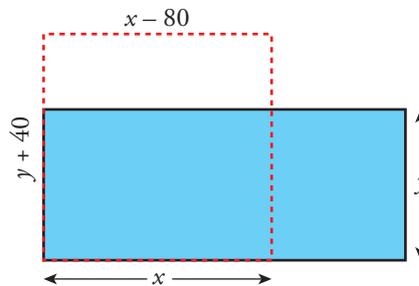
$$\left. \begin{array}{l} vt = 300 \\ 10t - v - 10 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (10t - 10)t = 300 \rightarrow 10t^2 - 10t - 300 = 0 \rightarrow t^2 - t - 30 = 0 \\ v = 10t - 10 \end{array}$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} = \frac{1 \pm 11}{2} \begin{cases} 6 \\ -5 \text{ No vale.} \end{cases}$$

$$300 : 6 = 50; \quad 300 : 5 = 60$$

A la ida va a 50 km/h y tarda 6 horas. A la vuelta va a 60 km/h y tarda 5 horas.

- 55** ■■■ Tenemos una parcela rectangular. Si su base disminuye en 80 m y su altura aumenta en 40 m, se convierte en un cuadrado. Si disminuye en 60 m su base y su altura aumenta en 20 m, entonces su área disminuye en 400 m². ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?



$$\left. \begin{array}{l} x - 80 = y + 40 \\ (x - 60)(y + 20) = xy - 400 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = y + 120 \\ xy - 60y + 20x - 1200 = xy - 400 \end{array}$$

$$-60y + 20(y + 120) - 1200 = -400 \rightarrow -40y = -1600 \rightarrow y = 40$$

$$x = 40 + 120 = 160$$

La parcela tiene 160 m de base y 40 m de altura.

- 56** ■■■ Halla las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 13 m, y su área, 60 m².

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 13^2 \\ xy = 60 \end{array} \right\} y = 60/x$$

$$x^2 + \frac{3600}{x^2} = 169 \rightarrow x^4 + 3600 - 169x^2 = 0$$

Cambio: $x^2 = z$

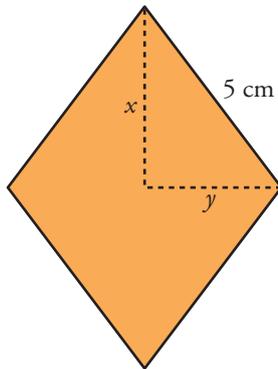
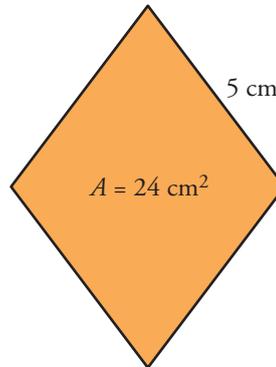
$$z^2 - 169z + 3600 = 0 \rightarrow z = \frac{169 \pm \sqrt{28561 - 14400}}{2} = \frac{169 \pm 119}{2} = \begin{cases} 144 \\ 25 \end{cases}$$

$$z = 144 \rightarrow x = 12 \rightarrow y = 5$$

$$z = 25 \rightarrow x = 5 \rightarrow y = 12$$

Las dimensiones del rectángulo son 5 m y 12 m.

- 57** ■■■ El lado de un rombo mide 5 cm, y su área, 24 cm². Calcula la longitud de sus diagonales.



$$\left. \begin{array}{l} \frac{2x \cdot 2y}{2} = 24 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = \frac{12}{x} \\ x^2 + \frac{576}{x^2} = 25 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^4 + 144 - 25x^2 = 0 \quad (\text{cambio } x^2 = z)$$

$$z^2 - 25z + 144 = 0$$

$$z = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} = \begin{cases} 16 \\ 9 \end{cases}$$

$$z = 16 \rightarrow x = 4 \rightarrow y = 3$$

$$z = 9 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = 4$$

Las diagonales del rombo miden 6 cm y 8 cm.

- 58** ■■■ La suma de las dos cifras de un número es 8. Si al número se le añaden 18 unidades, el número resultante está formado por las mismas cifras en orden inverso. ¿Cuál es ese número?

$$\text{Número} \rightarrow \boxed{x} \boxed{y} \rightarrow y + 10x$$

$$\text{Número inverso} \rightarrow \boxed{y} \boxed{x} \rightarrow x + 10y$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 8 \\ y + 10x + 18 = x + 10y \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 8 - y \\ -9y + 9(8 - y) + 18 = 0 \end{array} \rightarrow -18y = -90 \rightarrow y = 5$$

$$y = 5 \rightarrow x = 3$$

El número es el 35.

- 59** ■■■ Las dos cifras de un número se diferencian en una unidad. Si dividimos dicho número entre el que resulta de invertir el orden de sus cifras, el cociente es 1,2. ¿Cuál es el número?

$$\text{Número} \rightarrow \boxed{x}\boxed{y} \rightarrow y + 10x$$

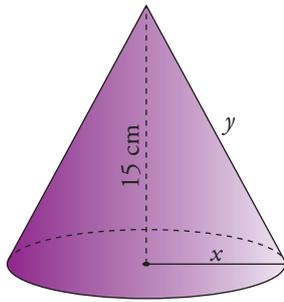
$$\text{Número inverso} \rightarrow x + 10y$$

$$\frac{x - y = 1}{\frac{10x + y}{10y + x} = 1,2} \left\{ \begin{array}{l} x = y + 1 \\ 10(y + 1) + y = 1,2(10y + y + 1) \end{array} \right.$$

$$10y + 10 + y = 12y + 1,2y + 1,2 \rightarrow 2,2y = 8,8 \rightarrow y = 4 \rightarrow x = 5$$

El número buscado es el 54.

- 60** ■■■ Halla el radio y la generatriz de un cono que tiene 15 cm de altura y cuya área lateral es de $136\pi \text{ cm}^2$.



$$\left. \begin{array}{l} y^2 - x^2 = 15^2 \\ \pi xy = 136\pi \end{array} \right\} y = \frac{136}{x}$$

$$\frac{18496}{x^2} - x^2 = 225 \rightarrow 18496 - x^4 - 225x^2 = 0$$

$$\text{Cambio: } x^2 = z$$

$$z^2 + 225z - 18496 = 0$$

$$z = \frac{-225 \pm \sqrt{50625 + 73984}}{2} = \frac{-225 \pm 353}{2} = \begin{cases} 64 \\ -280 \end{cases} \text{ No vale.}$$

$$z = 64 \rightarrow x = 8 \rightarrow y = \frac{136}{8} = 17$$

El radio del cono mide 8 cm, y la generatriz, 17 cm.

Problemas de inecuaciones

- 61** ■■■ En un examen de 40 preguntas te dan dos puntos por cada acierto y te restan 0,5 puntos por cada fallo. ¿Cuántas preguntas hay que contestar bien para obtener como mínimo 40 puntos, si es obligatorio responder a todas?

$$\text{Aciertos} \rightarrow x; \text{ fallos} \rightarrow 40 - x$$

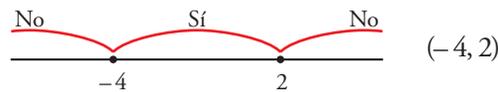
$$2x - 0,5(40 - x) \geq 40 \rightarrow 2x - 20 + 0,5x \geq 40 \rightarrow 2,5x \geq 60 \rightarrow x \geq 24$$

Hay que responder bien, como mínimo, a 24 preguntas.

- 62** ■■■ El producto de un número entero por otro, dos unidades mayor, es menor que 8. ¿Cuál puede ser ese número?

$$x(x-2) < 8 \rightarrow x^2 + 2x < 8 \rightarrow x^2 + 2x - 8 < 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$$

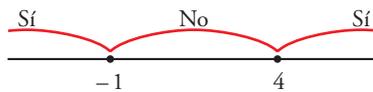


El número puede ser: $-3, -2, -1, 0$ ó 1 .

- 63** ■■■ Si al cuadrado de un número le restamos su triple, obtenemos más de 4. ¿Qué podemos decir de ese número?

$$x^2 - 3x > 4 \rightarrow x^2 - 3x - 4 > 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$



El número está en $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$, es decir, puede ser menor que -1 o mayor que 4 .

- 64** ■■■ Un grupo de amigos han reunido 50 € para ir a una discoteca. Si la entrada cuesta 6 € , les sobra dinero, pero si cuesta 7 € , les falta. ¿Cuántos amigos son?

$$\left. \begin{array}{l} 6x < 50 \\ 7x > 50 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x < 8,33 \\ x > 7,14 \end{array}$$

El precio de la entrada está entre $7,14 \text{ €}$ y $8,33 \text{ €}$. Puede ser $7,50 \text{ €}$ u 8 € .

- 65** ■■■ ¿Cuántos kilos de pintura de $3,5 \text{ €/kg}$ debemos mezclar con 6 kg de otra de 5 €/kg para que el precio de la mezcla sea inferior a 4 €/kg ?

$$\frac{3,5x + 5 \cdot 6}{x + 6} < 4 \rightarrow 3,5x + 30 < 4x + 24 \rightarrow 6 < 0,5x \rightarrow x > 12$$

Hay que mezclar más de 12 kg de la pintura de $3,5 \text{ €/kg}$.

- 66** ■■■ Dos ciudades A y B distan 160 km. De cada una de ellas sale un coche a la misma hora. Si el que sale de A lleva una velocidad de 75 km/h, ¿qué velocidad puede llevar el otro para que tarden en encontrarse menos de una hora, respetando la limitación de 120 km/h que marca la ley?



$t = \frac{e}{v}$. Se acercan, el uno al otro, a una velocidad $v + 75$.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{160}{v+75} < 1 \\ v \leq 120 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 160 < v + 75 \rightarrow v > 85 \\ v \leq 120 \end{array}$$

La velocidad debe ser mayor que 85 km/h y no superar los 120 km/h.

PÁGINA 79

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

- 67** ■■■ ¿Cómo se puede saber si una ecuación de segundo grado, $ax^2 + bx + c = 0$, tiene dos, una o ninguna solución, sin resolverla?

Estudiando el signo del discriminante.

Si $b^2 - 4ac > 0$ tiene dos soluciones.

Si $b^2 - 4ac = 0$ tiene una solución.

Si $b^2 - 4ac < 0$ no tiene solución.

- 68** ■■■ Determina para qué valores de k , la ecuación $9x^2 - 6x + k = 0$:

a) Tiene solución única.

b) Tiene dos soluciones.

c) No tiene solución.

$$b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot k = 36 - 36k$$

a) $36 - 36k = 0 \rightarrow k = 1$ (solución única)

b) $36 - 36k > 0 \rightarrow 36 > 36k \rightarrow k < 1$ (dos soluciones)

c) $36 - 36k < 0 \rightarrow 36 < 36k \rightarrow k > 1$ (no tiene solución)

- 69** ■■■ Una de las soluciones de la ecuación $2x^2 + x + k = 0$ es $\frac{3}{2}$. Calcula k y la otra solución.

$$2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} + k = 0 \rightarrow \frac{9}{2} + \frac{3}{2} + k = 0 \rightarrow k = -6$$

$$2x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} = \begin{cases} 3/2 \\ -2 \end{cases}$$

La otra solución es -2 , y $k = -6$.

70 ■■■ Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 2 y $\frac{1}{3}$.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(x-2)\left(x-\frac{1}{3}\right) &= 0 \rightarrow x^2 - 2x - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3} = 0 \rightarrow 3x^2 - 7x + 2 = 0\end{aligned}$$

71 ■■■ ¿Cuántas soluciones puede tener una ecuación bicuadrada? Comprueba tu respuesta resolviendo estas ecuaciones:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

b) $x^4 - 4x^2 = 0$

c) $x^4 - 16 = 0$

d) $x^4 + x^2 = 0$

e) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

f) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$

Puede tener 4, 3, 2, 1 o ninguna soluciones.

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \rightarrow$ Cambio $z = x^2$

$$z^2 - 10z + 9 = 0 \rightarrow z = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{matrix} < 9 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} z = 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ z = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{array} \right\} \text{Cuatro soluciones: } 1, -1, 3 \text{ y } -3$$

b) $x^4 - 4x^2 = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 4) = 0 \begin{matrix} < x = 0 \\ x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \end{matrix}$

Tiene tres soluciones: 0, 2 y -2

c) $x^4 - 16 = 0 \rightarrow x^4 = 16 \rightarrow x^2 = 4$ (-4 no vale) $\rightarrow x = \pm 2$

Tiene dos soluciones: 2 y -2

d) $x^4 + x^2 = 0 \rightarrow x^2(x^2 + 1) = 0 \begin{matrix} < x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \text{ No tiene solución.} \end{matrix}$

Tiene una solución: $x = 0$

e) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0 \rightarrow$ Cambio $x^2 = z$

$$z^2 + 3z + 2 = 0 \rightarrow z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{matrix} < -1 \text{ No vale.} \\ -2 \text{ No vale.} \end{matrix}$$

No tiene ninguna solución.

f) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0 \rightarrow$ Cambio $x^2 = z$

$$z^2 - 4z + 4 = 0 \rightarrow z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$z = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

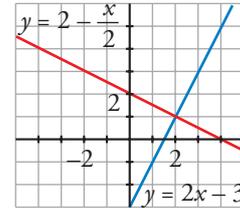
Tiene dos soluciones: $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$

72 ■■■ Observa la representación gráfica de las rectas

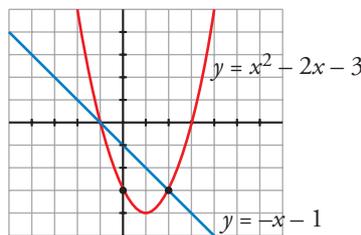
$$y = 2 - \frac{x}{2} \text{ e } y = 2x - 3.$$

Contesta sin hacer operaciones: ¿para qué valores de x es $2x - 3 \geq 2 - \frac{x}{2}$?

Para $x \geq 2$, es decir, en el intervalo $[2, +\infty)$.



73 ■■■ Observa la representación de la recta $y = -x - 1$ y la de la parábola $y = x^2 - 2x - 3$.



Responde sin hacer operaciones:

¿Para qué valores de x es $x^2 - 2x - 3 < -x - 1$?

Para $-1 < x < 2$, es decir, en el intervalo $(-1, 2)$.

PROFUNDIZA

74 ■■■ Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2z = 6 \\ y + z = 3 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} x - z = 4 \\ 2x + y = 7 \\ x + y = 2z \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2z = 6 \\ y + z = 3 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ y - 2z = 6 \\ y + z = 3 \end{array} \right\} \begin{cases} y = 6 + 2z \\ 6 + 2z + z = 3 \end{cases} \rightarrow 3z = -3 \rightarrow z = -1$$

$$y = 6 + 2 \cdot (-1) = 4; \quad x = 4$$

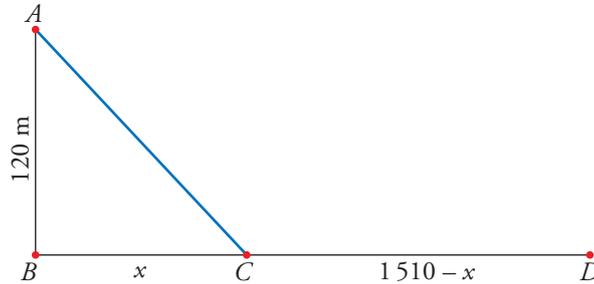
$$\text{Solución: } x = 4, \quad y = 4, \quad z = -1$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - z = 4 \\ 2x + y = 7 \\ x + y = 2z \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} x = z + 4 \\ 2z + 8 + y = 7 \\ z + 4 + y = 2z \end{array} \right\} \begin{cases} y = -2z - 1 \\ -z + 4 - 2z - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow -3z = -3 \rightarrow z = 1$$

$$y = -2z - 1 = -3; \quad x = z + 4 = 5$$

$$\text{Solución: } x = 5, \quad y = -3, \quad z = 1$$

- 75** ■■■ Un deportista está en A , en el mar, a 120 m de la playa BD , que mide 1 510 m.



Para ir hasta el extremo D , nada hasta C con una velocidad de 40 m/min y camina de C a D a 90 m/min. Calcula las distancias que recorrió nadando y andando, si el tiempo que empleó en total fue de 20 minutos.

$$t = \frac{e}{v}$$

Llamamos: tiempo andando $t_a = \frac{1510 - x}{90}$

tiempo nadando $t_n = \frac{AC}{40} = \frac{\sqrt{120^2 + x^2}}{40}$

$$t_a + t_n = 20 \text{ minutos}$$

$$\frac{1510 - x}{90} + \frac{\sqrt{120^2 + x^2}}{40} = 20 \rightarrow 4(1510 - x) + 9\sqrt{120^2 + x^2} = 7200 \rightarrow$$

$$\rightarrow 9\sqrt{120^2 + x^2} = 1160 + 4x \rightarrow 81(14400 + x^2) = 1345600 + 16x^2 + 9280x \rightarrow$$

$$\rightarrow 65x^2 - 9280x - 179200 = 0 \rightarrow 13x^2 - 1856x - 35840 = 0$$

$$x = \frac{1856 \pm \sqrt{3444736 + 1863680}}{26} = \frac{1856 \pm 2304}{26} = \begin{cases} 160 \\ -224/13 \text{ No vale.} \end{cases}$$

Andando: $1510 - 160 = 1350$ m

Nadando: $\sqrt{120^2 + 160^2} = \sqrt{14400 + 25600} = \sqrt{40000} = 200$ m

- 76** ■■■ Un barco hace un servicio regular entre dos ciudades, A y B, situadas a la orilla de un río. Cuando va de A a B en sentido de la corriente del río tarda 3 horas y a la vuelta tarda 4 horas. ¿Cuánto tardará un objeto que flota en ir desde A hasta B?

🗉 Llama v a la velocidad del barco y v' a la de la corriente.

	VELOCIDAD	DISTANCIA	TIEMPO
IDA	$v + v'$	d	3
VUELTA	$v - v'$	d	4
OBJETO QUE FLOTA	v'	d	t

$$v + v' = \frac{d}{3}$$

$$v - v' = \frac{d}{4}$$

$$t = \frac{d}{v'}$$

Elimina v entre las dos primeras ecuaciones y sustituye v' en la tercera. Así obtendrás t .

$$\left. \begin{array}{l} v + v' = \frac{d}{3} \\ v - v' = \frac{d}{4} \end{array} \right\} \begin{array}{l} v + v' = \frac{d}{3} \\ -v + v' = -\frac{d}{4} \end{array}$$

$$\underline{\hspace{10em}} \quad 2v' = \frac{d}{12} \rightarrow v' = \frac{d}{24}$$

$$t = \frac{d}{v'} = \frac{d}{d/24} = 24$$

El objeto tardará 24 horas en ir desde A hasta B.

- 77** ■■■ Subo una colina a una velocidad de 4 km/h y pretendo que la velocidad media entre el ascenso y el descenso sea de 6 km/h. ¿A qué velocidad debo descender?

$$\text{SUBIDA: } v = \frac{e}{t} \rightarrow 4 = \frac{e}{t} \rightarrow t = \frac{e}{4}$$

$$\text{BAJADA: } v' = \frac{e}{t'} \rightarrow t' = \frac{e}{v'}$$

$$V_{\text{MEDIA}} = 6 = \frac{2e}{t + t'} = \frac{2e}{\frac{e}{4} + \frac{e}{v'}} \rightarrow 6 = \frac{2e}{\frac{ev' + 4e}{4v'}} \rightarrow 6 = \frac{8ev'}{ev' + 4e} \rightarrow$$

$$\rightarrow 3(ev' + 4e) = 4ev' \rightarrow 3ev' + 12e = 4ev' \rightarrow ev' = 12e \rightarrow v' = \frac{12e}{e} = 12$$

Debe descender a 12 km/h.

- 78** ■■■ Una ambulancia recibe el aviso de un accidente de tráfico y sale del hospital A hacia el punto B a una velocidad de 60 km/h. La vuelta al hospital la hace escoltada por la policía y consigue hacerla a 100 km/h. ¿Cuál fue la velocidad media del recorrido?

$$\text{IDA: } e = 60t \rightarrow t = \frac{e}{60}$$

$$\text{VUELTA: } e = 100t' \rightarrow t' = \frac{e}{100}$$

$$V_{\text{MEDIA}} = \frac{2e}{t + t'} = \frac{2e}{\frac{e}{60} + \frac{e}{100}} = \frac{2e}{\frac{160e}{6000}} = \frac{1200e}{160e} = 75$$

La velocidad media del recorrido fue de 75 km/h.