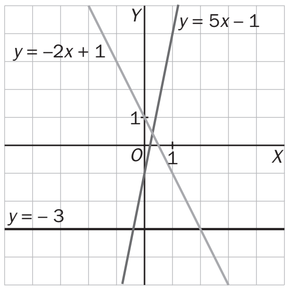
EJERCICIOS PROPUESTOS

12.1 Representa las siguientes funciones lineales e indica el valor de sus pendientes.

a) $y = -3$

b) $y = 5x - 1$

c) $y = -2x + 1$



a) $m = 0$

b) $m = 5$

c) $m = -2$

12.2 Representa estas funciones cuadráticas encontrando primero el vértice de las parábolas.

a) $y = x^2$ **b)** $y = x^2 + 2x + 3$ **c)** $y = -x^2 + 2x + 1$

a) $y = x^2$. El vértice está en $x = -\frac{b}{2a} = \frac{0}{2 \cdot 1} = 0$.

La ordenada del vértice es: $f(0) = 0^2 = 0 \Rightarrow V(0, 0)$.

Corte con el eje y: $x = 0 \Rightarrow y = 0$ Corte con el eje x: $y = 0 \Rightarrow x^2 = 0$, $x = 0$

b) $y = x^2 + 2x + 3$. El vértice está en $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1$.

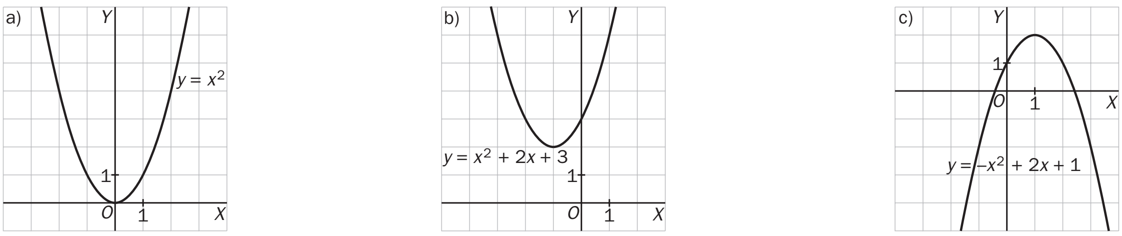
La ordenada del vértice es: $f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 3 = 2 \Rightarrow V(-1, 2)$.

Corte con el eje y: $x = 0 \Rightarrow y = 3$ Corte con el eje x: $y = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$, no tiene soluciones reales.

c) $y = -x^2 + 2x + 1$. El vértice está en $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot (-1)} = 1$.

La ordenada del vértice es: $f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 2 \Rightarrow V(1, 2)$.

Corte con el eje y: $x = 0 \Rightarrow y = 1$ Corte con el eje x: $y = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 + \sqrt{2}$, $x = 1 - \sqrt{2}$

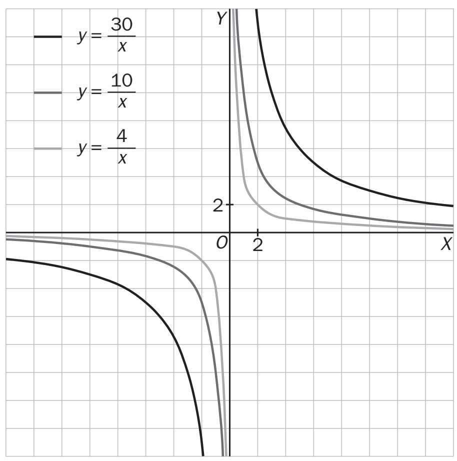


12.3 Representa en los mismos ejes estas funciones.

a) $y = \frac{4}{x}$

b) $y = \frac{10}{x}$

c) $y = \frac{30}{x}$

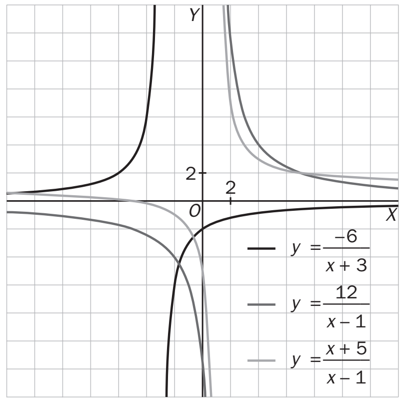


12.4 Representa en los mismos ejes estas funciones.

a) $y = \dfrac{-6}{x + 3}$

b) $y = \dfrac{12}{x - 1}$

c) $y = \dfrac{x + 5}{x - 1}$



12.5 ¿Cuáles de estas funciones son racionales?

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2}$ **b)** $h(x) = \dfrac{5x + 3}{4}$ **c)** $g(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 5}$ **d)** $j(x) = \dfrac{x^2 + 2x^3}{x^2 + 7}$

Son funciones racionales las de los apartados c y d.

12.6 Dadas las funciones:

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ $g(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - 2x}$ $h(x) = \dfrac{3x + 1}{x^2 - x - 2}$

a) Halla el dominio de cada una.

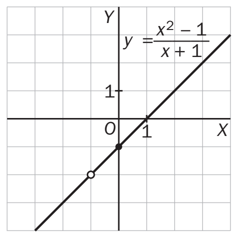
b) Representa la gráfica de *f(x).*

a) $D(f) = \mathbf{R} - \{-1\}$

Las raíces del denominador son: $x = -2$; $x = 0$; $x = 1$. $D(g) = \mathbf{R} - \{-2, 0, 1\}$.

Las raíces del denominador son: $x = 2$ y $x = -1$. $D(h) = \mathbf{R} - \{-1, 2\}$.

b)



12.7 Encuentra las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{5x + 2}{x - 1}$ **b)** $y = \dfrac{-3x + 2}{x}$ **c)** $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - x - 6}$ **d)** $y = \dfrac{x^3 + 2}{x^3 - x}$

a) $x - 1 = 0$; $x = 1$

$$\lim_{x\to1} \frac{5x + 2}{x - 1} = \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x + 2}{x - 1} = 5 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{5x + 2}{x - 1} = 5$$

Asíntota vertical: $x = 1$

Asíntota horizontal: $y = 5$

b) $x = 0$

$$\lim_{x\to0} \frac{-3x + 2}{x} = \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x + 2}{x} = -3 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x + 2}{x} = -3$$

Asíntota vertical: $x = 0$

Asíntota horizontal: $y = -3$

c) $x^2 - x - 6 = 0$; $x = -2$ y $x = 3$

$$\lim_{x\to-2} \frac{2x^2}{x^2 - x - 6} = \infty \qquad \lim_{x\to3} \frac{2x^2}{x^2 - x - 6} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2 - x - 6} = 2 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2 - x - 6} = 2$$

Asíntotas verticales: $x = -2$ y $x = 3$

Asíntota horizontal: $y = 2$

d) $x^3 - x = 0$; $x = -1$, $x = 1$, $x = 0$

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^3 + 2}{x^3 - x} = \infty \qquad \lim_{x\to1} \frac{x^3 + 2}{x^3 - x} = \infty \qquad \lim_{x\to0} \frac{x^3 + 2}{x^3 - x} = \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 2}{x^3 - x} = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 + 2}{x^3 - x} = 1$$

Asíntotas verticales: $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$

Asíntota horizontal: $y = 1$

12.8 Calcula las asíntotas oblicuas de esta función $y = \dfrac{-2x^3 + 5x + 3}{x^2 - 4}$.

Para hallar la asíntota oblicua de la función racional, dividimos el numerador entre el denominador.

$$y = \frac{-2x^3 + 5x + 3}{x^2 - 4} = -2x - \frac{3(x - 1)}{x^2 - 4}$$

Por tanto, la asíntota oblicua es $y = -2x$.

12.9 Halla todas las asíntotas de la siguiente función $y = \dfrac{4x^3}{x^2 - x - 6}$.

$x^2 - x - 6 = 0$; $x = -2$ y $x = 3$; $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4x^3}{x^2 - x - 6} = \infty$ $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4x^3}{x^2 - x - 6} = \infty$. Asíntotas verticales: $x = -2$ y $x = 3$

$\dfrac{4x^3}{x^2 - x - 6} = 4x + 4 + \dfrac{28x + 24}{x^2 - x - 6}$. Asíntota oblicua: $y = 4x + 4$. Asíntota horizontal: no tiene.

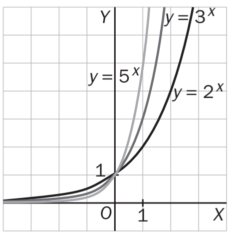
12.10 Calcula las siguientes potencias:

a) $5^{2,23}$ **b)** $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1,15}$ **c)** $3^{-4,23}$ **d)** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2,47}$

a) $5^{2,23} = 36,1995...$ b) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1,15} = 6,36525...$ c) $3^{-4,23} = 0,009589...$ d) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2,47} = 0,0663...$

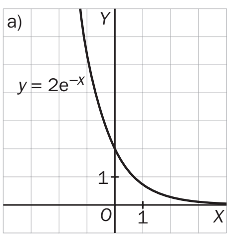
12.11 Representa en los mismos ejes las siguientes funciones exponenciales.

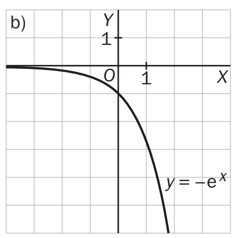
a) $y = 2^x$ **b)** $y = 3^x$ **c)** $y = 5^x$



12.12 Representa estas funciones exponenciales.

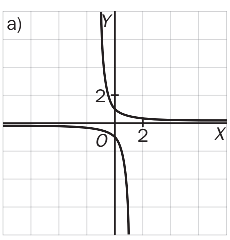
a) $y = 2e^{-x}$ **b)** $y = -e^x$

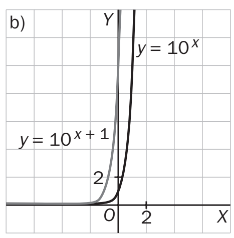




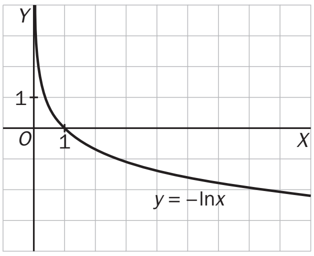
12.13 Representa en los mismos ejes las siguientes funciones exponenciales.

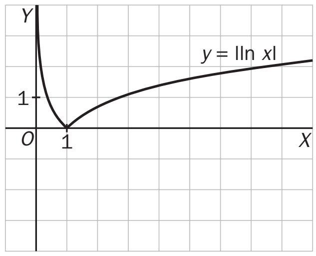
a) $y = -10^x$ e $y = 10^{-x}$ **b)** $y = 10^x$ e $y = 10^{x+1}$



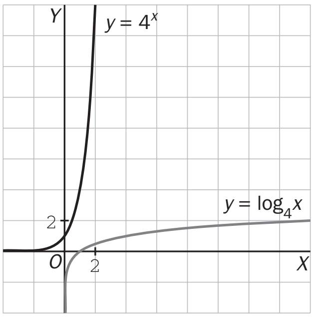


12.14 **A partir de la gráfica de la función $y = \ln x$, representa la gráfica de las funciones $y = -\ln x$ e $y = |\ln x|$.**





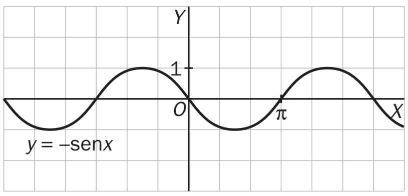
12.15 **Representa la función $y = 4^x$ y, a partir de su gráfica, dibuja la de la función $y = \log_4 x$.**



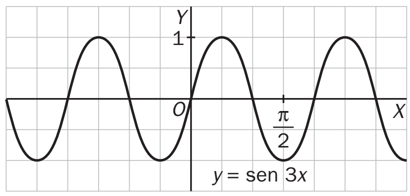
12.16 **Representa estas funciones trigonométricas.**

a) $y = -\text{sen } x$ **b)** $y = \text{sen } 3x$ **c)** $y = |\cos x|$ **d)** $y = 2 \cos x$ **e)** $y = \text{tg}(-x)$ **f)** $y = \text{tg } \dfrac{x}{2}$

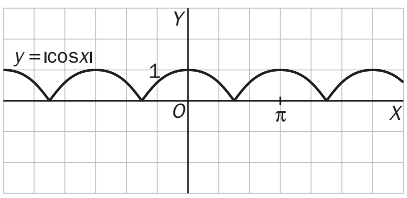
a)



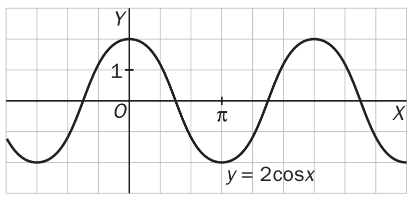
b)



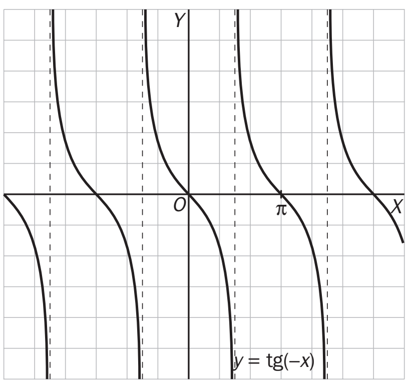
c)



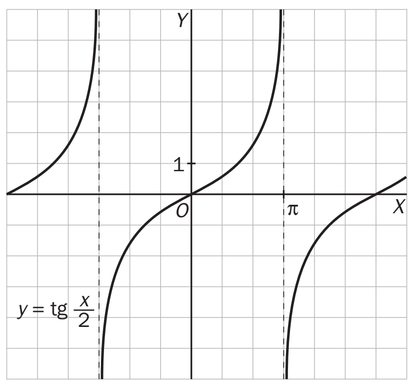
d)



e)



f)



12.17 **Estudia el dominio, el recorrido, la periodicidad, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos, y la simetría de estas funciones.**

a) $y = -\text{sen } x$ **b)** $y = |\cos x|$ **c)** $y = \text{tg } \dfrac{x}{2}$

Para el estudio de estas funciones nos fijaremos en las gráficas del ejercicio anterior.

a) Su dominio es **R**, y su recorrido, $[-1, 1]$.

Es una función periódica de período 2π.

La función crece en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ y decrece en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

La función tiene un mínimo en $\left(\dfrac{-\pi}{2}, -1\right)$ y un máximo en $\left(\dfrac{3\pi}{2}, 1\right)$.

Es simétrica respecto al origen.

b) Su dominio es **R**, y su recorrido, $[0, 1]$.

Es una función periódica de período π.

La función crece en $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ y decrece en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

La función tiene dos máximos en $(0, 1)$ y $(\pi, 1)$, y un mínimo en $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$.
Es simétrica respecto al eje OY.

c) Su dominio es **R**, excepto los múltiplos impares de π.

Es una función periódica de período 2π.

La función es siempre creciente y, por tanto, no presenta ni máximos ni mínimos.

Es simétrica respecto al origen.

12.18 **Representa la función: $y = 3 \cos 2(x - \pi) - 5$. A partir de otras más sencillas.**

1.º Partimos de la función $y = \cos x$.

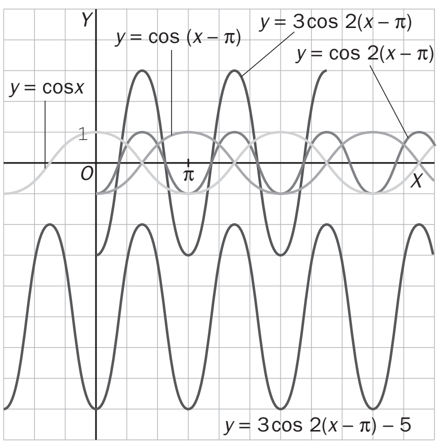
2.º Trasladamos horizontalmente a la derecha π unidades y obtenemos: $y = \cos(x - \pi)$.

3.º Contraemos horizontalmente a la mitad y obtenemos: $y = \cos 2(x - \pi)$.

El período ahora es $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

4.º Dilatamos en vertical al multiplicar por 3 y obtenemos: $y = 3 \cos 2(x - \pi)$.

5.º Trasladamos verticalmente cinco unidades hacia abajo y obtenemos: $y = 3 \cos 2(x + \pi) - 5$.



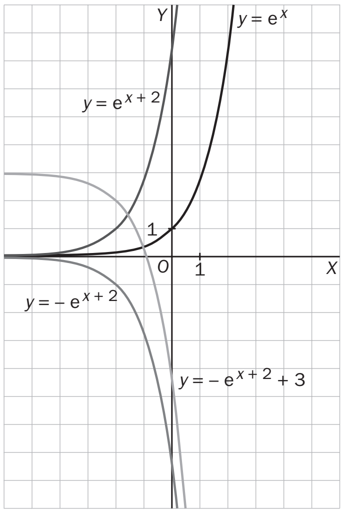
12.19 **Representa la función: $y = -e^{x+2} + 3$. A partir de otras más sencillas.**

1.º Partimos de la función $y = e^x$.

2.º Trasladamos horizontalmente a la izquierda 2 unidades y obtenemos: $y = e^{x+2}$.

3.º Representamos la función opuesta, $y = -e^{x+2}$, que es simétrica respecto del eje x.

4.º Trasladamos verticalmente tres unidades hacia arriba y obtenemos: $y = -e^{x+2} + 3$.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

12.20 **Halla dos números reales tales que su suma sea 10, y su producto, el mayor posible. ¿Y si buscamos que su producto sea el menor posible?**

Sean x e y los dos números buscados. Como $x + y = 10$, $y = 10 - x$.

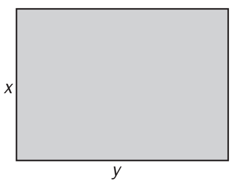
Su producto es $P(x) = x(10 - x)$. $P(x) = -x^2 + 10x$. Se trata de una función cuadrática abierta hacia abajo, tenemos que hallar el vértice.

$x = \dfrac{-10}{2 \cdot (-1)} = 5$. La ordenada es $P(5) = -5^2 + 10 \cdot 5 = 25$.

Por tanto, los números son $x = 5$ y $y = 10 - x = 10 - 5 = 5$.

El problema no tiene solución cuando se trata de encontrar el producto mínimo, ya que la función $P(x)$ no tiene mínimo.

12.21 **Un jardinero dispone de 100 metros de valla para rodear un jardín rectangular. Halla las dimensiones del mismo de forma que su área sea máxima.**



Sean x e y las dimensiones del rectángulo.

El perímetro es $p = 2x + 2y = 100 \Rightarrow x + y = 50 \Rightarrow y = 50 - x$.

El área es $S(x) = x \cdot y = x(50 - x) = 50x - x^2$.

Se trata de una función cuadrática abierta hacia abajo, vamos a hallar su vértice.

$x = \dfrac{50}{2} = 25$ m $\quad y = 50 - x = 50 - 25 = 25$ m

Así pues, el rectángulo de área máxima es el cuadrado.

E J E R C I C I O S   P A R A   E N T R E N A R S E

Funciones polinómicas

12.22 **Clasifica las siguientes funciones en lineales o cuadráticas.**

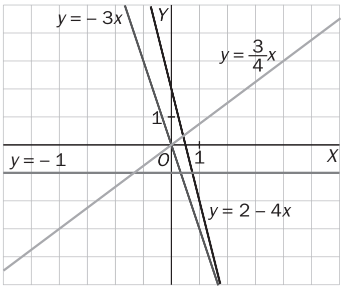
a) $y = 3x + 5$ **c)** $y = 1 - x$ **e)** $y = 1 + x + x^2$

b) $y = x^2 - 4x$ **d)** $y = 6 + x^2$ **f)** $y = 2x$

Lineales: a, c y f. Cuadráticas: b, d y e.

12.23 **Representa gráficamente estas funciones lineales.**

a) $y = 2 - 4x$ **b)** $y = -3x$ **c)** $y = -1$ **d)** $y = \frac{3}{4}x$



12.24 **Indica la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes funciones lineales.**

a) $y = 4x - 2$ **b)** $y = -x + 3$ **c)** $y = 7$ **d)** $y = 1 + 2x$

a) $m = 4$; $n = -2$ b) $m = -1$; $n = 3$ c) $m = 0$; $n = 7$ d) $m = 2$; $n = 1$

12.25 **Escribe la fórmula de una función lineal que cumpla las condiciones de cada apartado.**

a) Pendiente, 4, y ordenada en el origen, −1.

b) Es creciente y pasa por el origen.

c) Decrece y su gráfica incluye el punto (0, 3).

d) Es de pendiente positiva y con ordenada en el origen negativa.

a) $y = 4x - 1$ b) $y = 5x$ c) $y = -x + 3$ d) $y = 6x - 2$

12.26 **Halla el vértice y el eje de simetría de estas parábolas y luego dibújalas.**

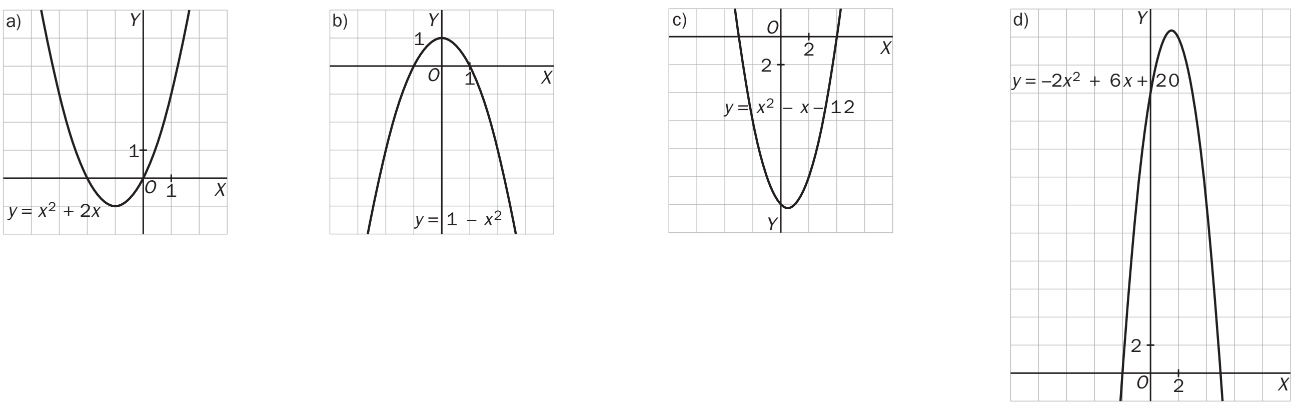
a) $y = x^2 + 2x$ **b)** $y = 1 - x^2$ **c)** $y = x^2 - x - 12$ **d)** $y = -2x^2 + 6x + 20$

a) $x_v = -\dfrac{2}{2 \cdot 1} = -1;\quad y_v = -1 \Rightarrow V(-1, -1)$

c) $x_v = -\dfrac{-1}{2 \cdot 1} = \dfrac{1}{2};\quad y_v = -\dfrac{49}{4} \Rightarrow V\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{49}{4}\right)$

b) $x_v = -\dfrac{0}{2 \cdot (-1)} = 0;\quad y_v = 1 \Rightarrow V(0, 1)$

d) $x_v = \dfrac{-6}{2 \cdot (-2)} = \dfrac{3}{2};\quad y_v = \dfrac{37}{2} \Rightarrow V\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{49}{2}\right)$



12.27 **Indica, sin dibujarlas, cuáles de estas parábolas son abiertas hacia arriba y cuáles hacia abajo.**

a) $y = -3x^2 + 9x + 2$ **b)** $y = 5 - x + x^2$ **c)** $y = 2x^2 - x + 1$ **d)** $y = -2x^2 - x + 1$

Hacia arriba: b y c Hacia abajo: a y d

12.28 **Sin realizar la gráfica, indica cuáles de las siguientes funciones pasan por el origen de coordenadas.**

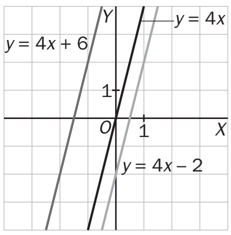
a) $y = 2x + 1$ **b)** $y = -6x$ **c)** $y = x^2 + x$ **d)** $y = -3x^2$

Pasan por el origen b, c y d.

12.29 **Dibuja en los mismos ejes de coordenadas las funciones $y = 4x + 6$, $y = 4x - 2$ e $y = 4x$.**

a) ¿Cómo son las gráficas?

b) ¿Qué elemento tienen en común las tres funciones?



a) Las gráficas son paralelas.

b) La pendiente de la recta, que es 4 en los tres casos.

12.30 **Para la funciones polinómicas $f(x) = -x^3 + x$ y $g(x) = x^4 + x^2$.**

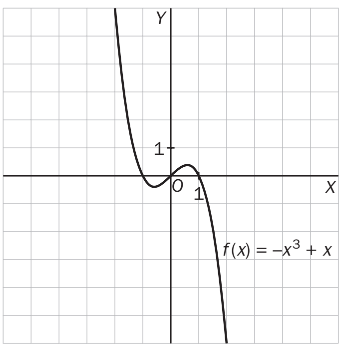
a) Construye una tabla de valores y dibújalas en el intervalo [−2, 2].

b) Indica dominio y recorrido, cortes con los ejes, continuidad, simetría, crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos.

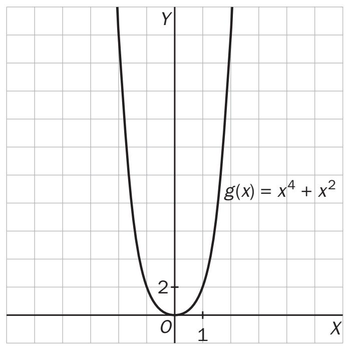
a)

	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	6	1,875	0	−0,375	0	0,375	0	−1,875	−6
g(x)	20	7,3125	2	0,3125	0	0,3125	2	7,3125	20

***f*(*x*)**



***g*(*x*)**



b) Función: $f(x) = -x^3 + x$

Su dominio y recorrido es **R**. Tiene tres puntos de corte con los ejes: (−1, 0), (0, 0) y (1, 0).

Es continua en todo **R**. La función tiene simetría impar.

La función decrece en $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ y crece en $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

La función tiene un mínimo en $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ y un máximo en $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$.

Función: $g(x) = x^4 + x^2$

Su dominio es **R**, y su recorrido, $[0, +\infty)$. Tiene un punto de corte con los ejes: (0, 0).

Es continua en todo **R**. La función tiene simetría par.

La función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$. La función tiene un mínimo en (0, 0).

Funciones de proporcionalidad inversa y racionales

12.31 Identifica entre las siguientes funciones las que son de proporcionalidad inversa.

a) $y = \dfrac{-3x}{2}$ **b)** $y = \dfrac{4x}{x+1}$ **c)** $y = \dfrac{-5}{x}$ **d)** $y = \dfrac{7}{2x}$

Son funciones de proporcionalidad inversa c y d.

12.32 Escribe la fórmula de dos funciones de proporcionalidad inversa, una creciente y otra decreciente.

Creciente: $y = \dfrac{-2}{x}$ Decreciente: $y = \dfrac{3}{x}$

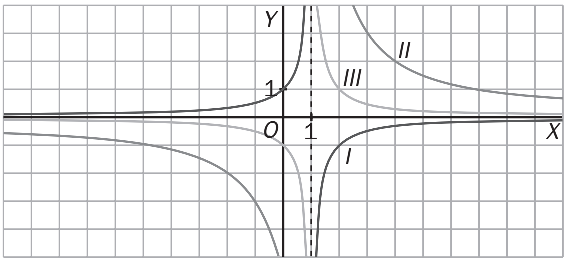
12.33 Halla el dominio de estas funciones.

a) $y = \dfrac{2x+4}{3x-6}$ **b)** $y = \dfrac{x^2+2}{1-x^2}$ **c)** $y = \dfrac{1}{x^2-8x+16}$

a) $D(f) = \mathbf{R} - \{2\}$ b) $D(f) = \mathbf{R} - \{1, -1\}$ c) $D(f) = \mathbf{R} - \{4\}$

12.34 Asigna en tu cuaderno a cada una de las funciones representadas la fórmula que le corresponde.

a) $y = \dfrac{1}{x-1}$ **b)** $y = \dfrac{-1}{x-1}$ **c)** $y = \dfrac{6}{x-1}$



A es $y = \dfrac{1}{x-1}$

B es $y = \dfrac{-1}{x-1}$

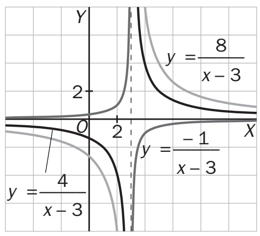
C es $y = \dfrac{6}{x-1}$

12.35 Dibuja las gráficas de las siguientes funciones en los mismos ejes.

a) $y = \dfrac{4}{x-3}$

b) $y = \dfrac{-1}{x-3}$

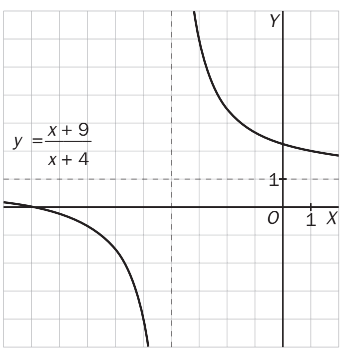
c) $y = \dfrac{8}{x-3}$



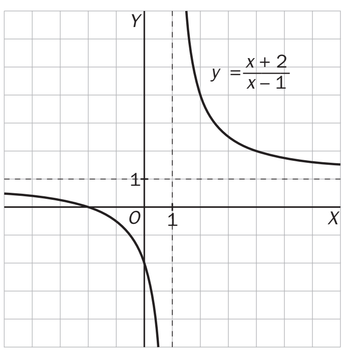
12.36 Representa las siguientes funciones.

a) $y = \dfrac{x+9}{x+4}$ **b)** $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ **c)** $y = \dfrac{x^2-9}{x-3}$

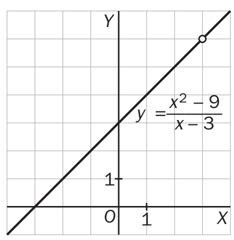
a)



b)



c)



Asíntotas

12.37 Calcula las asíntotas verticales y horizontales de las funciones siguientes:

a) $y = \dfrac{6}{x-2}$ **b)** $y = \dfrac{x}{x+1}$ **c)** $y = \dfrac{-2}{4x+3}$ **d)** $y = \dfrac{1-x}{x}$

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{6}{x-2} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{6}{x-2} = +\infty$; Tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6}{x-2} = 0$ Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x}{x+1} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x}{x+1} = -\infty$; Tiene una asíntota vertical en $x = -1$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ Tiene una asíntota horizontal en $y = 1$.

c) $\lim\limits_{x\to -\left(\frac{3}{4}\right)^-} \dfrac{-2}{4x+3} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\left(\frac{3}{4}\right)^+} \dfrac{-2}{4x+3} = -\infty$; Tiene una asíntota vertical en $x = -\dfrac{3}{4}$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2}{4x+3} = 0$; Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

d) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-x}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-x}{x} = +\infty$; Tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-x}{x} = -1$; Tiene un asíntota horizontal en $y = -1$.

12.38 Halla el dominio y las ecuaciones de las asíntotas de estas funciones.

a) $y = \dfrac{x^3}{x^3-8}$ **b)** $y = \dfrac{x^3-1}{x^2}$ **c)** $y = \dfrac{3x^2+12}{x^2-5x}$

a) $x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow D(f) = \mathbf{R} - \{2\}$

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^3}{x^3-8} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^3}{x^3-8} = +\infty \Rightarrow$ Tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^3-8} = 1$. Tiene una asíntota horizontal en $y = 1$.

Al tener asíntota horizontal, no tiene oblicua.

b) $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^3-1}{x^2} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^3-1}{x^2} = -\infty$. Tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

$\dfrac{x^3-1}{x^2} = x + \dfrac{-1}{x^2}$; Tiene una asíntota oblicua: $y = x$.

c) $x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 5 \Rightarrow D(f) = \mathbf{R} - \{0, 5\}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{3x^2+12}{x^2-5x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3x^2+12}{x^2-5x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{3x^2+12}{x^2-5x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{3x^2+12}{x^2-5x} = +\infty$

Tiene dos asíntotas verticales: $x = 0$ y $x = 5$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+12}{x^2-5x} = 3$; Tiene una asíntota horizontal en $y = 3$.

No tiene asíntota oblicua, ya que tiene horizontal.

Funciones exponenciales y logarítmicas

12.39 **Completa en tu cuaderno la siguiente tabla indicando de qué tipo es cada una de estas funciones.**

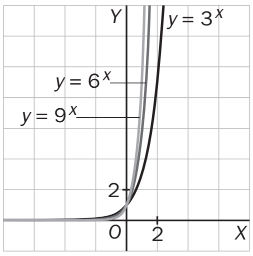
$y = e^{2x}$ $\quad y = e \cdot x$ $\quad y = \log(x + 3)$ $\quad y = x \cdot \ln 2$

$y = 4^{-x}$ $\quad y = x^3$ $\quad y = \ln(2x)$ $\quad y = 5^x$

Exponencial	$y = e^{2x}$	$y = 4^{-x}$	$y = 5^x$
Logarítmica	$y = \log(x + 3)$	$y = \ln(2x)$	
Ni exponencial ni logarítmica	$y = e \cdot x$	$y = x^3$	$y = x \cdot \ln 2$

12.40 **Representa en los mismos ejes estas funciones.**

a) $y = 3^x$ **b)** $y = 6^x$ **c)** $y = 9^x$



12.41 **Escribe en tu cuaderno estas funciones recíprocas.**

Función	$y = 4^x$	$y = \log_5 x$	$y = \log x$	$y = 7^x$
Recíproca	$\log_4 x$	5^x	10^x	$\log_7 x$

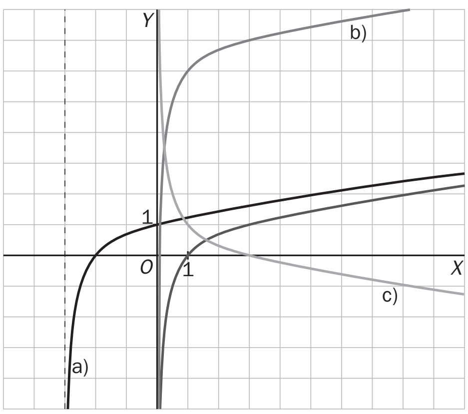
12.42 **Indica, sin dibujarlas, si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes.**

a) $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ **b)** $y = 7^x$ **c)** $y = 5^{-x}$ **d)** $y = \left(\frac{5}{2}\right)^x$

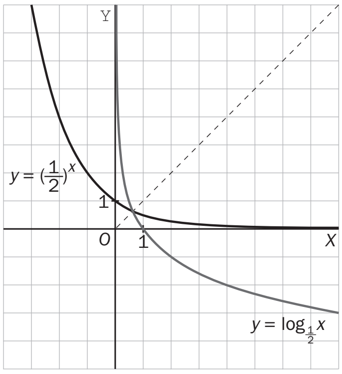
Crecientes: b y d Decrecientes: a y c

12.43 **Representa la función $y = \ln x$ y, utilizando su gráfica, dibuja la de estas otras funciones.**

a) $y = \ln(x + 3)$ **b)** $y = 6 + \ln x$ **c)** $y = 1 - \ln x$



12.44 Dibuja la gráfica de la función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y, a partir de ella, la de $y = \log_{1/2} x$.



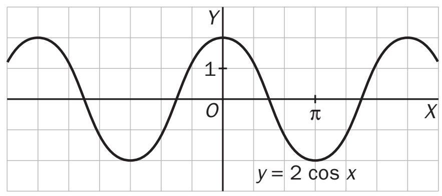
Funciones trigonométricas

12.45 Representa gráficamente las siguientes funciones completando previamente una tabla de valores:

a) $y = 2 \cos x$ **b)** $y = 3 \text{ tg } x$ **c)** $y = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ **d)** $y = \text{sen}(x + 2\pi)$

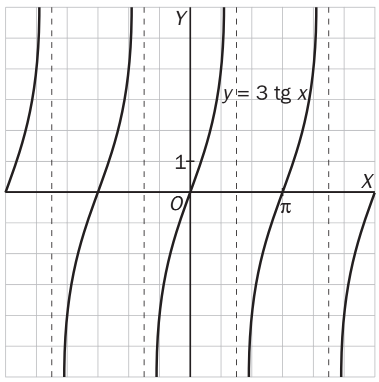
a)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	2	0	−2	0	2



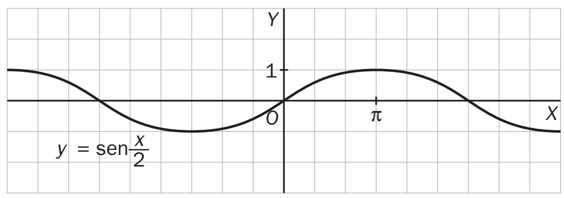
b)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	0	3	—	−3	0



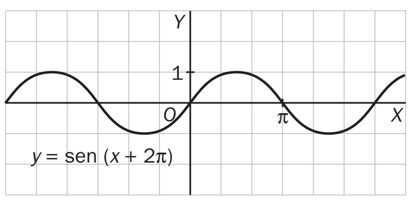
c)

x	0	π	2π	3π	4π
y	0	1	0	−1	0



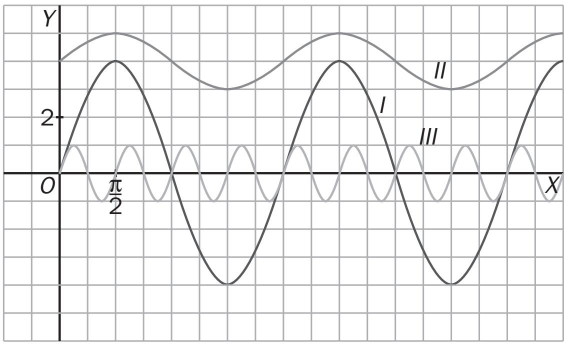
d)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	1	0	−1	0



12.46 **Asocia en tu cuaderno cada una de las funciones representadas con la fórmula que le corresponde:**

a) $y = 4 \text{ sen } x$ **b)** $y = \text{sen}(4x)$ **c)** $y = 4 + \text{sen } x$



I) $y = 4 \text{ sen } x$

II) $y = 4 + \text{sen } x$

III) $y = \text{sen } (4x)$

12.47 **Calcula el período de las siguientes funciones.**

a) $y = \cos(4x)$ **b)** $y = \text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$ **c)** $y = \text{tg}(x + \pi)$ **d)** $y = \text{tg}(2x)$

a) $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ b) $T = 3 \cdot 2\pi = 6\pi$ c) $T = \pi$ d) $T = \frac{\pi}{2}$

12.48 **Representa gráficamente estas funciones.**

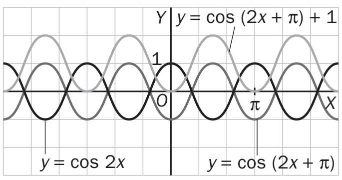
a) $y = \cos(2x + \pi) + 1$

b) $y = 5 \text{ tg}\left(\frac{x}{4}\right) + 2$

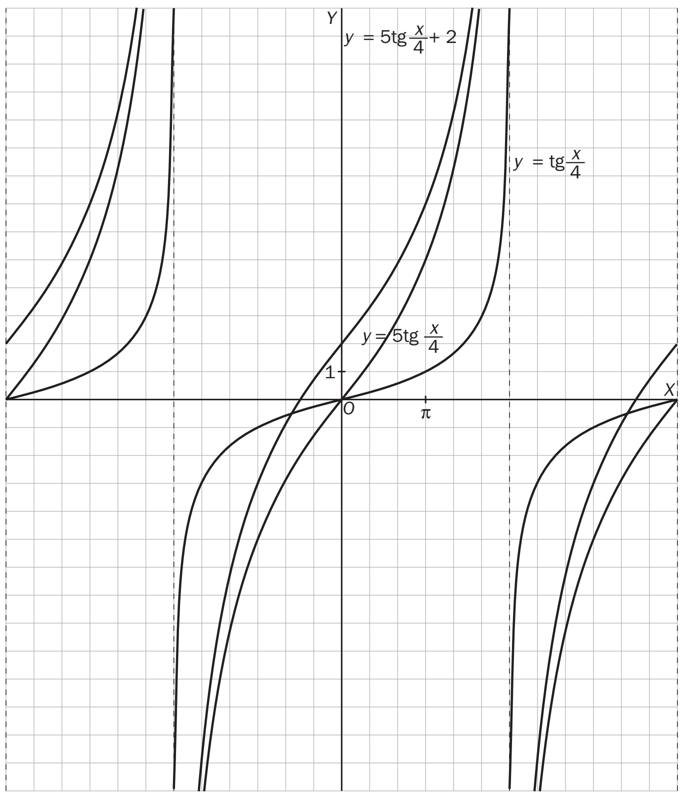
c) $y = 2 \text{ sen}(x - \pi) - 3$

d) $y = \frac{1}{2}\cos(x - \pi) - 6$

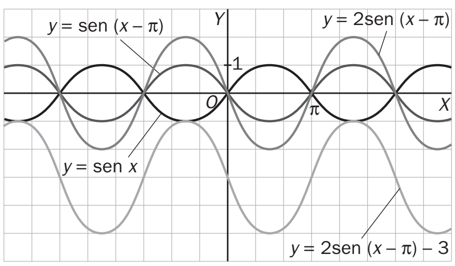
a)



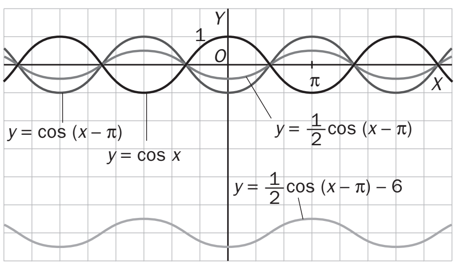
b)



c)



d)



12.49 Si la pendiente de una función lineal es 0, ¿qué tipo de crecimiento experimenta?

Es constante.

12.50 La fórmula de las funciones lineales es del tipo $y = mx + n$. Completa en tu cuaderno el cuadro siguiente marcando una cruz donde corresponda.

	$m > 0$ $n = 0$	$m > 0$ $n \neq 0$	$m < 0$ $n = 0$	$m < 0$ $n \neq 0$
Creciente	X	X		
Decreciente			X	X
Pasa por el origen	X		X	
No pasa por el origen		X		X

12.51 Explica si puede haber alguna función racional cuyo dominio sean todos los números reales y, en caso afirmativo, escribe un ejemplo.

Una función racional cuyo denominador no tenga raíces reales, por ejemplo, $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

12.52 ¿En qué puntos corta a los ejes de coordenadas la gráfica de $y = 8^x$? ¿Presenta algún tipo de asíntota?

a) Si $x = 0$, entonces $y = 1$. Corta al eje OY en (0, 1). No corta al eje OX.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 8^x = 0$. Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ a la que se aproxima sólo en $-\infty$.

12.53 Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y explica por qué.

a) Todas las funciones racionales tienen asíntotas verticales.

b) El recorrido de la función $y = e^{-x}$ es $\mathbf{R}^-$.

c) El dominio de una función de proporcionalidad inversa nunca es R.

d) La función $y = \log_{-2} x$ decrece en todo su dominio.

a) Falsa. Si su dominio es **R**, entonces no tiene asíntotas verticales.

b) Falsa. $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} > 0$ para cualquier valor de x.

c) Verdadera. La forma más general del denominador es $ax + b = 0$, que se anula en $-\dfrac{b}{a}$. Por tanto, el dominio nunca será **R**.

d) No es una función porque la base del logaritmo debe ser un número positivo y distinto de 1.

12.54 La función racional f tiene una asíntota vertical en $x = 2$ y el dominio de la función g es $R - \{1\}$.

a) ¿Se puede afirmar que 2 no es un punto del dominio de f?

b) ¿Es $x = 1$ una asíntota vertical de g?

a) Sí, ya que las asíntotas verticales anulan el denominador de la función.

b) No necesariamente, ya que se debe cumplir además que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$, y eso no tiene por qué suceder. Un caso que lo muestra es $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

12.55 En algunos países, la temperatura se mide en grados Fahrenheit en lugar de en grados Celsius. La relación entre estas dos escalas viene determinada por la fórmula $y = 1{,}8x + 32$, siendo x e y las temperaturas medidas en grados Celsius y Fahrenheit, respectivamente.

a) ¿Qué tipo de función es la que relaciona las dos escalas de temperatura?

b) ¿Cuál es su pendiente? ¿Es una función creciente o decreciente?

c) ¿Cuál es su ordenada en el origen? Explica qué significa su valor en este caso.

a) Lineal

b) $m = 1{,}8 > 0$. Por tanto, es creciente.

c) $n = 32$, que significa que una temperatura de 0º Celsius corresponde a 32º Fahrenheit.

12.56 Una tenista ha lanzado una pelota que sigue una trayectoria dada por la fórmula $y = 8t - t^2 + 1{,}6$ siendo t el tiempo (en segundos) transcurrido desde el lanzamiento, e y la altura (en metros) a la que se encuentra la pelota.

a) ¿A qué tipo de gráfica corresponde esa trayectoria?

b) ¿Cuándo alcanza la pelota su máxima altura?

c) ¿Cuál es esa altura máxima conseguida?

d) ¿En qué momento cae la pelota a la pista?

a) A una parábola.

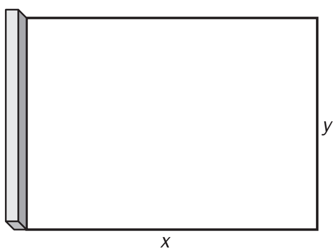
b) En el vértice: $t = -\dfrac{8}{2 \cdot (-1)} = 4$. A los 4 segundos.

c) $y(4) = 32 - 16 + 1{,}6 = 17{,}6$ metros

d) $8t - t^2 + 1{,}6 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 + 6{,}4}}{-2} = \dfrac{-8 \pm 8{,}39}{-2}$. La pelota cae a los 8,195 segundos.

12.57 Los alumnos de Biología y Geología van a vallar una zona rectangular del patio del centro escolar para utilizarla en sus prácticas. Para uno de los lados del recinto se aprovechará una de las paredes del centro.

Si disponen de 12 metros de alambre, ¿cuánto deben medir los lados del rectángulo para que ocupe la máxima superficie?



$2x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - 2x$

Área: $A = y \cdot x = (12 - 2x) \cdot x = 12x - 2x^2$

La función área es una parábola abierta hacia abajo, y su máximo es el vértice:

$x_v = -\dfrac{12}{2 \cdot (-2)} = 3$. $y = 12 - 2 \cdot 3 = 6$

El lado de la pared debe medir 6 m, y el otro lado, 3 m.

12.58 Un invernadero visto de frente presenta la forma de la gráfica de la función $y = 2x - \dfrac{1}{4}x^2$.

a) ¿Cuál es esta forma?

b) Calcula la altura máxima del invernadero.

a) De parábola.

b) La máxima altura se alcanza en el vértice: $x_v = -\dfrac{2}{2 \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\right)} = 4 \Rightarrow y_v = 8 - 4 = 4$.

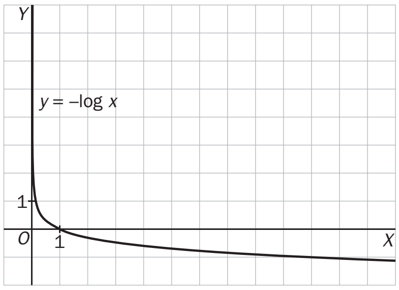
La máxima altura es 4 m.

12.59 El pH mide el carácter ácido o básico de una sustancia, y se encuentra relacionado con la concentración de iones de hidrógeno de la misma, x, que se mide en mol por litro, según la fórmula pH $= -\log x$.

a) Representa la función del pH.

b) El pH de un gel de ducha es 5,5. ¿Qué concentración de iones de hidrógeno tiene?

c) Para valores de pH menores que 7, la sustancia es ácida y, en caso contrario, básica. ¿Cuántos moles por litro de iones de hidrógeno puede contener una sustancia en cada caso?

a) 

b) $5{,}5 = -\log x \Rightarrow -5{,}5 = \log x \Rightarrow x = 10^{-5{,}5}$ moles/litro.

c) $7 > -\log x \Rightarrow -7 < \log x \Rightarrow x > 10^{-7}$ moles/litro tiene carácter ácido.

$7 < -\log x \Rightarrow -7 > \log x \Rightarrow x < 10^{-7}$ moles/litro tiene carácter básico.

12.60 La sonoridad o sensación auditiva de un sonido, β, se mide en decibelios (dB), y se encuentra relacionada con la intensidad de la onda sonora, I, que se mide en vatios por metro cuadrado.

$$\beta = 120 + 10 \log I$$

a) La intensidad de las ondas sonoras que son audibles sin producir dolor está entre 10^{-12} y 1 vatio por metro cuadrado. ¿Entre qué valores se halla comprendida la sonoridad que producen?

b) Si estás escuchando música en un reproductor MP3 con 20 decibelios, ¿cuál es la intensidad de las ondas al salir de los auriculares?

a) $\beta(10^{-12}) = 120 + 10 \log 10^{-12} = 120 + 10 \cdot (-12) = 120 - 120 = 0$

$\beta(1) = 120 + 10 \log 1 = 120 + 10 \cdot 0 = 120$

La sensación auditiva de las ondas audibles que no producen dolor está comprendida entre 0 y 120 dB.

b) $20 = 120 + 10 \log I \Rightarrow -100 = 10 \log I \Rightarrow -10 = \log I \Rightarrow I = 10^{-10}$ vatios por metro cuadrado

12.61 Si aprietas un balón entre tus manos comprobarás que, al disminuir su volumen, V, te cuesta cada vez más apretarlo, porque aumenta la presión, P, del aire en su interior.

La presión del aire en el balón se incrementa de forma inversamente proporcional al volumen, es decir,

$P \cdot V = k$, donde k es una constante.

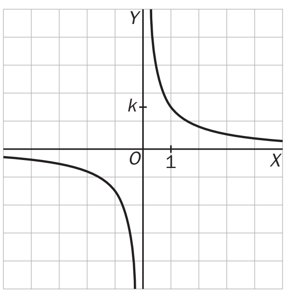
a) ¿De qué tipo es la función $P(V)$?

b) Represéntala gráficamente.

c) ¿Corta la gráfica a los ejes de coordenadas?

a) Es una función de proporcionalidad inversa.

b) k debe ser positivo porque la presión y el volumen lo son.

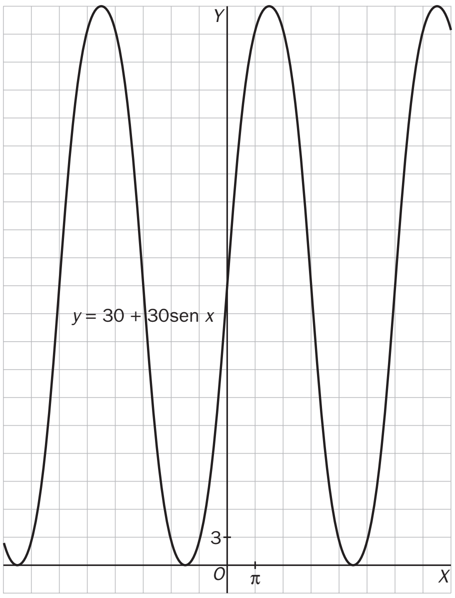


c) No corta a los ejes.

12.62 La distancia al suelo de un punto *A* en el borde de un neumático de 60 centímetros de diámetro viene dada por la expresión $y = 30 + 30$ sen x, donde x es el ángulo que forma con la horizontal el radio de la rueda correspondiente a ese punto.

Dibuja la gráfica que refleje la distancia al suelo de cada uno de los puntos del borde del neumático en función de x.

Partiendo de la función sen x, se dilata en vertical multiplicándola por 30 y luego se traslada en vertical 30 unidades hacia arriba.

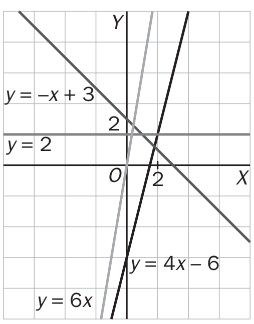


REFUERZO

Funciones polinómicas

12.63 Representa las siguientes funciones lineales, e indica su pendiente y su ordenada en el origen.

a) $y = 4x - 6$ **b)** $y = -x + 3$ **c)** $y = 2$ **d)** $y = 6x$



a) $y = 4x - 6: \; m = 4, n = -6$

b) $y = -x + 3: \; m = -1, n = 3$

c) $y = 2: \; m = 0, n = 2$

d) $y = 6x: \; m = 6, n = 0$

12.64 Sin dibujar la gráfica, explica si son crecientes o decrecientes estas funciones.

a) $y = \frac{1}{4}x$ **b)** $y = 5x - 7$ **c)** $y = 2 - 3x$

a) Creciente

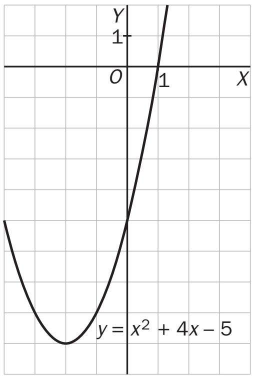
b) Creciente

c) Decreciente

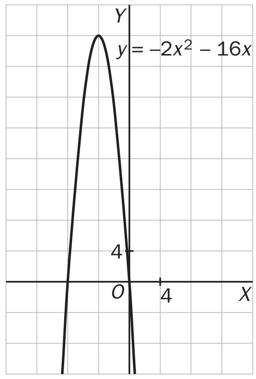
12.65 Calcula el vértice de las parábolas y luego dibújalas.

a) $y = x^2 + 4x - 5$ **b)** $y = x^2 - 9$ **c)** $y = -2x^2 - 16x$ **d)** $y = x^2 + 4x + 2$

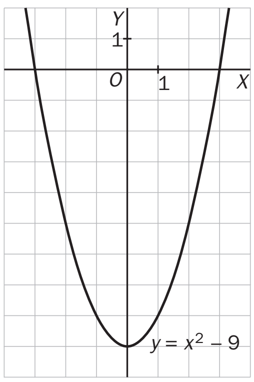
a) $x_v = -\dfrac{4}{2 \cdot 1} = -2$; $y_v = -9 \Rightarrow V(-2, -9)$



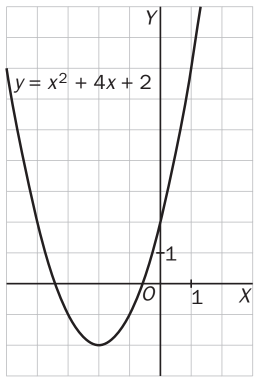
c) $x_v = -\dfrac{-16}{2 \cdot (-2)} = -4$; $y_v = 32 \Rightarrow V(-4, 32)$



b) $x_v = -\dfrac{0}{2 \cdot 2} = 0$; $y_v = -9 \Rightarrow V(0, -9)$



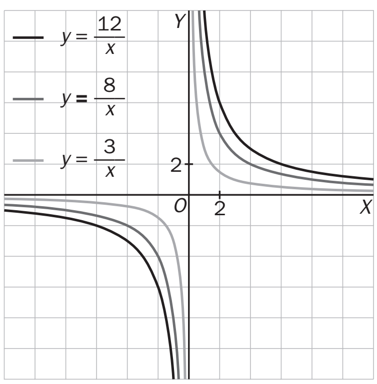
d) $x_v = -\dfrac{4}{2 \cdot 1} = -2$; $y_v = -2 \Rightarrow V(-2, -2)$



Funciones de proporcionalidad inversa y racionales. Asíntotas

12.66 Representa en los mismos ejes estas funciones.

a) $y = \dfrac{8}{x}$ **b)** $y = \dfrac{12}{x}$ **c)** $y = \dfrac{3}{x}$



12.67 Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $y = \dfrac{2x + 5}{x - 3}$ **b)** $y = \dfrac{4x^2}{16 - 8x}$ **c)** $y = \dfrac{x}{x^2 - x - 12}$ **d)** $y = \dfrac{1 - x^2}{x^2 + 9x}$

a) $D(f) = \mathbf{R} - \{3\}$ b) $D(f) = \mathbf{R} - \{2\}$

c) $x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \dfrac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow D(f) = \mathbf{R} - \{-3, 4\}$

d) $x^2 + 9x = 0 \Rightarrow x(x + 9) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -9 \Rightarrow \mathbf{R} - \{0, -9\}$

12.68 Halla las asíntotas de estas funciones.

a) $y = \dfrac{2}{x - 1}$ **b)** $y = \dfrac{3x + 2}{x + 5}$ **c)** $y = \dfrac{x^2}{x - 2}$

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2}{x - 1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2}{x - 1} = +\infty$. Tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{x - 1} = 0$; Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$; por tanto, no tiene asíntota oblicua.

b) $\lim\limits_{x \to -5^-} \dfrac{3x + 2}{x + 5} = +\infty$;$\lim\limits_{x \to -5^+} \dfrac{3x + 2}{x + 5} = -\infty$. Tiene asíntota vertical en $x = -5$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x + 2}{x + 5} = 3$. Tiene asíntota horizontal en $y = 3$; por tanto, no tiene asíntota oblicua.

c) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2}{x - 2} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2}{x - 2} = +\infty$. Tiene asíntota vertical en $x = 2$.

$\dfrac{x^2}{x - 2} = x + 2 + \dfrac{4}{x - 2}$. Tiene asíntota oblicua: $y = x + 2$.

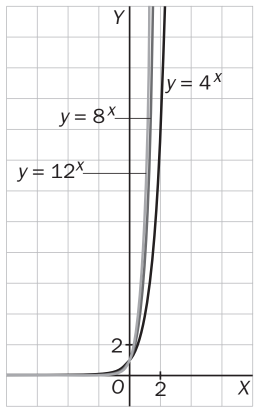
Funciones exponenciales y logarítmicas

12.69 Representa gráficamente estas funciones.

a) $y = 4^x$ **b)** $y = 8^x$ **c)** $y = 12^x$

¿Cuáles son crecientes y cuáles decrecientes?

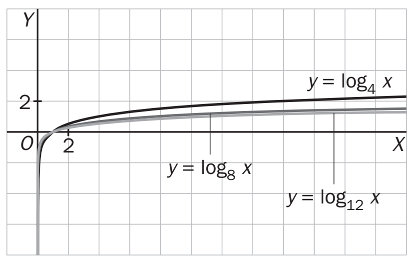
Todas son crecientes.



12.70 A partir de las funciones del ejercicio anterior, realiza la gráfica de las siguientes.

a) $y = \log_4 x$ **b)** $y = \log_8 x$ **c)** $y = \log_{12} x$

Al ser las recíprocas de las anteriores, son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante.



12.71 Escribe la recíproca de las siguientes funciones.

a) $y = \log_2 x$ **b)** $y = 7^x$ **c)** $y = \log_6 x$

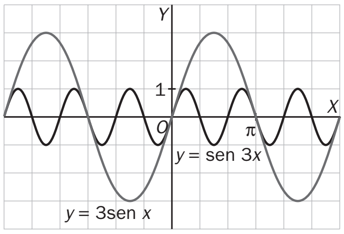
a) $y = 2^x$ b) $y = \log_7 x$ c) $y = 6^x$

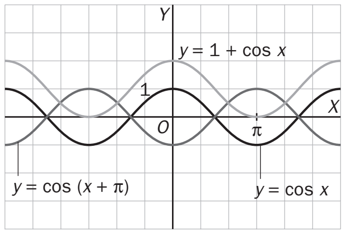
Funciones trigonométricas

12.72 Representa las siguientes funciones basándote en las gráficas de $y = \text{sen}\ x$ y de $y = \cos x$.

a) $y = \text{sen}(3x)$ **c)** $y = \cos(x + \pi)$

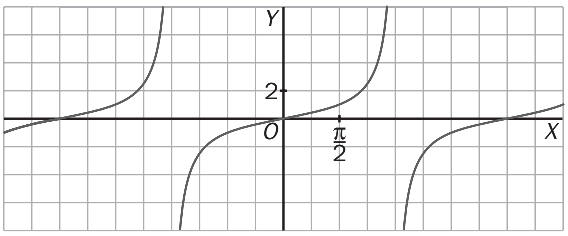
b) $y = 3\ \text{sen}\ x$ **d)** $y = 1 + \cos x$





12.73 De entre las siguientes funciones, ¿cuál corresponde a la función que se ha representado?

a) $y = \text{sen}(2x)$ **b)** $y = \text{tg}\ x$ **c)** $y = \text{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$



La función que corresponde a la que se ha representado es la c) $y = \text{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

AMPLIACIÓN

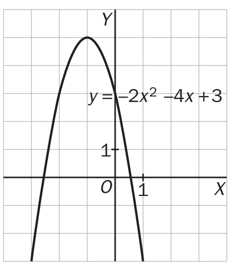
12.74 a) Calcula el valor que debe tener a para que la parábola $y = ax^2 - 4x + 3$ presente un máximo en el punto de abscisa -1.

b) Para el valor de a obtenido, halla el vértice de la parábola y represéntala gráficamente.

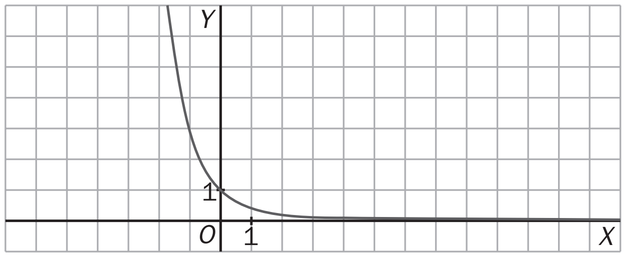
a) El máximo de una parábola es su vértice. La primera coordenada de este es $x_v = -\dfrac{b}{2a}$.

Sustituyendo el valor de x y el de b se obtiene: $-1 = -\dfrac{-4}{2a} \Rightarrow -2a = 4 \Rightarrow a = -2$.

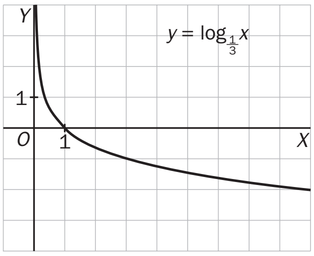
b) $y_v = -2 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 5 \Rightarrow V(-1, 5)$



12.75 **La siguiente gráfica, ¿corresponde a la función $y = 3^{-x}$ o $y = \log_{\frac{1}{3}} x$?**



Representa la otra función a partir de la que se ha dibujado.



La gráfica dada corresponde a la función $y = 3^{-x}$

12.76 **Si k y a son dos números reales cualesquiera, calcula las asíntotas de las siguientes funciones.**

a) $y = \dfrac{k}{x}$ b) $y = \dfrac{k}{x+a}$ c) $y = \dfrac{kx}{x+a}$ d) $y = \dfrac{kx^2}{x+a}$

a) Si $k > 0$ $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{k}{x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{k}{x} = +\infty$ Si $k < 0$ $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{k}{x} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{k}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{k}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{k}{x} = 0$

Tiene asíntota vertical en $x = 0$ y otra horizontal en $y = 0$. No tiene asíntota oblicua.

b) Si $k > 0$ $\lim\limits_{x\to -a^-} \dfrac{k}{x+a} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to -a^+} \dfrac{k}{x+a} = +\infty$ Si $k < 0$ $\lim\limits_{x\to -a^-} \dfrac{k}{x+a} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to -a^+} \dfrac{k}{x+a} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{k}{x+a} = 0$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{k}{x+a} = 0$

Tiene una asíntota vertical en $x = -a$ y otra horizontal en $y = 0$. No tiene asíntota oblicua.

c) Si $k > 0$

Si $a > 0$ $\lim\limits_{x\to -a^-} \dfrac{kx}{x+a} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to -a^+} \dfrac{kx}{x+a} = -\infty$ Si $a < 0$ $\lim\limits_{x\to -a^-} \dfrac{kx}{x+a} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to -a^+} \dfrac{kx}{x+a} = +\infty$

Si $k < 0$

Si $a > 0$ $\lim\limits_{x\to -a^-} \dfrac{kx}{x+a} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to -a^+} \dfrac{kx}{x+a} = +\infty$ Si $a < 0$ $\lim\limits_{x\to -a^-} \dfrac{kx}{x+a} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to -a^+} \dfrac{kx}{x+a} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{kx}{x+a} = k$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{kx}{x+a} = k$

Tiene una asíntota vertical en $x = -a$ y otra horizontal en $y = k$. No tiene asíntota oblicua.

d) Si $k > 0$

Si $a > 0$ $\lim\limits_{x\to -a^-} \dfrac{kx^2}{x+a} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to -a^+} \dfrac{kx^2}{x+a} = +\infty$ Si $a < 0$ $\lim\limits_{x\to -a^-} \dfrac{kx^2}{x+a} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to -a^+} \dfrac{kx^2}{x+a} = +\infty$

Si $k < 0$

Si $a > 0$ $\lim\limits_{x\to -a^-} \dfrac{kx^2}{x+a} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to -a^+} \dfrac{kx^2}{x+a} = -\infty$ Si $a < 0$ $\lim\limits_{x\to -a^-} \dfrac{kx^2}{x+a} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to -a^+} \dfrac{kx^2}{x+a} = -\infty$

$\dfrac{kx^2}{x-1} = kx + k + \dfrac{k}{x-1}$

Tiene una asíntota vertical, $x = -a$, y otra oblicua, $y = kx + k$.

12.77 **Halla el período de las siguientes funciones trigonométricas e indica en qué intervalo es suficiente estudiarlas.**

a) $y = \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $y = 4 + \text{tg}\left(\frac{2x}{3}\right)$

a) $\cos\left(3(x + T) + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 3(x + T) + \frac{\pi}{2} = 3x + \frac{\pi}{2} + 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$

b) $4 + \text{tg}\left(\frac{2(x + T)}{3}\right) = 4 + \text{tg}\left(\frac{2x}{3}\right) \Rightarrow \frac{2(x + T)}{3} = \frac{2x}{3} + \pi \Rightarrow T = \frac{3\pi}{2}$

12.78 **A partir de la expresión tg $x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$, calcula el dominio y las asíntotas verticales de la función $y = \text{tg } x$.**

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots$

El denominador se anula en los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$. Por tanto, $D(f) = \mathbf{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}, k = 1, 3, 5, 7\ldots\right\}$.

$\lim_{x \to (k\pi/2)^-} \frac{\text{sen } x}{\cos x} = +\infty$; $\lim_{x \to (k\pi/2)^+} \frac{\text{sen } x}{\cos x} = -\infty$

Tiene asíntotas verticales en las rectas $x = \frac{k\pi}{2}$, $k = 1, 3, 5, 7\ldots$

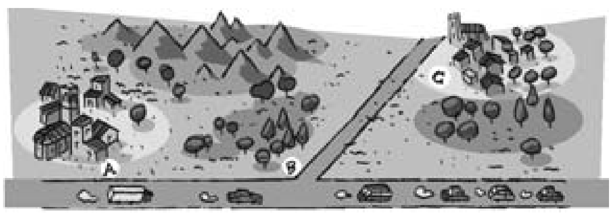
PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

12.79 **Nueva carretera**

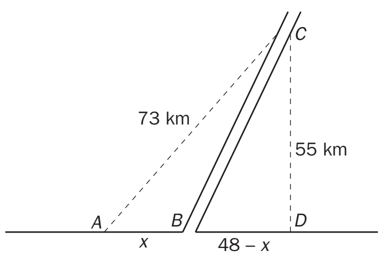
Las localidades *A* y *C* distan 73 kilómetros.

Por *A* cruza una autopista donde los automóviles pueden circular a una velocidad máxima de 120 kilómetros por hora. La distancia de la localidad *C* a la autopista es de 55 kilómetros.

Se desea construir una nueva carretera que salga de *C* y desemboque en algún punto de la autopista, *B*. Dicha vía está pensada para que los vehículos puedan circular a una velocidad máxima de 90 kilómetros por hora.



Escribe la función que determina el tiempo que se emplea en viajar de *A* a *C* dependiendo de la posición de *B*. Como caso particular, calcula lo que se tardará si *B* se encuentra a 20 kilómetros de *A*.



$AD = \sqrt{73^2 - 55^2} = 48$

Tiempo que se tarda en recorrer AB: $\frac{x}{120}$.

Tiempo que se tarda en recorrer BC: $\frac{\sqrt{55^2 + (48 - x)^2}}{90}$.

Tiempo que se tarda en ir de A a C:

$$t = \frac{x}{120} + \frac{\sqrt{3025 + 2304 + x^2 - 96x}}{90} = \frac{x}{120} + \frac{\sqrt{5329 - 96x + x^2}}{90}$$

$$t(20) = \frac{20}{120} + \frac{\sqrt{5329 - 96 \cdot 20 + 20^2}}{90} = 0{,}8524 \text{ h} = 51 \text{ min}$$

12.80 La presión atmosférica y la altura

Rocío está realizando un trabajo de investigación sobre cómo varia la presión atmosférica en relación con la altura sobre el nivel del mar. Como parte de su trabajo, ha buscado los siguientes datos.

Altura (m)	100	1100	2100	3100
Presión (mbar)	980	882	790	718

Ella ha propuesto el siguiente modelo para determinar la presión, p, a una determinada altura, h.

$$p = p_0 \cdot k^{\frac{h}{1000}}$$

a) Utiliza los dos primeros datos de la tabla para determinar los valores aproximados de p_0 y k según la propuesta de Rocío.

b) Rocío solo considerará válido el modelo si los otros dos datos se desvían menos del 1 % del valor predicho para ellos según su propuesta. ¿Debe considerarlo válido?

c) Calcula la presión, según el modelo de Rocío, a una altura de 4100 metros.

a) $\left.\begin{array}{l} 980 = p_0 \cdot k^{0,1} \\ 882 = p_0 \cdot k^{1,1} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{p_0 \cdot k^{1,1}}{p_0 \cdot k^{0,1}} = \dfrac{882}{980} \Rightarrow k = 0,9 \quad p_0 = \dfrac{980}{0,9^{0,1}} = 990 \Rightarrow p = 990 \cdot 0,9^{\frac{h}{1000}}$

b) Si $h = 2100$, $p = 990 \cdot 0,9^{2,1} = 793,5 \Rightarrow \dfrac{793,5}{790} = 1,004$

Si $h = 3100$, $p = 990 \cdot 0,9^{3,1} = 714,15 \Rightarrow \dfrac{714,15}{718} = 0,995$

Ninguno de estos valores se aleja más de un 1 % de los datos obtenidos. Por tanto, se acepta el modelo.

c) $p(4100) = 990 \cdot 0,9^{\frac{4100}{1000}} = 643$ milibares

AUTOEVALUACIÓN

12.A1 Indica de qué tipo es cada una de las funciones siguientes.

a) $y = 5 + x + 2x^2$

b) $y = \dfrac{3x^2 + x - 4}{x - 5}$

c) $y = -\dfrac{1}{3} \ln x$

d) $y = \dfrac{2}{x}$

e) $y = \left(\dfrac{3}{5}\right)^x$

f) $y = 1 - 6x$

a) Cuadrática

b) Racional

c) Logarítmica

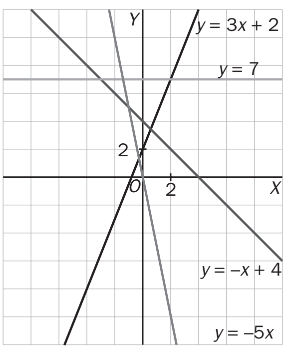
d) De proporcionalidad inversa

e) Exponencial

f) Lineal

12.A2 Representa gráficamente estas funciones lineales.

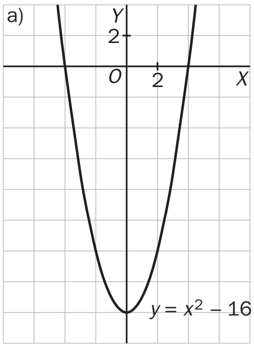
a) $y = 3x + 2$ **b)** $y = 4 - x$ **c)** $y = -5x$ **d)** $y = 7$



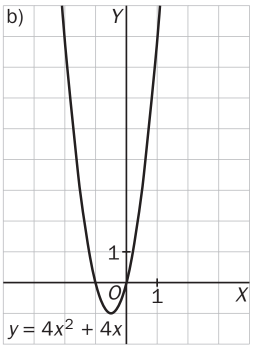
12.A3 Calcula el vértice de estas parábolas y dibújalas.

a) $y = x^2 - 16$ **b)** $y = 4x^2 + 4x$ **c)** $y = x^2 + 4x + 3$ **d)** $y = x^2 + x - 12$

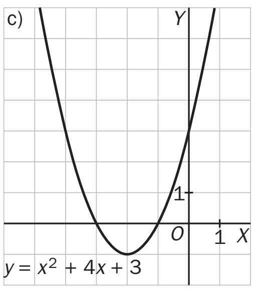
a) $x_v = -\frac{0}{2 \cdot 1} = 0;\ y_v = -16 \Rightarrow V(0, -16)$



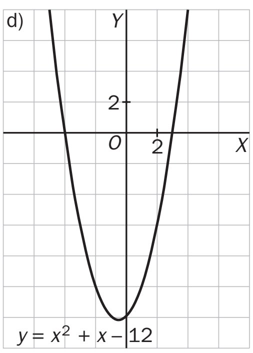
b) $x_v = -\frac{4}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2};\ y_v = -1 \Rightarrow V\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$



c) $x_v = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2;\ y_v = -1 \Rightarrow V\left(-2, -1\right)$

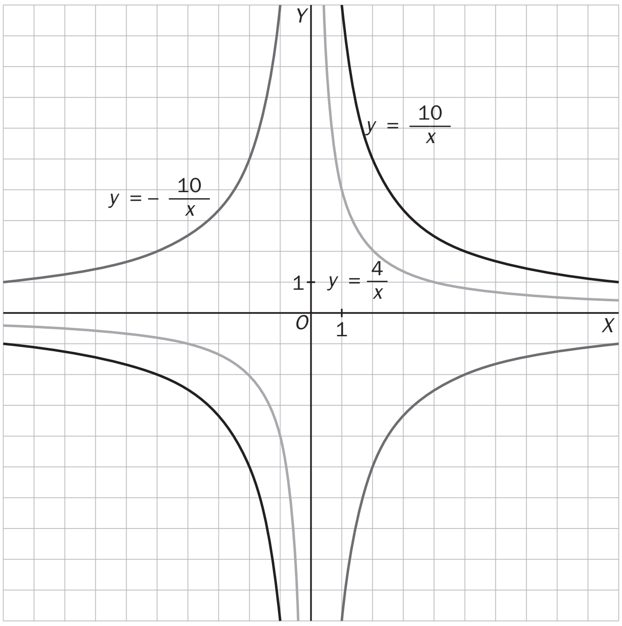


d) $x_v = -\frac{1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2};\ y_v = -\frac{49}{4} \Rightarrow V\left(-\frac{1}{2}, -\frac{49}{4}\right)$



12.A4 **Representa en los mismos ejes las siguientes funciones.**

a) $y = \dfrac{10}{x}$ **b)** $y = -\dfrac{10}{x}$ **c)** $y = \dfrac{4}{x}$



12.A5 **Escribe la recíproca de estas funciones.**

a) $y = 9^x$ **b)** $y = \log_6 x$ **c)** $y = e^x$

a) $y = \log_9 x$ b) $y = 6^x$ c) $y = \ln x$

12.A6 **Halla el dominio de las funciones siguientes.**

a) $y = \dfrac{3x}{2x - 12}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 4}{5x}$ **c)** $y = \dfrac{1}{x^2 + x}$ **d)** $y = \dfrac{x + 3}{x^2 - 4x - 5}$

a) $D(f) = \mathbf{R} - \{6\}$

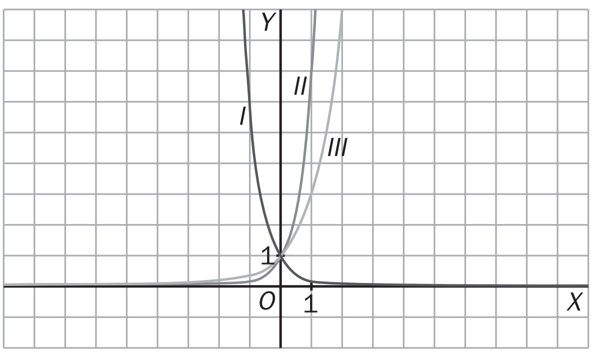
b) $D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$

c) $x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -1 \Rightarrow D(f) = \mathbf{R} - \{-1, 0\}$

d) $x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \dfrac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow D(f) = \mathbf{R} - \{-1, 5\}$

12.A7 **Identifica en tu cuaderno cada gráfica con la fórmula que le corresponde.**

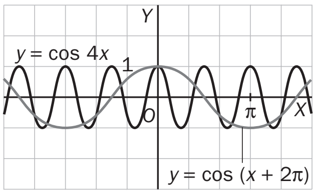
a) $y = 7^x$ **b)** $y = \left(\dfrac{1}{6}\right)^x$ **c)** $y = 3^x$



I) $y = \left(\dfrac{1}{6}\right)^x$ II) $y = 7^x$ III) $y = 3^x$

12.A8 **A partir de la gráfica de $y = \cos x$, representa las siguientes funciones.**

a) $y = \cos(x + 2\pi)$ **b)** $y = \cos(4x)$



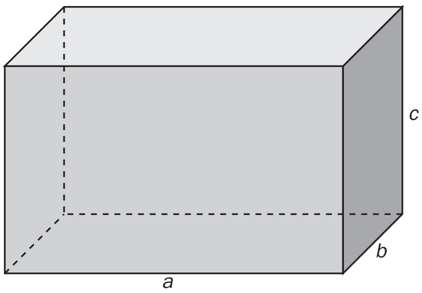
M U R A L D E M A T E M Á T I C A S

M A T E T I E M P O S

El equipaje de vuelo

Una compañía aérea tiene esta norma sobre la dimensión del equipaje que se puede transportar en sus aviones: "El equipaje de los pasajeros debe cumplir que la suma de sus tres dimensiones (largo, ancho y alto) no exceda de 1,80 metros." ¿Qué tamaño pueden tener las maletas para ser admitidas por esta compañía aérea?

El problema plantea la búsqueda de las dimensiones óptimas de un prisma sabiendo que la suma de sus tres dimensiones es de 1,80 m. Por comodidad, trabajaremos en adelante con decímetros, o sea, una suma de 18 dm, luego:



$a + b + c = 18 \quad \rightarrow \quad c = 18 - a - b$

De todos los prismas posibles, buscamos el que tenga mayor volumen. Este será:

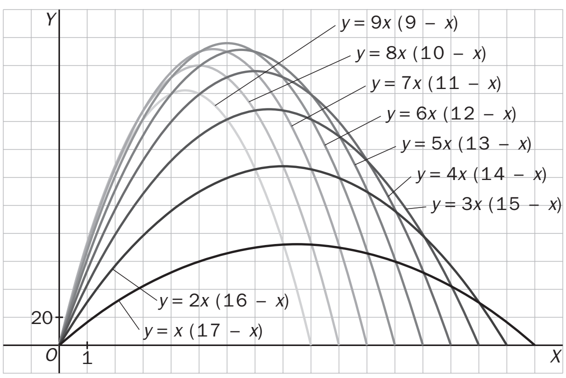
$V = abc = ab(18 - a - b) = 18ab - a^2b - ab^2$

Si damos diferentes valores a b, obtendremos una función $V(a)$ para cada valor de b.

Construimos una tabla.

b	1	2	3	4	5	...
$v(a)$	$a(17 - a)$	$2a(16 - a)$	$3a(15 - a)$	$4a(14 - a)$	$5a(13 - a)$	...

Si construimos una gráfica (con la ayuda de una calculadora gráfica) para cada valor de b entre 1 y 9, tenemos todas las posibilidades:



El máximo se produce cuando $a = 6$, $b = 6$ y $c = 18 - 6 - 6 = 6$, luego las dimensiones óptimas serán:

$a = 6 \text{ dm} = 60 \text{ cm}$

$b = 6 \text{ dm} = 60 \text{ cm}$

$c = 6 \text{ dm} = 60 \text{ cm}$