A-PDF Manual Split Demo. Purchase from www.A-PDF.com to remove the watermark

13 Aplicaciones de los principios de la dinámica

1 Cuando sobre la superficie de una carretera asfaltada hay agua o hielo es más peligroso circular. ¿Por qué?

El agua o el hielo forman entre la superficie del pavimento y los neumáticos del vehículo una especie de película extremadamente deslizante de forma que el coeficiente de rozamiento se reduce de forma drástica, en consecuencia las ruedas no se «agarran» correctamente al asfalto. El movimiento de rotación de los neumáticos no lleva consigo una fuerza de rozamiento que lo permita girar o frenar correctamente.

2 El coeficiente de rozamiento de una carretera horizontal y de otra inclinada es el mismo, sin embargo, el rozamiento no. ¿Por qué?

El coeficiente de rozamiento depende fundamentalmente de la naturaleza y del estado de las superficies puestas en contacto, por tanto, será independiente de si la carretera es horizontal o inclinada.

La fuerza de rozamiento es proporcional a la normal. Si la carretera es horizontal la normal tiene el mismo valor que el peso del cuerpo, mientras que si la carretera está inclinada, la normal es menor que el peso del cuerpo y, en consecuencia, la fuerza de rozamiento será menor.

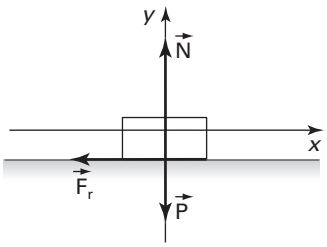
3 La fuerza de rozamiento se opone al movimiento. ¿Sería posible el movimiento de una persona o un coche si no hubiera rozamiento?

Cuando los vehículos, animales y personas inician el movimiento, lo hacen como resultado de las fuerzas de reacción correspondientes a las acciones ejercidas sobre el suelo por los mismos. Sin rozamiento no existirían dichas reacciones de forma que los vehículos harían girar las ruedas pero no se desplazarían. Las personas y animales se resbalarían («patinarían») sin poder moverse.

4 Sobre la superficie de un lago helado se lanza un taco de acero a la velocidad de 15 m/s. Si la fuerza de rozamiento dinámico es el 3% de su peso, ¿con qué aceleración se mueve el taco? ¿Qué espacio puede recorrer hasta pararse?

Sobre el taco solo existe aplicada en la dirección del movimiento la fuerza de rozamiento dinámico cuyo valor será:

$$F_r = \frac{3}{100} P = 0{,}03 \cdot m \cdot g$$



Esta fuerza tiene sentido contrario al del movimiento, por tanto, si tomamos la dirección del movimiento como eje x, y sentido positivo el del movimiento, la ecuación fundamental de la dinámica se escribiría como:

$$-F_r = m \cdot a \quad \rightarrow \quad a = -\frac{F_r}{m}$$

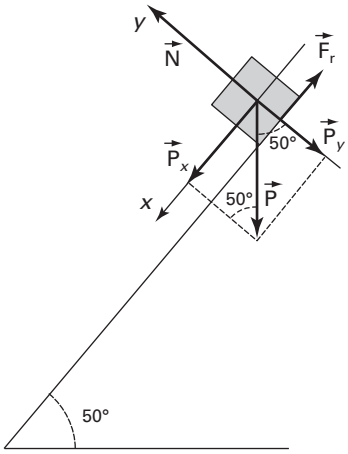
$$a = -\frac{0{,}03\ m \cdot g}{m} = -0{,}03\ g = -0{,}03 \cdot 9{,}81 = -0{,}29\ \text{m/s}^2$$

La aceleración obtenida es constante, en consecuencia, el movimiento del trozo de hielo será uniformemente decelerado. Por tanto:

$$v^2 = v_0^2 + 2\ a \cdot s \quad \rightarrow \quad s = \frac{v^2 - v_0^2}{2\ a} = \frac{0^2 - 15^2}{2 \cdot (-0{,}29)} = 388\ \text{m}$$

5 Se deja un cuerpo sobre un plano inclinado 50º con la horizontal. Si entre el cuerpo y el plano existe un coeficiente de rozamiento dinámico de 0,25, ¿cuál es la aceleración y cuál la velocidad a los 5 s?

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son:



- El peso **P**, en la dirección del radio terrestre y sentido hacia el centro de la Tierra.
- La normal **N**, perpendicular a la superficie de contacto y hacia arriba.
- La fuerza de rozamiento $\mathbf{F}_r$, en la dirección del movimiento y en sentido contrario.

Las proyecciones de estas fuerzas sobre los ejes son:

$$\mathbf{P} = (P_x, P_y) = (m \cdot g \cdot \sin 50°, -m \cdot g \cdot \cos 50°); \qquad \mathbf{N} = (0, N)$$

El valor de esta fuerza de rozamiento sería:

$$F_r = 0{,}25\ N$$

En consecuencia, la fuerza de rozamiento será:

$$\mathbf{F}_r = (-0{,}25\ N, 0)$$

Aplicamos la ecuación fundamental de la dinámica, $F_{total} = m \cdot a$, sobre cada uno de los ejes:

En el eje *y*:

$$N - m \cdot g \cdot \cos 50° = 0$$

En el eje *x*:

$$m \cdot g \cdot \sin 50° - 0{,}25 \cdot N = m \cdot a$$

Despejando la normal de la primera y sustituyendo en la segunda:

$$m \cdot a = m \cdot g \cdot \sin 50° - 0{,}25 \cdot m \cdot g \cdot \cos 50°$$

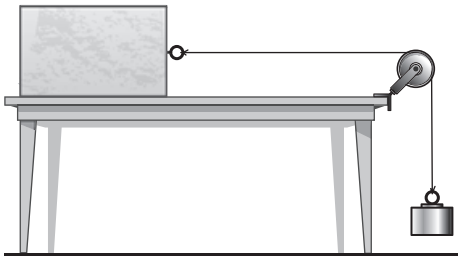
Simplificando por la masa y sustituyendo los datos:

$$a = g \cdot (\sin 50° - 0{,}25 \cdot \cos 50°) = 5{,}9\ \text{m/s}^2$$

La velocidad a los 5 s, si parte del reposo, es:

$$v = a \cdot t = 5{,}9 \cdot 5 = 29{,}5\ \text{m/s}$$

6 En una mesa hay un carrito de masa M = 150 g unido a la masa m = 20 g que cuelga mediante un hilo que pasa por una polea de masa despreciable. Si el sistema se mueve sin rozamiento, calcula la aceleración y la tensión del hilo.



Como el sistema consta de dos cuerpos conviene separarlos. En el carrito, la dirección de su movimiento y su sentido será el eje positivo de las *x*. Las fuerzas aplicadas son:

- El peso: $\mathbf{P} = (0, -M \cdot g)$.
- La normal: $\mathbf{N} = (0, N)$.
- La tensión de la cuerda: $\mathbf{T} = (T, 0)$.

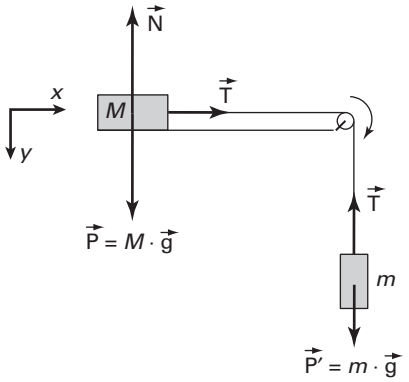
Aplicando: **F** = $m \cdot$ **a**, a cada uno de los ejes obtenemos:

En el eje x:

$$T = M \cdot a$$

En el eje y:

$$-N + M \cdot g = 0$$



En el otro cuerpo, la dirección del movimiento y su sentido será el eje y'. Las fuerzas aplicadas son:

- El peso: **P′** = (0, $m \cdot g$).
- La tensión de la cuerda: **T** = (0, $-T$).

Aplicando la ecuación del segundo principio al eje y, obtenemos para el segundo cuerpo:

$$m \cdot g - T = m \cdot a$$

En definitiva disponemos de dos ecuaciones con dos incógnitas, la tensión de la cuerda T, y la aceleración del sistema a:

$$T = M \cdot a$$
$$m \cdot g - T = m \cdot a$$

El sistema se puede resolver sumando las ecuaciones y despejando la aceleración:

$$a = \frac{m}{M + m} \cdot g \quad \rightarrow \quad a = 1{,}15 \text{ m/s}^2$$

La tensión se obtiene sustituyendo la aceleración en una cualquiera de las ecuaciones:

$$T = 0{,}17 \text{ N}$$

7 Sobre una mesa hay un taco de madera de 500 g unido, mediante un hilo que pasa por una polea de masa despreciable, a otro de 250 g que cuelga. Si los coeficientes de rozamiento estático y cinético son $\mu_e = 0{,}30$ y $\mu_c = 0{,}25$, respectivamente:

a) Demuestra si se deslizará el taco de la madera.

b) En caso afirmativo, halla la aceleración y la tensión del hilo.

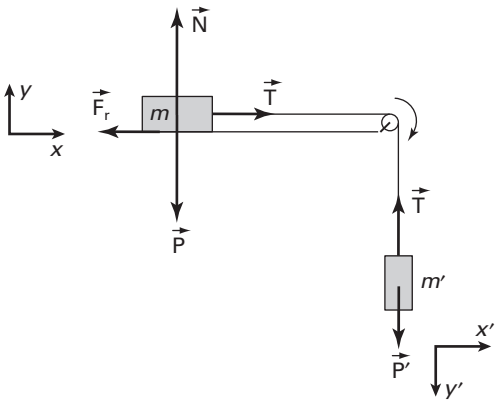
a) El sistema se moverá si el peso del cuerpo que cuelga del hilo es mayor que la fuerza de rozamiento estático máxima entre el taco sobre la mesa y la propia mesa.

$$m' \cdot g > \mu \cdot m \cdot g \quad \rightarrow \quad m' > \mu \cdot m \quad \rightarrow \quad 0{,}25 > 0{,}30 \cdot 0{,}5 = 0{,}15$$

En consecuencia, se mueve.

b) Como el sistema consta de dos cuerpos conviene separarlos. En el cuerpo apoyado sobre el plano, la dirección de su movimiento y su sentido será el eje positivo de las x. Las fuerzas aplicadas son:

- El peso: **P** = (0, $-m \cdot g$).
- La normal: **N** = (0, N).
- La fuerza de rozamiento una vez el taco está en movimiento: $\mathbf{F}_r = (-\mu' \cdot N, 0)$.
- La tensión de la cuerda: **T** = (T, 0).



Aplicando que **F** = m · **a**, a cada uno de los ejes obtenemos:

En el eje x:

$$T - \mu' \cdot N = m \cdot a$$

En el eje y:

$$N - m \cdot g = 0$$

Despejando la normal de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera obtenemos:

$$T - \mu' \cdot m \cdot g = m \cdot a$$

En el otro cuerpo, la dirección del movimiento y su sentido será el eje positivo de las *y*. Las fuerzas aplicadas son:

- El peso: **P'** = (0, $m' \cdot g$).
- La tensión de la cuerda: **T** = (0, $-T$).

Aplicando la ecuación del segundo principio al eje *y*, obtenemos para el segundo cuerpo:

$$m' \cdot g - T = m' \cdot a$$

En definitiva disponemos de dos ecuaciones con dos incógnitas, la tensión de la cuerda *T*, y la aceleración del sistema *a*:

$$T - \mu' \cdot m \cdot g = m \cdot a$$
$$m' \cdot g - T = m' \cdot a$$

El sistema se puede resolver sumando las ecuaciones y despejando la aceleración:

$$a = \frac{(m' - \mu' \cdot m)}{m + m'} \cdot g \quad \rightarrow \quad a = \frac{(0{,}25 - 0{,}25 \cdot 0{,}5)}{0{,}5 + 0{,}25} \cdot g = 1{,}64 \text{ m/s}^2$$

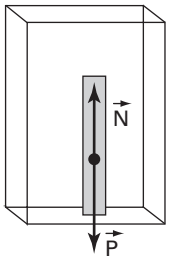
La tensión se obtiene sustituyendo la aceleración en una cualquiera de las ecuaciones:

$$T = 2{,}04 \text{ N}$$

8 Una joven de $m = 55$ kg está dentro de un ascensor que desciende con aceleración constante de 1 m/s^2. ¿Qué fuerza ejerce el suelo del ascensor sobre la joven?

Tomando el sistema de referencia fuera del ascensor y sentido positivo el del movimiento, se ve bajar a la joven con aceleración *a*.

Las fuerzas que actúan sobre la joven son:



- El peso: **P** = (0, $m \cdot g$).
- La normal: **N** = (0, $-N$).

Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica al eje *y*, obtenemos:

$$m \cdot g - N = m \cdot a \quad \rightarrow \quad N = m \cdot (g - a) = 55 \cdot (9{,}81 - 1) = 485 \text{ N}$$

9 Un péndulo está constituido por una esfera de 300 g de masa que cuelga mediante un hilo del techo de un vagón de tren. Si partiendo del reposo el tren acelera con una aceleración constante de 3 m/s^2, el péndulo se desplaza un cierto ángulo de su posición de equilibrio.

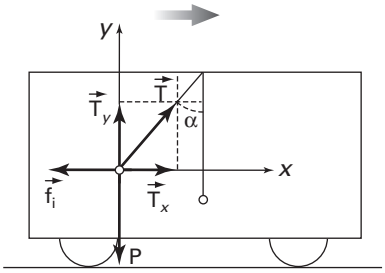
a) ¿En qué dirección y sentido se desplaza la masa del péndulo?

b) ¿Qué ángulo forma el péndulo con la vertical mientras dura la aceleración?

c) ¿Cuál es la tensión del hilo?

a) La masa se desplaza en la dirección del movimiento del vagón y en sentido contrario a este.

b) Tomando el sistema de referencia dentro del vagón, se ve el péndulo, en reposo, inclinado un ángulo α hacia la parte posterior del vagón debido a la fuerza de inercia, f_i.



Las fuerzas aplicadas son:

- El peso: **P** = (0, $-m \cdot g$).
- La tensión del hilo: **T** = (T_x, T_y) = ($T \cdot \sin \alpha$, $T \cdot \cos \alpha$).
- La fuerza de inercia: $\mathbf{f}_i$ = ($-m \cdot a$, 0).

Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica a cada uno de los ejes, recordando que el péndulo está en reposo respecto al vagón, obtenemos:

En el eje *x*:

$$T \cdot \sin \alpha - m \cdot a = 0$$

En el eje *y*:

$$T \cdot \cos \alpha - m \cdot g = 0$$

Si despejamos los términos en los que está la tensión y dividimos obtenemos:

$$\tan \alpha = \frac{m \cdot a}{m \cdot g} = \frac{a}{g} = 0{,}31 \quad \rightarrow \quad \alpha = 17°$$

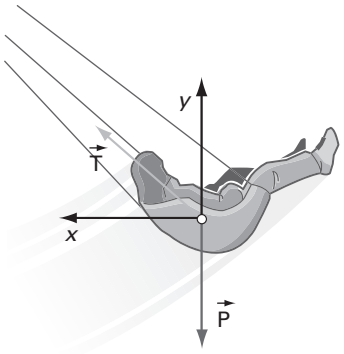
c) La tensión se obtiene sustituyendo el ángulo en cualquiera de las ecuaciones:

$$T = \frac{m \cdot a}{\sin \alpha} = \frac{0{,}3 \cdot 3}{\sin 17°} = 3{,}1 \text{ N}$$

10 En las sillas voladoras, la plataforma superior tiene un radio r_p = 11 m, y la longitud de las cadenas de las que cuelgan las sillas es l = 5 m.

a) ¿Con qué velocidad angular, ω, se debe hacer girar la plataforma para que las sillas se separen de la vertical un ángulo de 30º?

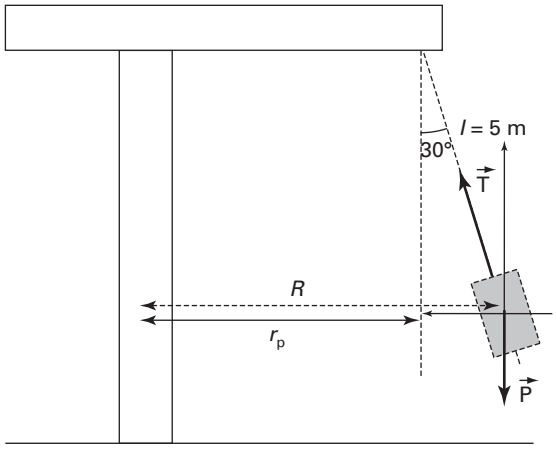
b) ¿Qué tiempo se tardaría en dar una vuelta?



a) Resolveremos el ejercicio respecto de un observador situado fuera de la atracción.

Sobre la silla actúan las siguientes fuerzas:

- El peso: **P** = (0, $-m \cdot g$).
- La tensión **T** = ($T \cdot \sin 30°$, $T \cdot \cos 30°$).



Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica a cada uno de los ejes obtenemos:

En el eje *x*:

$$T \cdot \sin 30° = m \cdot a_c = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

En el eje *y*:

$$T \cdot \cos 30° - m \cdot g = 0 \quad \rightarrow \quad T \cdot \cos 30° = m \cdot g$$

Dividiendo entre sí estas ecuaciones, obtenemos:

$$\tan 30° = \frac{\omega^2 \cdot R}{g}$$

Despejando la velocidad angular obtenemos:

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot \tan 30°}{R}}$$

El radio de la circunferencia que describe la silla, R, será:

$$R = r_p + l \cdot \sin 30° = 11 + 5 \cdot \sin 30° = 13{,}5 \text{ m}$$

Sustituyendo los datos:

$$\omega = \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot \tan 30°}{13{,}5}} = 0{,}65 \text{ rad/s}$$

b) El periodo sería:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0{,}65} = 9{,}7 \text{ s}$$

11 Con una honda de 50 cm de cuerda se lanza una piedra de 100 g con una velocidad de 25 m/s. Suponiendo que la honda gira en un plano vertical, determina en el instante anterior al lanzamiento:

a) La velocidad angular de la piedra en rad/s y rpm.

b) La tensión de la cuerda.

c) La relación en la que se encuentra la tensión de la cuerda con el peso de la piedra.

a) La velocidad angular está relacionada con la velocidad lineal en la forma:

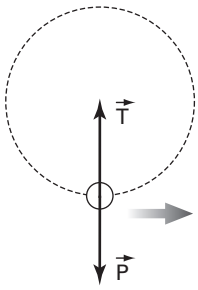
$$v = \omega \cdot R \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{v}{R} = \frac{25}{0{,}5} = 50 \text{ rad/s}$$

Expresada en rpm sería:

$$\omega = 50 \cdot \frac{1/2\pi \text{ rev}}{1/60 \text{ min}} = 50 \cdot \frac{60}{2\pi} \text{ rpm} = 477 \text{ rpm}$$

b) En el punto de abajo, cuando se produce el lanzamiento, las fuerzas que actúan sobre la piedra de la honda son:

- El peso: $\mathbf{P} = (0, -m \cdot g)$.
- La tensión de la cuerda: $\mathbf{T} = (0, T)$.



Aplicando el segundo principio, teniendo en cuenta que la aceleración que existe es la aceleración centrípeta, obtenemos:

$$T - m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{R} \quad \rightarrow \quad T = m \cdot \frac{v^2}{R} + m \cdot g = 0{,}1 \cdot \frac{25^2}{0{,}5} + 0{,}1 \cdot 9{,}81 = 126 \text{ N}$$

c) La relación entre la tensión de la cuerda y el peso será:

$$\frac{T}{P} = \frac{126}{0{,}1 \cdot 9{,}81} = 128$$

La tensión es 128 veces mayor que el peso.

12 Un cuerpo está en reposo sobre un plano horizontal cuyo coeficiente de rozamiento estático vale μ, sin que se ejerzan fuerzas sobre él en la dirección horizontal.

a) ¿Existe fuerza de rozamiento?

b) ¿Qué significado tiene la expresión $F_r = \mu \cdot N$, para la fuerza de rozamiento?

a) No, si el cuerpo está en reposo y no se ejercen fuerzas sobre él, aunque haya un coeficiente de rozamiento entre el plano y el cuerpo, no habrá fuerza de rozamiento mientras no se intente cambiar el estado de movimiento del cuerpo.

b) Cuando ejercemos una fuerza **F**, para mover el cuerpo horizontalmente, la fuerza de rozamiento estático crece desde cero hasta $\mu \cdot N$. De esta forma cuando $F > \mu \cdot N$, el cuerpo cambia su estado

de movimiento. El valor, $F_r = \mu \cdot N$, es, por tanto, el valor máximo de la fuerza de rozamiento estático.

En consecuencia, si sobre un cuerpo en reposo ejercemos una fuerza F, puede ocurrir:

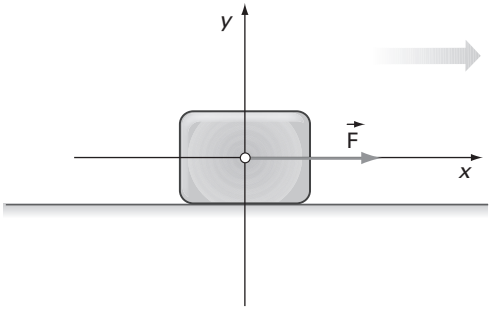
- $F < \mu \cdot N \rightarrow$ Hay fuerza de rozamiento estático, $F_r = F$, y no hay movimiento.
- $F = \mu \cdot N \rightarrow$ Hay fuerza de rozamiento estático, $F_r = \mu \cdot N$, y no hay cambios en el estado de movimiento del cuerpo.
- $F > \mu \cdot N \rightarrow$ Hay fuerza de rozamiento dinámico, $F_r = \mu \cdot N$, y hay cambios en el estado de movimiento del cuerpo.

13 Explica la diferencia entre los coeficientes estático y cinético de rozamiento ¿Cómo se definen? ¿Cuál es mayor?

El coeficiente estático de rozamiento es el cociente entre la fuerza necesaria para iniciar el movimiento de un cuerpo y la normal.

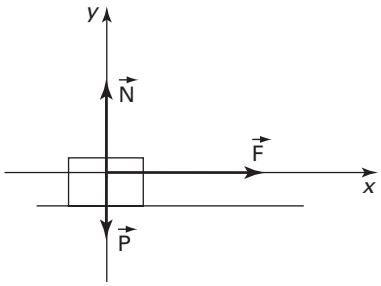
El coeficiente cinético de rozamiento es el cociente entre la fuerza necesaria para mantener un cuerpo con movimiento uniforme y la normal. Este coeficiente es algo menor que el estático.

14 Bajo la acción de una fuerza de 8 N, un taco de madera cuya masa es de 1,4 kg se mueve en un plano horizontal con una aceleración de 4 m/s^2. Demuestra si hay rozamiento y, si lo hay, halla el coeficiente.



Supongamos que no existe rozamiento. Las fuerzas que actúan sobre el objeto son:

- El peso **P**, en la dirección del radio terrestre y hacia el centro de la Tierra: **P** = (0, $-m \cdot g$).
- La normal, **N**, reacción del suelo sobre el cuerpo, perpendicular a la superficie de apoyo y hacia arriba: **N** = (0, N).
- La fuerza **F**, ejercida sobre el objeto: **F** = (F, 0).



Aplicamos el segundo principio a cada uno de los ejes.

Sobre el eje y no hay movimiento, por tanto, al aplicar el segundo principio en este eje queda:

$$N - m \cdot g = 0 \rightarrow N = m \cdot g$$

Sobre el eje x existe aceleración, por tanto:

$$F = m \cdot a \rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{8}{1{,}4} = 5{,}7 \text{ m/s}^2$$

Como la aceleración del movimiento es menor, tiene que existir rozamiento, de forma que la ecuación sobre el eje x, sería:

$$F - F_r = m \cdot a \rightarrow F - \mu \cdot N = m \cdot a \rightarrow F - \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a$$

Despejando el coeficiente de rozamiento obtenemos:

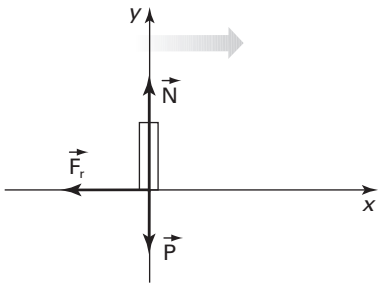
$$\mu = \frac{F - m \cdot a}{m \cdot g} = \frac{8 - 1{,}4 \cdot 4}{1{,}4 \cdot 9{,}81} = 0{,}17$$

15 Un patinador se desliza sobre una pista de hielo horizontal, manteniendo una velocidad de 3,5 m/s. Si el coeficiente de rozamiento entre los patines y el hielo es 0,03 y el patinador deja de impulsarse, ¿qué distancia recorrerá hasta pararse?

Cuando el patinador deja de impulsarse, la única fuerza que actúa sobre él en la dirección del movimiento es la de rozamiento.

Las fuerzas aplicadas son:

- El peso del cuerpo: **P** = (0, $-m \cdot g$).
- La normal: **N** = (0, N).
- La fuerza de rozamiento: $\mathbf{F}_r = (-\mu \cdot N, 0)$.



Aplicando el segundo principio de la dinámica, **F** = $m \cdot$ **a**, sobre cada uno de los ejes obtenemos:

En el eje x:

$$-\mu \cdot N = m \cdot a$$

En el eje y:

$$N - m \cdot g = 0$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$a = -\mu \cdot g \quad \rightarrow \quad a = -0{,}29 \text{ m/s}^2$$

El patinador lleva aceleración constante en la dirección del movimiento y sentido contrario a este.

Si la velocidad v_0 = 3,5 m/s y se para, v = 0 m/s, el espacio recorrido será:

$$-v_0^2 = 2\,a \cdot s \quad \rightarrow \quad s = \frac{-v_0^2}{2\,a}$$

Sustituyendo los datos obtenemos:

$$s = 21 \text{ m}$$

16 Un cuerpo de 5 kg de masa se desliza por un plano horizontal. Al pasar por un punto, su velocidad es de 7 m/s y se para 8 m más allá, por efecto del rozamiento. Calcula:

a) La aceleración del movimiento.

b) La fuerza de rozamiento.

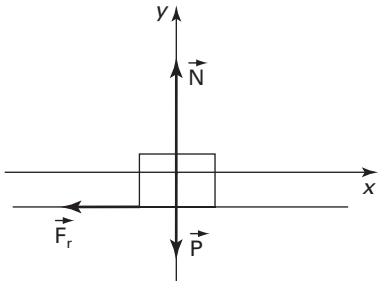
c) El coeficiente de rozamiento.

a) Conocidas las velocidades y el espacio recorrido, la aceleración será:

$$v^2 = v_0^2 + 2\,a \cdot s \quad \rightarrow \quad a = \frac{v^2 - v_0^2}{2\,s} = \frac{0 - 7^2}{2 \cdot 8} = -3{,}1 \text{ m/s}^2$$

b) Las fuerzas que actúan sobre el objeto son:

- El peso **P**, en la dirección del radio terrestre y hacia el centro de la Tierra: **P** = (0, $-m \cdot g$).
- La normal, **N**, reacción del suelo sobre el cuerpo, perpendicular a la superficie de apoyo y hacia arriba: **N** = (0, N).
- La fuerza de rozamiento, $\mathbf{F}_r$, en la dirección del movimiento y en sentido contrario: $\mathbf{F}_r = (-F_r, 0)$.



Aplicamos el segundo principio a cada uno de los ejes.

Sobre el eje y no hay movimiento; por tanto, al aplicar el segundo principio en este eje queda:

$$N - m \cdot g = 0 \quad \rightarrow \quad N = m \cdot g$$

Sobre el eje x existe aceleración, por tanto:

$$-F_r = m \cdot a = 5 \cdot (-3{,}1) = -15{,}5 \text{ N} \quad \rightarrow \quad F_r = 15{,}5 \text{ N}$$

c) El coeficiente de rozamiento se obtiene de la definición del valor de la fuerza de rozamiento:

$$F_r = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g \quad \rightarrow \quad \mu = \frac{F_r}{m \cdot g} = \frac{15{,}5}{5 \cdot 9{,}81} = 0{,}32$$

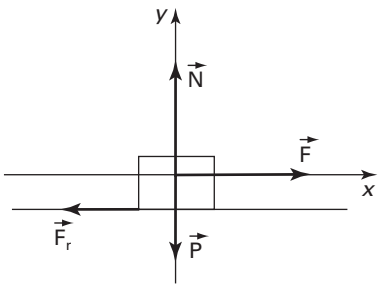
17 Un cuerpo de 10 kg se mueve en un plano horizontal por la acción de una fuerza paralela al plano de 75 N. Si el coeficiente de rozamiento es $\mu = 0{,}3$, calcula:

a) La aceleración del movimiento.

b) La velocidad a los 5 m de recorrido.

c) El tiempo que transcurre en esos 5 m.

a) Las fuerzas que actúan sobre el objeto son:



- El peso **P**, en la dirección del radio terrestre y hacia el centro de la Tierra: $\mathbf{P} = (0, -m \cdot g)$.
- La normal, **N**, reacción del suelo sobre el cuerpo, perpendicular a la superficie de apoyo y hacia arriba: $\mathbf{N} = (0, N)$.
- La fuerza **F**, ejercida sobre el objeto: $\mathbf{F} = (F, 0)$.
- La fuerza de rozamiento, $\mathbf{F}_r$, en la dirección del movimiento y sentido contrario: $\mathbf{F}_r = (-\mu \cdot N, 0)$.

Aplicamos el segundo principio a cada uno de los ejes.

Sobre el eje *y* no hay movimiento; por tanto, al aplicar el segundo principio en este eje queda:

$$N - m \cdot g = 0$$

Sobre el eje *x* existe aceleración, por tanto:

$$F - \mu \cdot N = m \cdot a$$

Despejando la normal de la primera ecuación y sustituyéndola en la segunda obtenemos:

$$F - \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a$$

Despejando la aceleración obtenemos:

$$a = \frac{F - \mu \cdot m \cdot g}{m} = \frac{75 - 0{,}3 \cdot 10 \cdot 9{,}81}{10} = 4{,}6 \text{ m/s}^2$$

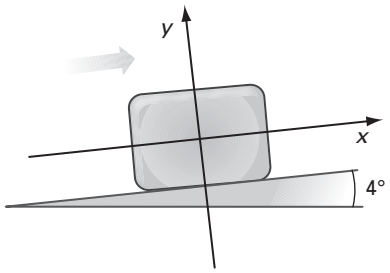
b) Conocidas la aceleración y el espacio, la velocidad será:

$$v = \sqrt{2\,a \cdot s} = \sqrt{2 \cdot 4{,}6 \cdot 5} = 6{,}8 \text{ m/s}$$

c) El tiempo se puede obtener a partir de la ecuación de la velocidad:

$$v = a \cdot t \quad \rightarrow \quad t = \frac{v}{a} = \frac{6{,}8}{4{,}6} = 1{,}5 \text{ s}$$

18 Un cuerpo se lanza con una velocidad de 6,50 m/s hacia arriba por una rampa inclinada 4º. Si el coeficiente de rozamiento vale $\mu = 0{,}25$, halla la aceleración de subida.

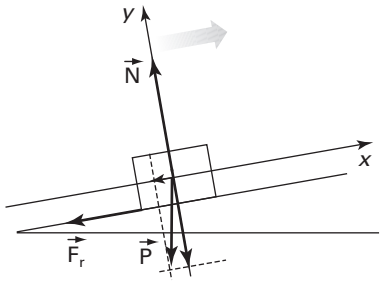


La dirección del movimiento y su sentido será el eje positivo de las *x*, el eje perpendicular a este será por tanto el de las *y*, con sentido positivo hacia arriba.

Las fuerzas aplicadas son:

- El peso: $\mathbf{P} = (-m \cdot g \cdot \sin 4°, -m \cdot g \cdot \cos 4°)$.
- La normal: $\mathbf{N} = (0, N)$.
- La fuerza de rozamiento: $\mathbf{F}_r = (-\mu \cdot N, 0)$.

Aplicando: $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$, a cada uno de los ejes, obtenemos:



En el eje x:

$$-m \cdot g \cdot \sin 4° - \mu \cdot N = m \cdot a$$

En el eje y:

$$N - m \cdot g \cdot \cos 4° = 0$$

Despejando la normal de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera queda:

$$-m \cdot g \cdot \sin 4° - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 4° = m \cdot a$$

Simplificando:

$$a = -g \cdot (\sin 4° + \mu \cdot \cos 4°)$$

Sustituyendo los datos obtenemos:

$$a = -3{,}1 \text{ m/s}^2$$

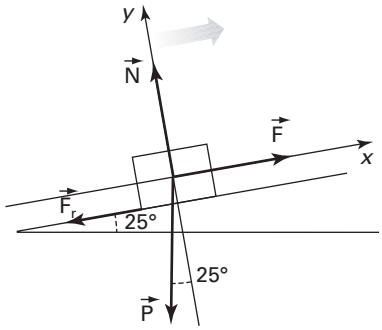
19 Un cuerpo de 25 kg sube por un plano inclinado 25º, cuyo coeficiente de rozamiento es $\mu = 0{,}25$, debido a que sobre él se aplica una fuerza de 300 N en la dirección del desplazamiento.

a) ¿Con qué aceleración asciende el cuerpo?

b) ¿Qué fuerza habría que aplicar en la dirección del desplazamiento para que el cuerpo suba con velocidad constante?

a) La dirección del movimiento y su sentido será el eje positivo de las x, el eje perpendicular a este será por tanto el de las y, con sentido positivo hacia arriba.

Las fuerzas aplicadas son:



- El peso: $\mathbf{P} = (-m \cdot g \cdot \sin 25°, -m \cdot g \cdot \cos 25°)$.
- La normal: $\mathbf{N} = (0, N)$.
- La fuerza de rozamiento: $\mathbf{F}_r = (-\mu \cdot N, 0)$.
- La fuerza aplicada: $\mathbf{F} = (F, 0)$.

Aplicando que $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$, a cada uno de los ejes obtenemos:

En el eje x:

$$F - m \cdot g \cdot \sin 25° - \mu \cdot N = m \cdot a$$

En el eje y:

$$N - m \cdot g \cdot \cos 25° = 0$$

Despejando la normal de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera queda:

$$F - m \cdot g \cdot \sin 25° - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 25° = m \cdot a$$

Despejando la aceleración:

$$a = \frac{F - m \cdot g \cdot (\sin 25° + \mu \cdot \cos 25°)}{m}$$

Sustituyendo los datos obtenemos:

$$a = 5{,}6 \text{ m/s}^2$$

b) Para que el cuerpo suba con velocidad constante la aceleración en el eje x, debe ser cero, por tanto, las ecuaciones serían:

En el eje x:

$$F - m \cdot g \cdot \sin 25° - \mu \cdot N = 0$$

En el eje *y*:

$$N - m \cdot g \cdot \cos 25° = 0$$

Despejando la normal de la segunda y sustituyendo en la primera queda:

$$F - m \cdot g \cdot \sin 25° - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 25° = 0$$

Despejando la fuerza:

$$F = m \cdot g \cdot (\sin 25° + \mu \cdot \cos 25°)$$

Sustituyendo los datos obtenemos:

$$F = 159 \text{ N}$$

20 Tenemos un plano inclinado de 10 m de longitud y 30º de ángulo.

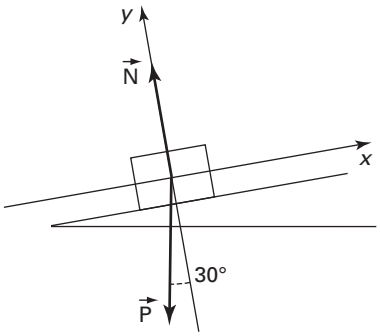
a) ¿Qué velocidad paralela al plano debe comunicarse a un cuerpo de masa 1 kg para que, al llegar al final del plano, la velocidad sea 0? Suponemos que no hay rozamiento.

b) Si existe un rozamiento de coeficiente $\mu = 0{,}1$, ¿cuánto tiempo tardaría en recorrer el plano?

c) La masa, una vez arriba, inicia el descenso. ¿Cuánto tiempo tardará en llegar otra vez al suelo? ¿Con qué velocidad llegará? Resuelve este apartado con y sin rozamiento.

a) Para calcular la velocidad hay que conocer la aceleración con la que sube el cuerpo.

La dirección del movimiento y su sentido será el eje positivo de las *x*, el eje perpendicular a este será, por tanto, el de las *y*, con sentido positivo hacia arriba.



Las fuerzas aplicadas son:

- El peso: $\mathbf{P} = (-m \cdot g \cdot \sin 30°, -m \cdot g \cdot \cos 30°)$.
- La normal: $\mathbf{N} = (0, N)$.

Aplicando que $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$, a cada uno de los ejes obtenemos:

En el eje *x*:

$$-m \cdot g \cdot \sin 30° = m \cdot a$$

En el eje *y*:

$$N - m \cdot g \cdot \cos 30° = 0$$

Directamente de la primera obtenemos la aceleración:

$$a = -g \cdot \sin 30° = -4{,}91 \text{ m/s}^2$$

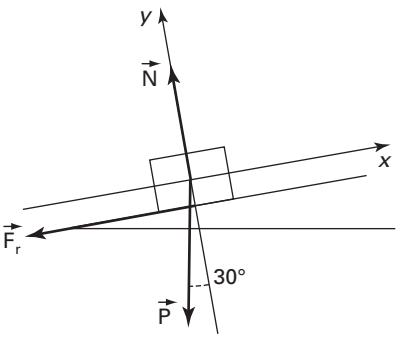
Conocida la aceleración, la velocidad inicial v_0, para que suba los 10 m por el plano, se puede calcular a partir de:

$$v^2 = v_0^2 + 2\,a \cdot s \quad \rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2 \cdot 4{,}91 \cdot 10} = 9{,}9 \text{ m/s}$$

b) La aceleración en este caso habría que volver a calcularla.

Las fuerzas aplicadas son:

- El peso: $\mathbf{P} = (-m \cdot g \cdot \sin 30°, -m \cdot g \cdot \cos 30°)$.
- La normal: $\mathbf{N} = (0, N)$.
- La fuerza de rozamiento: $\mathbf{F}_r = (-\mu \cdot N, 0)$.



Aplicando que $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$, a cada uno de los ejes obtenemos:

En el eje *x*:

$$-m \cdot g \cdot \sin 30° - \mu \cdot N = m \cdot a$$

En el eje *y*:

$$N - m \cdot g \cdot \cos 30° = 0$$

Despejando la normal de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera:

$$-m \cdot g \cdot \sin 30° - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30° = m \cdot a$$

Simplificando:

$$a = -g \cdot (\sin 30° + \mu \cdot \cos 30°)$$

Sustituyendo los datos obtenemos:

$$a = -5{,}8 \text{ m/s}^2$$

La velocidad inicial en este caso sería:

$$v^2 = v_0^2 + 2\,a \cdot s \;\rightarrow\; v_0 = \sqrt{2 \cdot 5{,}8 \cdot 10} = 10{,}8 \text{ m/s}$$

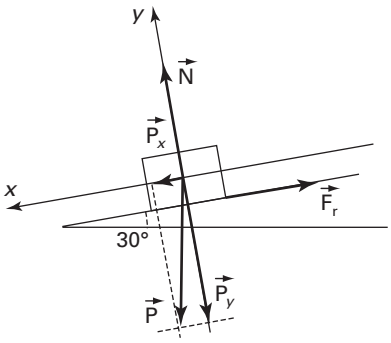
El tiempo empleado en recorrer el plano sería:

$$v - v_0 = a \cdot t \;\rightarrow\; t = \frac{10{,}8}{5{,}8} = 1{,}9 \text{ s}$$

c) Resolveremos primero en el caso de que exista rozamiento. La aceleración de bajada se calcula a partir de las ecuaciones de la dinámica.

Las fuerzas aplicadas son:

- El peso: **P** = ($m \cdot g \cdot \sin 30°$, $-m \cdot g \cdot \cos 30°$).
- La normal: **N** = (0, N).
- La fuerza de rozamiento: $\mathbf{F_r}$ = ($-\mu \cdot N$, 0).



Aplicando que **F** = $m \cdot$ **a**, a cada uno de los ejes obtenemos:

En el eje x:

$$m \cdot g \cdot \sin 30° - \mu \cdot N = m \cdot a$$

En el eje y:

$$N - m \cdot g \cdot \cos 30° = 0$$

Despejando la normal de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera queda:

$$m \cdot g \cdot \sin 30° - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30° = m \cdot a$$

Simplificando:

$$a = g \cdot (\sin 30° - \mu \cdot \cos 30°)$$

Sustituyendo los datos obtenemos:

$$a = 4{,}1 \text{ m/s}^2$$

La velocidad inicial es cero, por tanto:

$$v^2 = v_0^2 + 2\,a \cdot s \;\rightarrow\; v = \sqrt{2 \cdot 4{,}1 \cdot 10} = 9{,}1 \text{ m/s}$$

El tiempo empleado en recorrer el plano sería:

$$v - v_0 = a \cdot t \;\rightarrow\; t = \frac{9{,}1}{4{,}1} = 2{,}2 \text{ s}$$

Si no existe rozamiento basta sustituir $\mu = 0$, para obtener los resultados:

$$a = g \cdot \sin 30°$$

Sustituyendo los datos obtenemos:

$$a = 4{,}91 \text{ m/s}^2$$

La velocidad al final del plano será:

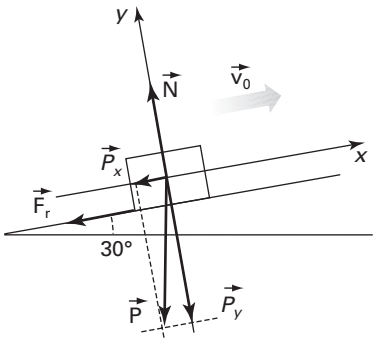
$$v^2 = v_0^2 + 2\,a \cdot s \;\rightarrow\; v = \sqrt{2 \cdot 4{,}91 \cdot 10} = 9{,}9 \text{ m/s}$$

El tiempo empleado en recorrer el plano sería:

$$v - v_0 = a \cdot t \quad \rightarrow \quad t = \frac{9{,}9}{4{,}91} = 2{,}0 \text{ s}$$

21 Un cuerpo de 5 kg es lanzado a la velocidad de 11 m/s por un plano inclinado 30º con la horizontal. Si el coeficiente de rozamiento es $\mu = 0{,}25$, calcula la aceleración y el espacio que recorre hasta detenerse. Indica si las soluciones son las mismas con otra masa.

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son:



- El peso **P**, en la dirección del radio terrestre y hacia el centro de la Tierra: **P** = ($-m \cdot g \cdot \sin 30°$, $-m \cdot g \cdot \cos 30°$).
- La normal, **N**, reacción del plano sobre el cuerpo, perpendicular a la superficie de apoyo y hacia arriba: **N** = (0, N).
- La fuerza de rozamiento, $\mathbf{F}_r$, en la dirección del movimiento y sentido contrario: $\mathbf{F}_r = (-\mu \cdot N, 0)$.

Aplicando el segundo principio a los dos ejes tenemos:

En el eje y no hay movimiento, en consecuencia:

$$N - m \cdot g \cdot \cos 30° = 0 \quad \rightarrow \quad N = m \cdot g \cdot \cos 30°$$

En el eje x:

$$-m \cdot g \cdot \sin 30° - \mu \cdot N = m \cdot a$$

Sustituyendo el valor de la normal en esta ecuación:

$$-m \cdot g \cdot \sin 30° - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30° = m \cdot a \quad \rightarrow \quad a = -g \cdot \sin 30° - \mu \cdot g \cdot \cos 30°$$

Podemos sacar factor común a la aceleración de la gravedad y obtenemos:

$$a = -g \cdot (\sin 30° + \mu \cdot \cos 30°) = -9{,}81 \cdot (\sin 30° + 0{,}25 \cdot \cos 30°) = -7 \text{ m/s}^2$$

Conocidas las velocidades y la aceleración, el espacio será:

$$v^2 = v_0^2 + 2\,a \cdot s \quad \rightarrow \quad s = \frac{v^2 - v_0^2}{2\,a} = \frac{0 - 11^2}{2 \cdot (-7)} = 8{,}6 \text{ m}$$

Los resultados son independientes del valor de la masa.

22 Un cuerpo recorre 10 m en una rampa de 45º al deslizarse sin velocidad inicial durante 1,75 s. Si su masa es de 1,5 kg, calcula:

a) La aceleración media.

b) La fuerza neta.

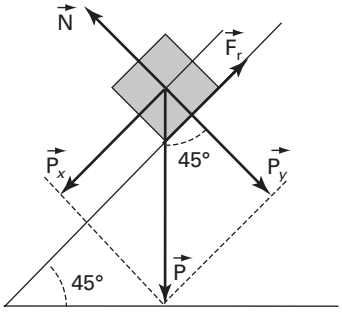
c) La fuerza que se opone al deslizamiento.

a) La aceleración del cuerpo si recorre un espacio de 10 m, partiendo con velocidad cero, en 1,75 s será:

$$s = \frac{1}{2}\,a \cdot t^2 \quad \rightarrow \quad a = \frac{2\,s}{t^2} = \frac{2 \cdot 10}{1{,}75^2} = 6{,}5 \text{ m/s}^2$$

b) La fuerza neta se calcula directamente aplicando el segundo principio:

$$F = m \cdot a \quad \rightarrow \quad F = 1{,}5 \cdot 6{,}5 = 9{,}75 \text{ N}$$



c) Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son:

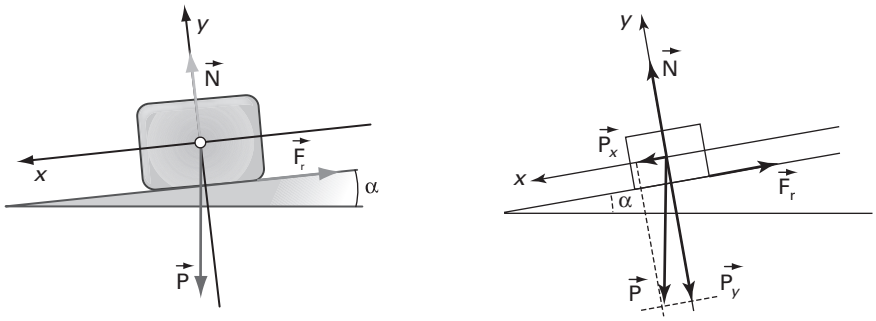
- El peso **P**, en la dirección del radio terrestre y hacia el centro de la Tierra: **P** = ($m \cdot g \cdot \sin 45°$, $-m \cdot g \cdot \cos 45°$).
- La normal, **N**, reacción del plano sobre el cuerpo, perpendicular a la superficie de apoyo y hacia arriba: **N** = (0, N).

- La fuerza de rozamiento, $\mathbf{F}_r$, en la dirección del movimiento y sentido contrario: $\mathbf{F}_r = (-F_r, 0)$.

Sobre el eje del movimiento la fuerza total es:

$$F = m \cdot g \cdot \sin 45° - F_r \;\rightarrow\; F_r = m \cdot g \cdot \sin 45° - F \;\rightarrow\; F_r = 1{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot \sin 45° - 9{,}75 = 0{,}66 \text{ N}$$

23 Si no tienes dinamómetro ¿cómo determinarías el coeficiente estático entre un cuerpo y el material sobre el que se desliza?



Lo normal es medir los coeficientes de rozamiento mediante un plano inclinado. Se coloca el cuerpo sobre un plano que se va inclinando poco a poco, el ángulo para el que el cuerpo comienza a deslizar permite calcular el coeficiente de rozamiento estático. En efecto, en el instante en que comienza el movimiento se cumple que:

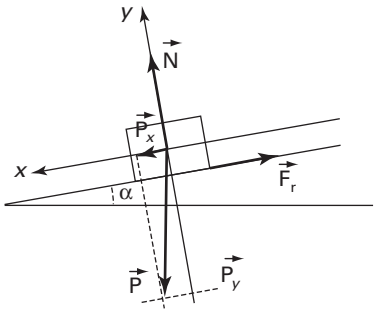
$$m \cdot g \cdot \sin \alpha - F_r = 0 \;\rightarrow\; m \cdot g \cdot \sin \alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha = 0 \;\rightarrow\; \mu = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

El coeficiente estático de rozamiento es igual a la tangente del ángulo formado por el plano con la horizontal en el momento de iniciarse el deslizamiento.

24 En la parte superior de un plano inclinado se deja un cuerpo. Si el coeficiente de rozamiento estático vale 0,2. ¿Cuál es el ángulo de inclinación del plano en el momento en el que el cuerpo comienza a moverse?

Las fuerzas aplicadas son:

- El peso: $\mathbf{P} = (m \cdot g \cdot \sin \alpha, -m \cdot g \cdot \cos \alpha)$.
- La normal: $\mathbf{N} = (0, N)$.
- La fuerza de rozamiento: $\mathbf{F}_r = (-\mu \cdot N, 0)$.



En este caso no existe aceleración en ninguno de los ejes. Aplicando: $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$, a cada uno de los ejes obtenemos:

En el eje x:

$$m \cdot g \cdot \sin \alpha - \mu \cdot N = 0$$

En el eje y:

$$N - m \cdot g \cdot \cos \alpha = 0$$

Despejando la normal de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera queda:

$$m \cdot g \cdot \sin \alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha = 0$$

Simplificando:

$$\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha = 0 \;\rightarrow\; \tan \alpha = \mu = 0{,}2$$

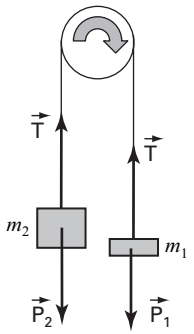
Despejando α obtenemos:

$$\alpha = \tan^{-1} 0{,}2 = 11{,}3°$$

25 De los extremos de una cuerda que pasa por una polea fija de eje horizontal cuelgan pesos de 200 g y 150 g, respectivamente. Calcula:

a) La aceleración con la que se mueven los pesos.

b) La distancia que los separa a 1 s, suponiendo que inicialmente estaban a la misma altura.



a) El sistema está formado por dos cuerpos que aislaremos.

Fuerzas sobre el cuerpo de masa m_1:

- El peso $\mathbf{P}_1$, en dirección del radio terrestre y sentido hacia el centro de la Tierra.
- La tensión **T**, que la cuerda ejerce sobre el cuerpo.

Como todas las fuerzas están en la misma dirección no hace falta descomponer los vectores, de modo que la ecuación que describe la dinámica del cuerpo 1 será:

$$m_1 \cdot g - T = m_1 \cdot a$$

Fuerzas sobre el cuerpo de masa m_2:

- El peso $\mathbf{P}_2$, en dirección del radio terrestre y sentido hacia el centro de la Tierra.
- La tensión **T**, que la cuerda transmite íntegramente y ejerce sobre el cuerpo.

La ecuación que describe la dinámica del cuerpo 2 será:

$$T - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a$$

El sistema formado por estas dos ecuaciones permite conocer el valor de la aceleración del sistema. Sumando ambas obtenemos:

$$m_1 \cdot g - m_2 \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a$$

Despejando la aceleración:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1} \cdot g \quad \rightarrow \quad a = \frac{200 - 150}{200 + 150} \cdot 9{,}81 = 1{,}4 \text{ m/s}^2$$

b) Si los cuerpos parten del reposo el espacio que recorre cada uno será:

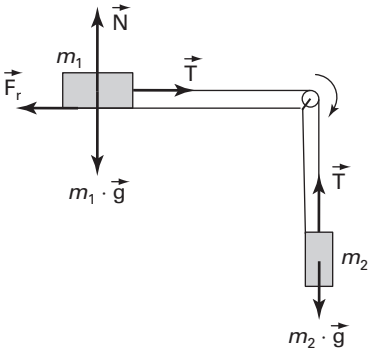
$$s = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \quad \rightarrow \quad s = \frac{1}{2} \cdot 1{,}4 \cdot 1^2 = 0{,}7 \text{ m}$$

Si los cuerpos partieron del mismo nivel la distancia entre ellos será:

$$d = 2 \cdot 0{,}7 = 1{,}4 \text{ m}$$

26 Sobre una mesa, un cuerpo de 500 g va unido mediante un hilo, que pasa por una polea, a otro de 175 g, que cuelga. Suponiendo que no hay rozamiento y que la masa de la polea es despreciable, calcula la aceleración y la tensión del hilo. Realiza los mismos cálculos considerando un rozamiento de coeficiente $\mu = 0{,}15$.

Resolveremos el ejercicio con rozamiento, los resultados para cuando no haya rozamiento los obtendremos haciendo $\mu = 0$, en las soluciones.



El sistema está formado por dos cuerpos:

Fuerzas sobre el cuerpo que desliza por el plano:

- El peso $\mathbf{P}_1$, en la dirección del radio terrestre y hacia el centro de la Tierra: $\mathbf{P}_1 = (0, -m_1 \cdot g)$.
- La normal, **N**, reacción del plano sobre el cuerpo, perpendicular a la superficie de apoyo y hacia arriba: $\mathbf{N} = (0, N)$.
- La fuerza de rozamiento, $\mathbf{F}_r$, en la dirección del movimiento y sentido contrario: $\mathbf{F}_r = (-\mu \cdot N, 0)$.

• La tensión **T** que ejerce la cuerda sobre el cuerpo: **T** = (T, 0).

Sobre el eje y, no hay movimiento por tanto la ecuación a plantear es:

$$N - m_1 \cdot g = 0$$

Sobre el eje del movimiento será:

$$T - \mu \cdot N = m_1 \cdot a$$

Despejando la normal de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda obtenemos:

$$T - \mu \cdot m_1 \cdot g = m_1 \cdot a$$

Fuerzas sobre el cuerpo que cuelga:

• El peso $\mathbf{P}_2$, en la dirección del radio terrestre y hacia el centro de la Tierra.

• La tensión **T** que transmite íntegramente la cuerda y se ejerce sobre el cuerpo.

En este caso no es necesario descomponer las fuerzas de forma que la ecuación para este cuerpo será:

$$m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot a$$

Estas ecuaciones resuelven el ejercicio. Sumando miembro a miembro obtenemos:

$$m_2 \cdot g - \mu \cdot m_1 \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a \quad \rightarrow \quad g \cdot (m_2 - \mu \cdot m_1) = (m_1 + m_2) \cdot a$$

Despejando la aceleración y sustituyendo valores se obtiene:

$$a = \frac{m_2 - \mu \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot g = \frac{175 - 0{,}15 \cdot 500}{500 + 175} \cdot 9{,}81 = 1{,}45 \text{ m/s}^2$$

La tensión se obtiene despejándola de cualquiera de las ecuaciones:

$$T = m_2 \cdot g - m_2 \cdot a = m_2 \cdot (g - a) = 0{,}175 \cdot (9{,}81 - 1{,}45) = 1{,}46 \text{ N}$$

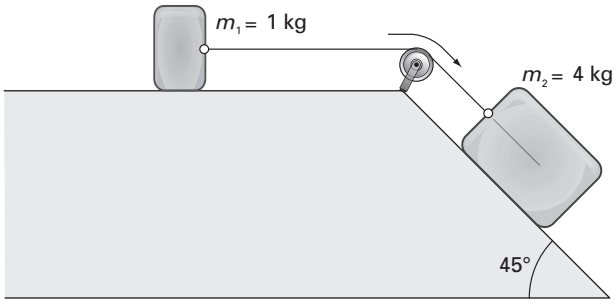
Si no hubiera rozamiento, $\mu = 0$, las ecuaciones serían:

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot g = \frac{175}{500 + 175} \cdot 9{,}81 = 2{,}54 \text{ m/s}^2$$

Y la tensión:

$$T = m_2 \cdot g - m_2 \cdot a = m_2 \cdot (g - a) = 0{,}175 \cdot (9{,}81 - 2{,}54) = 1{,}27 \text{ N}$$

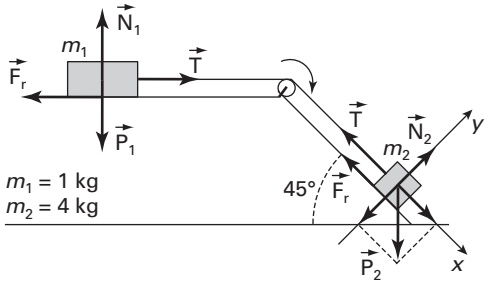
27 Utiliza los datos de la figura para calcular la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda, sabiendo que el coeficiente de rozamiento es 0,4. ¿Cuánto tendrá que valer m_2 para que se mueva con velocidad constante?



Fuerzas sobre el cuerpo que desliza por el plano horizontal:

• El peso $\mathbf{P}_1$, en la dirección del radio terrestre y hacia el centro de la Tierra: $\mathbf{P}_1 = (0, -m_1 \cdot g)$.

• La normal, **N,** reacción del plano sobre el cuerpo, perpendicular a la superficie de apoyo y hacia arriba: **N** = (0, N).



- La fuerza de rozamiento, $\mathbf{F}_r$, en la dirección del movimiento y sentido contrario: $\mathbf{F}_r = (-\mu \cdot N, 0)$.
- La tensión **T** que ejerce la cuerda sobre el cuerpo: $\mathbf{T} = (T, 0)$.

Sobre el eje *y*, no hay movimiento, por tanto, la ecuación a plantear es:

$$N - m_1 \cdot g = 0 \quad \rightarrow \quad N = m_1 \cdot g$$

Sobre el eje del movimiento será:

$$T - \mu \cdot N = m_1 \cdot a$$

Despejando la normal de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda obtenemos:

$$T - \mu \cdot m_1 \cdot g = m_1 \cdot a \qquad \textbf{(I)}$$

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo que desliza por el plano inclinado son:

- El peso $\mathbf{P}_2$, en la dirección del radio terrestre y hacia el centro de la Tierra: $\mathbf{P} = (m_2 \cdot g \cdot \sin 45°, -m_2 \cdot g \cdot \cos 45°)$.
- La normal, **N**, reacción del plano sobre el cuerpo, perpendicular a la superficie de apoyo y hacia arriba: $\mathbf{N} = (0, N)$.
- La fuerza de rozamiento, $\mathbf{F}_r$, en la dirección del movimiento y sentido contrario: $\mathbf{F}_r = (-\mu \cdot N, 0)$.
- La tensión **T** que ejerce la cuerda sobre el cuerpo: $\mathbf{T} = (-T, 0)$.

Aplicando el segundo principio a los dos ejes tenemos:

Sobre el eje *y* no hay movimiento, en consecuencia:

$$N - m_2 \cdot g \cdot \cos 45° = 0 \quad \rightarrow \quad N = m_2 \cdot g \cdot \cos 45°$$

Sobre el eje *x*:

$$m_2 \cdot g \cdot \sin 45° - \mu \cdot N - T = m_2 \cdot a$$

Sustituyendo el valor de la normal en esta ecuación obtenemos:

$$m_2 \cdot g \cdot \sin 45° - \mu \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos 45° - T = m_2 \cdot a \qquad \textbf{(II)}$$

Sumando las ecuaciones **(I)** y **(II)** obtenemos:

$$m_2 \cdot g \cdot \sin 45° - \mu \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos 45° - \mu \cdot m_1 \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a$$

Despejando la aceleración:

$$a = \frac{m_2 \cdot \sin 45° - \mu \cdot (m_2 \cdot \cos 45° + m_1)}{m_1 + m_2} \cdot g = \frac{4 \cdot \sin 45° - 0{,}4 \cdot (4 \cdot \cos 45° + 1)}{1 + 4} \cdot 9{,}81 = 2{,}54 \text{ m/s}^2$$

La tensión la obtenemos sustituyendo la aceleración en cualquiera de las ecuaciones:

$$T - \mu \cdot m_1 \cdot g = m_1 \cdot a \quad \rightarrow \quad T = m_1 \cdot (\mu \cdot g + a) = 1 \cdot (0{,}4 \cdot 9{,}81 + 2{,}54) = 6{,}46 \text{ N}$$

Para que las masas se muevan con velocidad constante la aceleración debe valer: $a = 0$. Por tanto:

$$m_2 \cdot g \cdot \sin 45° - \mu \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos 45° - \mu \cdot m_1 \cdot g = 0$$

Despejando la masa m_2:

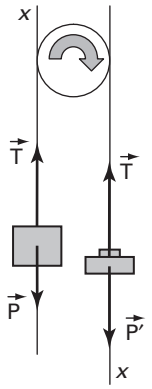
$$m_2 = \frac{\mu \cdot m_1}{\sin 45° - \mu \cdot \cos 45°} = \frac{0{,}4 \cdot 1}{\sin 45° - 0{,}4 \cdot \cos 45°} = 0{,}943 \text{ kg}$$

28 De los extremos de una cuerda que pasa por la garganta de una polea fija de eje horizontal penden dos masas de 500 g cada una. ¿Qué masa habrá que añadir a una de las dos para que la otra suba 2 m en 2 s?

Para que una de las masas recorra 2 m en 2 s, la aceleración será:

$$s = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \quad \rightarrow \quad a = \frac{2\,s}{t^2} = \frac{2 \cdot 2}{2^2} = 1 \text{ m/s}^2$$

El sistema está formado por dos cuerpos, uno de masa m y el otro de masa $m + m'$.



Fuerzas sobre el cuerpo de masa $m + m'$:

- El peso **P'**, en dirección del radio terrestre y sentido hacia el centro de la Tierra.
- La tensión **T** que la cuerda ejerce sobre el cuerpo.

La ecuación que describe la dinámica del cuerpo será:

$$(m + m') \cdot g - T = (m + m') \cdot a$$

Fuerzas sobre el cuerpo de masa m:

- El peso **P**, en la dirección del radio terrestre y sentido hacia el centro de la Tierra.
- La tensión **T** que la cuerda transmite íntegramente y ejerce sobre el cuerpo.

La ecuación que describe la dinámica del cuerpo será:

$$T - m \cdot g = m \cdot a$$

El sistema formado por estas dos ecuaciones permite conocer el valor de la aceleración del sistema. Sumando ambas obtenemos:

$$(m + m') \cdot g - m \cdot g = (2\,m + m') \cdot a \quad \rightarrow \quad m' \cdot g = (2\,m + m') \cdot a$$

Despejando la masa m':

$$m' \cdot (g - a) = 2\,m \cdot a \quad \rightarrow \quad m' = \frac{2\,m \cdot a}{g - a} = \frac{2 \cdot 0{,}5 \cdot 1}{9{,}81 - 1} = 0{,}114 \text{ kg} = 114 \text{ g}$$

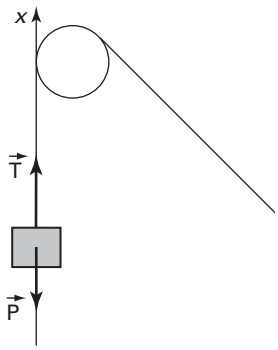
29 Una grúa levanta un contenedor de 1 200 kg con una aceleración de 0,25 m/s^2. Calcula:

a) La tensión del cable de la grúa.

b) La altura a los 10 s.

c) La tensión del cable si el contenedor sube a una velocidad constante.

a) Fuerzas sobre el cuerpo de masa m:



- El peso **P**, en dirección del radio terrestre y sentido hacia el centro de la Tierra.
- La tensión **T** que el cable transmite íntegramente y ejerce sobre el cuerpo.

La ecuación que describe la dinámica del cuerpo será:

$$T - m \cdot g = m \cdot a \quad \rightarrow \quad T = m \cdot (g + a) = 1\,200 \cdot (9{,}81 + 0{,}25) = 12\,072 \text{ N}$$

b) En 10 s el contenedor recorre:

$$h = \frac{1}{2}\,a \cdot t^2 \quad \rightarrow \quad h = \frac{1}{2} \cdot 0{,}25 \cdot 10^2 = 12{,}5 \text{ m}$$

c) En el caso de que el contenedor suba con velocidad constante, $a = 0$, la ecuación que describe su dinámica sería:

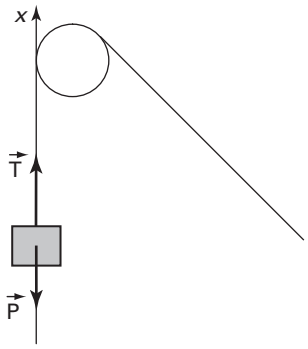
$$T - m \cdot g = 0 \quad \rightarrow \quad T = m \cdot g = 1\,200 \cdot 9{,}81 = 11\,772 \text{ N}$$

30 La resistencia del cable de una grúa es de 7 680 N. ¿Cuál es la aceleración máxima con la que debe subir un contenedor de 600 kg para que no se rompa el cable?

Fuerzas sobre el cuerpo de masa m:

- El peso **P**, en dirección del radio terrestre y sentido hacia el centro de la Tierra.

- La tensión **T** que el cable transmite íntegramente y ejerce sobre el cuerpo.



La ecuación que describe la dinámica del cuerpo será:

$$T - m \cdot g = m \cdot a$$

Despejando la aceleración y sustituyendo valores obtenemos:

$$a = \frac{T - m \cdot g}{m} \quad \rightarrow \quad a = \frac{7\,680 - 600 \cdot 9{,}81}{600} = 2{,}99 \text{ m/s}^2$$

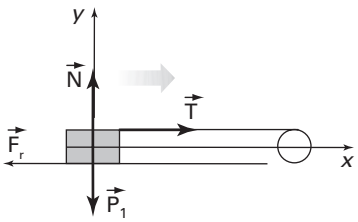
31 En el sistema de la figura, el plano tiene un coeficiente de rozamiento $\mu = 0{,}35$; la polea no tiene masa ni rozamiento y los dos cuerpos tienen masas $m_1 = 750$ g y $m_2 = 1$ kg. Calcula:

a) La aceleración del sistema.

b) La tensión de la cuerda.

Como el sistema consta de dos cuerpos conviene separarlos. En el cuerpo apoyado sobre el plano, la dirección de su movimiento y su sentido será el eje positivo de las *x*. Las fuerzas aplicadas son:

- El peso: $\mathbf{P}_1 = (0, -m_1 \cdot g)$.
- La normal: $\mathbf{N} = (0, N)$.
- La fuerza de rozamiento: $\mathbf{F}_r = (-\mu \cdot N, 0)$.
- La tensión de la cuerda: $\mathbf{T} = (T, 0)$.



Aplicando: $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$, a cada uno de los ejes obtenemos:

En el eje *x*:

$$T - \mu \cdot N = m_1 \cdot a$$

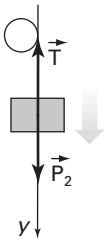
En el eje *y*:

$$N - m_1 \cdot g = 0$$

Despejando la normal de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera obtenemos, para este cuerpo:

$$T - \mu \cdot m_1 \cdot g = m_1 \cdot a \qquad \textbf{(I)}$$

En el otro cuerpo, la dirección del movimiento y su sentido será el eje positivo de las *y*. Las fuerzas aplicadas son:



- El peso: $\mathbf{P}_2 = (0, m_2 \cdot g)$.
- La tensión de la cuerda: $\mathbf{T} = (0, -T)$.

Aplicando la ecuación del segundo principio al eje *y*, obtenemos para el segundo cuerpo:

$$m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot a \qquad \textbf{(II)}$$

En definitiva, disponemos de dos ecuaciones con dos incógnitas, la tensión de la cuerda, T, y la aceleración del sistema, a, que resolveremos por cualquiera de los métodos habituales, obteniendo los valores:

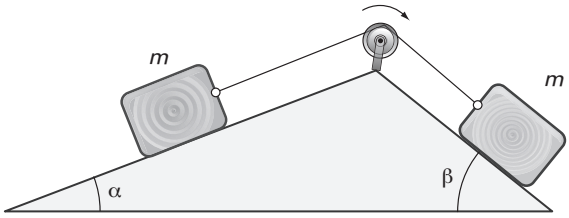
$$a = \frac{m_2 - \mu \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot g = \frac{1 - 0{,}35 \cdot 0{,}75}{0{,}75 + 1} \cdot 9{,}81 = 4{,}13 \text{ m/s}^2$$

$$T = 5{,}68 \text{ N}$$

32 Dos masas iguales de 10 kg están atadas a los extremos de una cuerda y descansan sobre sendos planos inclinados, cuyas inclinaciones son $\alpha = 30^\circ$ y $\beta = 60^\circ$, como se indica en la figura. Si los coeficientes de rozamiento de cada masa con sus respectivos planos valen $\mu = 0{,}1$, calcula:

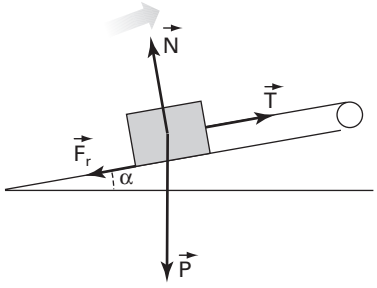
a) La aceleración del conjunto.

b) La tensión de la cuerda.



a) Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo que desliza por el plano inclinado de ángulo α son:

- El peso **P**, en la dirección del radio terrestre y hacia el centro de la Tierra: **P** = $(-m \cdot g \cdot \sin\alpha, -m \cdot g \cdot \cos\alpha)$.
- La normal, **N**, reacción del plano sobre el cuerpo, perpendicular a la superficie de apoyo y hacia arriba: **N** = $(0, N)$.
- La fuerza de rozamiento, $\mathbf{F_r}$, en la dirección del movimiento y sentido contrario: $\mathbf{F_r} = (-\mu \cdot N, 0)$.
- La tensión **T** que ejerce la cuerda sobre el cuerpo: **T** = $(T, 0)$.



Aplicando el segundo principio a los dos ejes tenemos:

En el eje y no hay movimiento, en consecuencia:

$$N - m \cdot g \cdot \cos\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad N = m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

En el eje x:

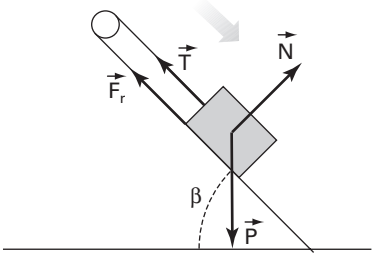
$$T - \text{m} \cdot g \cdot \sin\alpha - \mu \cdot N = m \cdot a$$

Sustituyendo el valor de la normal en esta ecuación obtenemos:

$$T - m \cdot g \cdot \sin\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha = m \cdot a \qquad \textbf{(I)}$$

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo que desliza por el plano inclinado de ángulo β son:

- El peso **P**, en la dirección del radio terrestre y hacia el centro de la Tierra: **P** = $(m \cdot g \cdot \sin\beta, -m \cdot g \cdot \cos\beta)$.
- La normal, **N**, reacción del plano sobre el cuerpo, perpendicular a la superficie de apoyo y hacia arriba: **N** = $(0, N)$.
- La fuerza de rozamiento, $\mathbf{F_r}$, en la dirección del movimiento y sentido contrario: $\mathbf{F_r} = (-\mu \cdot N, 0)$.
- La tensión **T** que ejerce la cuerda sobre el cuerpo: **T** = $(-T, 0)$.



Aplicando el segundo principio a los dos ejes tenemos:

En el eje y no hay movimiento, en consecuencia:

$$N - m \cdot g \cdot \cos\beta = 0 \quad \rightarrow \quad N = m \cdot g \cdot \cos\beta$$

En el eje x:

$$m \cdot g \cdot \sin \beta - \mu \cdot N - T = m \cdot a$$

Sustituyendo el valor de la normal en esta ecuación obtenemos:

$$m \cdot g \cdot \sin \beta - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \beta - T = m \cdot a \qquad \textbf{(II)}$$

Las ecuaciones **(I)** y **(II)** forman un sistema cuya resolución permite conocer los valores de la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda.

Sumando **(I)** y **(II)** y dividiendo por m, queda:

$$g \cdot \sin \beta - \mu \cdot g \cdot \cos \beta - g \cdot \sin \alpha - \mu \cdot g \cdot \cos \alpha = 2\,a \;\rightarrow\; g \cdot (\sin \beta - \sin \alpha) - \mu \cdot g \cdot (\cos \beta + \cos \alpha) = 2\,a$$

Despejando la aceleración y sustituyendo valores obtenemos:

$$a = 1{,}1 \text{ m/s}^2$$

b) Sustituyendo este valor en cualquiera de las ecuaciones **(I)** o **(II)** obtenemos la tensión de la cuerda:

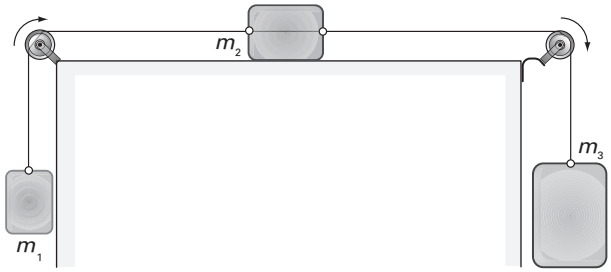
$$m \cdot g \cdot \sin \beta - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \beta - T = m \cdot a \;\rightarrow\; T = m \cdot g \cdot \sin \beta - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \beta - m \cdot a$$

$$T = 69 \text{ N}$$

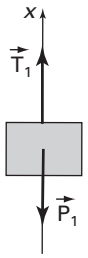
33 En el sistema representado en la figura, las masas de los cuerpos son $m_1 = 50$ kg, $m_2 = 75$ kg y $m_3 = 100$ kg, y el coeficiente de rozamiento entre el plano y el cuerpo es $\mu = 0{,}25$. Calcula:

a) La aceleración del sistema.

b) Las tensiones de las cuerdas.



a) Las fuerzas sobre el cuerpo de masa m_1 son:



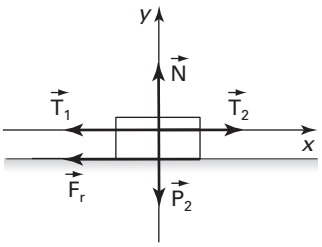
- El peso $\mathbf{P}_1$, en la dirección del radio terrestre y sentido hacia el centro de la Tierra.
- La tensión $\mathbf{T}_1$ que la cuerda transmite íntegramente y ejerce sobre el cuerpo.

La ecuación que describe la dinámica del cuerpo será:

$$T_1 - m_1 \cdot g = m_1 \cdot a \qquad \textbf{(I)}$$

Las fuerzas que actúan sobre el objeto de masa m_2 son:

- El peso $\mathbf{P}_2$, en la dirección del radio terrestre y hacia el centro de la Tierra: $\mathbf{P}_2 = (0, -m_2 \cdot g)$.
- La normal, $\mathbf{N}$, reacción del suelo sobre el cuerpo, perpendicular a la superficie de apoyo y hacia arriba: $\mathbf{N} = (0, N)$.
- La fuerza de rozamiento, $\mathbf{F}_r$, en la dirección del movimiento y en sentido contrario: $\mathbf{F}_r = (-\mu \cdot N, 0)$.
- La tensión $\mathbf{T}_1$, debida al cuerpo de masa m_1: $\mathbf{T}_1 = (-T_1, 0)$.
- La tensión $\mathbf{T}_2$, debida al cuerpo de masa m_2: $\mathbf{T}_2 = (T_2, 0)$.



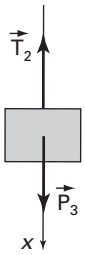
Aplicamos el segundo principio a cada uno de los ejes:

Sobre el eje y no hay movimiento, por tanto, al aplicar el segundo principio en este eje queda:

$$N - m_2 \cdot g = 0 \;\rightarrow\; N = m_2 \cdot g$$

Sobre el eje x existe aceleración por tanto:

$$T_2 - T_1 - \mu \cdot N = m_2 \cdot a \quad \rightarrow \quad T_2 - T_1 - \mu \cdot m_2 \cdot g = m_2 \cdot a \qquad \textbf{(II)}$$



Las fuerzas sobre el cuerpo de masa m_3 son:

- El peso $\mathbf{P}_3$, en la dirección del radio terrestre y sentido hacia el centro de la Tierra.
- La tensión $\mathbf{T}_2$ que la cuerda transmite íntegramente y ejerce sobre el cuerpo.

La ecuación que describe la dinámica del cuerpo será:

$$m_3 \cdot g - T_2 = m_3 \cdot a \qquad \textbf{(III)}$$

Las ecuaciones **(I)**, **(II)** y **(III)** forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: T_1, T_2 y a.

Sumando las tres ecuaciones obtenemos:

$$m_3 \cdot g - m_1 \cdot g - \mu \cdot m_2 \cdot g = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a$$

Despejando la aceleración y sustituyendo valores obtenemos:

$$a = \frac{m_3 - m_1 - \mu \cdot m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot g = 1{,}36 \text{ m/s}^2$$

b) Sustituyendo en la ecuación **(I)** obtenemos T_1:

$$T_1 - m_1 \cdot g = m_1 \cdot a \quad \rightarrow \quad T_1 = m_1 \cdot (a + g) = 559 \text{ N}$$

Sustituyendo la aceleración en la ecuación **(III)** obtenemos T_2:

$$m_3 \cdot g - T_2 = m_3 \cdot a \quad \rightarrow \quad T_2 = m_3 \cdot (g - a) = 845 \text{ N}$$

34 Si un vehículo toma una curva a una velocidad excesiva, ¿por qué no puede completarla? Explica por qué las carreteras con peralte retienen mejor a los vehículos en las curvas.

Al describir una curva el vehículo lleva una aceleración centrípeta en la dirección del radio y en sentido hacia el centro.

Si el pavimento es horizontal, la única fuerza que retiene al vehículo en la dirección del radio es la fuerza de rozamiento. En consecuencia:

$$F_r = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

Si el valor de la velocidad es mayor al que cumple esta ecuación, el vehículo desliza y se sale del pavimento.

Si el pavimento está peraltado un ángulo α, además del rozamiento, la componente P_x ayuda a mantener el coche sobre la carretera:

$$F_r + m \cdot g \cdot \sin \alpha = m \cdot \frac{v^2}{R} \quad \text{(para } \alpha \text{ pequeños)}$$

El efecto del peralte es un aumento del valor de la fuerza que retiene al vehículo, en consecuencia, con el mismo radio, el coche podrá circular con mayor velocidad.

35 Una máquina radial, empleada para lijar, desprende una partícula de 5 g cuando gira, a razón de 10 000 rpm. Si la partícula pertenece al borde del disco, que tiene 8 cm de radio, calcula la fuerza centrípeta a que estaba sometida y la velocidad con la que salió desprendida. ¿Puede producir una lesión grave si alcanza a una persona?

La velocidad angular expresada en unidades internacionales es:

$$\omega = 10\,000 \text{ rpm} = 10\,000 \cdot \frac{2\,\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 1\,047 \text{ rad/s}$$

La fuerza centrípeta será:

$$F_c = m \cdot \omega^2 \cdot R = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}08 \cdot (1\,047)^2 = 438{,}5 \text{ N}$$

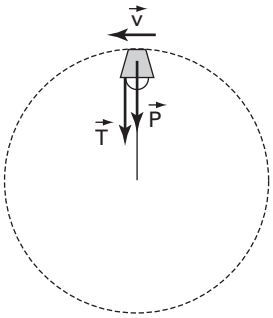
La velocidad con la que sale es:

$$v = \omega \cdot R = 1\,047 \cdot 0{,}08 = 83{,}8 \text{ m/s}$$

Es una velocidad muy alta, del orden de magnitud de las velocidades que proporcionan las armas de fuego, por tanto, si puede producir lesiones graves.

36 ¿Con qué velocidad angular mínima hay que hacer girar un cubo en el plano vertical según un círculo de radio 80 cm para que el agua que contiene no se derrame? ¿Cuál será la velocidad tangencial del cubo en esas condiciones?

Si nos situamos fuera del cubo, el eje del movimiento sería tangente a la trayectoria y, en consecuencia, el eje *y* tendría la dirección del radio y sentido positivo hacia el centro de la circunferencia.



Las fuerzas que actúan sobre el agua del cubo en el punto más alto serían:

- El peso: **P** = (0, $m \cdot g$).
- La normal: **N** = (0, $-N$).

La aceleración del movimiento es centrípeta, por tanto, el segundo principio nos permite escribir:

$$m \cdot g - N = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

La velocidad angular mínima que debe llevar el cubo, en ese punto, será aquella para la que $N = 0$, en consecuencia:

$$m \cdot g = m \cdot \omega^2 \cdot R \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}80}} = 3{,}5 \text{ rad/s}$$

La velocidad lineal correspondiente sería:

$$v = \omega \cdot R = 2{,}8 \text{ m/s}$$

37 En una revista leemos que el tambor de una lavadora industrial es un cilindro de 40 cm de diámetro, y que la velocidad máxima de centrifugado es de 1 200 rpm. Calcula la fuerza a la que está sometida una carga de 15 kg de ropa, distribuidos en la periferia. ¿Cuántas veces es mayor que su peso?

La velocidad angular expresada en unidades internacionales será:

$$\omega = 1\,200 \text{ rpm} = 1\,200 \cdot \frac{2\,\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 126 \text{ rad/s}$$

La fuerza a la que estarán sometidos los 15 kg de ropa es la fuerza centrípeta:

$$F_c = m \cdot \omega^2 \cdot R = 15 \cdot 126^2 \cdot 0{,}20 = 47\,628 \text{ N}$$

La relación entre esta fuerza y el peso de un kilogramo (P = 9,81 N) es:

$$\frac{F_c}{P} = \frac{47\,628}{15 \cdot 9{,}81} = 324$$

En consecuencia, F_c es 324 veces mayor que el peso de la ropa.

38 Un ascensor de 120 kg transporta a tres personas cuya masa, entre las tres, es de 210 kg. Halla:

a) La fuerza que ejercen las personas sobre el ascensor cuando sube con aceleración de 0,5 m/s^2.

b) La fuerza que ejerce el motor, mediante el cable, en este movimiento.

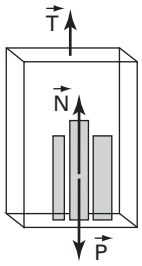
c) Las mismas fuerzas que en los apartados anteriores, pero cuando frena al llegar al piso con una aceleración de –1,5 m/s^2.

Si nos situamos fuera del ascensor:

a) Las fuerzas aplicadas sobre las personas son el peso y la normal. En consecuencia:

$$N - m \cdot g = m \cdot a \quad \rightarrow \quad N = m \cdot (a + g) = 210 \cdot (0{,}5 + 9{,}81) = 2\,165 \text{ N}$$

b) Sobre el ascensor está aplicado, su peso más el de las personas que van dentro y la tensión del cable:



$T - (m + M) \cdot g = (m + M) \cdot a \quad \rightarrow \quad T = (m + M) \cdot (a + g) = 330 \cdot 10{,}31 = 3\,402$ N

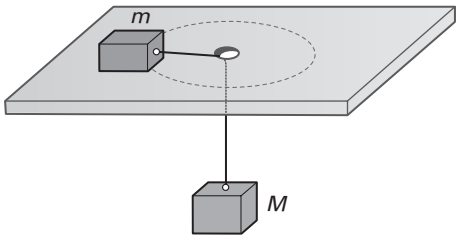
c) Lo único que cambia es el signo de la aceleración que ahora es de frenado:

$$a = -1{,}5 \text{ m/s}^2$$

En el caso (a): $N = m \cdot (a + g) = 210 \cdot (-1{,}5 + 9{,}81) = 1\,745$ N.

En el caso (b): $T = (m + M) \cdot (a + g) = 330 \cdot 8{,}31 = 2\,742$ N.

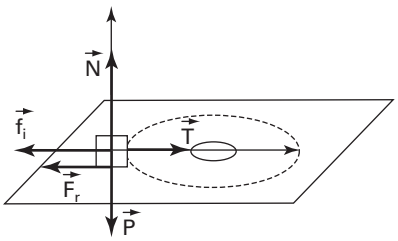
39 Una mesa horizontal con rozamiento de coeficiente $\mu = 0{,}25$, tiene un agujero. Sobre la mesa hay un cuerpo de masa $m = 500$ g unido, mediante una cuerda que pasa por el agujero, a otro cuerpo de masa $M = 750$ g. Este segundo cuerpo está suspendido. Calcula la velocidad con la que debe dar vueltas m en una circunferencia de 25 cm de radio, para que M esté en reposo.



Si nos situamos sobre el cuerpo que gira sobre la mesa, estaremos en reposo respecto de él, en consecuencia, la suma de fuerzas debe ser cero.

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo situado encima de la mesa son:

- El peso **P**, en la dirección del radio terrestre y sentido hacia el centro de la Tierra: $\mathbf{P} = (0, -m \cdot g)$.
- La normal **N**, perpendicular a la superficie de contacto y hacia arriba: $\mathbf{N} = (0, N)$.
- La tensión de la cuerda **T**, en la dirección de la cuerda y tirando del cuerpo que se encuentra encima: $\mathbf{T} = (T, 0)$.
- La fuerza de rozamiento $\mathbf{F}_r$, en la dirección del radio y sentido hacia fuera de la circunferencia: $\mathbf{F}_r = (-\mu \cdot N, 0)$.
- La fuerza de inercia $\mathbf{f}_i$, en la dirección del radio y sentido hacia fuera de la circunferencia: $\mathbf{f}_i = \left(-m \cdot \frac{v^2}{R}, 0\right)$.



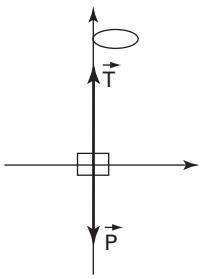
De la aplicación del segundo principio de la dinámica sobre los ejes, y teniendo en cuenta que se pretende que el cuerpo de masa M no caiga, se obtienen las ecuaciones:

$$N - m \cdot g = 0$$

$$T - \mu \cdot N - m \cdot \frac{v^2}{R} = 0$$

Despejando la normal de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda tenemos:

$$T - \mu \cdot m \cdot g - m \cdot \frac{v^2}{R} = 0 \qquad \textbf{(I)}$$



Las fuerzas sobre el cuerpo que cuelga son:

- El peso **P**, en la dirección del radio terrestre y sentido hacia el centro de la Tierra.
- La tensión de la cuerda **T**, en la dirección de la cuerda y sujetando el cuerpo de masa M.

Ambas fuerzas tienen la misma dirección, por tanto, la ecuación que describe la dinámica de este cuerpo, que se pretende esté en reposo es:

$$M \cdot g - T = 0 \qquad \textbf{(II)}$$

El sistema formado por las ecuaciones **(I)** y **(II)** resuelve el ejercicio:

$$M \cdot g - \mu \cdot m \cdot g - m \cdot \frac{v^2}{R} = 0$$

Despejando la velocidad obtenemos:

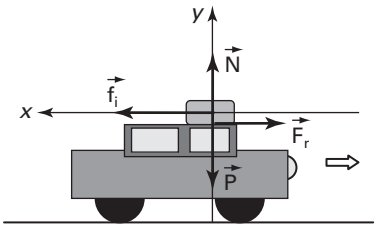
$$v = \sqrt{\frac{(M - \mu \cdot m) \cdot R \cdot g}{m}}$$

Sustituyendo los datos en el Sistema Internacional obtenemos:

$$v = \sqrt{\frac{(0{,}75 - 0{,}25 \cdot 0{,}5) \cdot 0{,}25 \cdot 9{,}81}{0{,}5}} = 1{,}75 \text{ m/s}$$

40 Te has olvidado la mochila sobre la parte delantera del techo de un coche de 1,5 m de largo. El coeficiente estático de rozamiento entre el techo del coche y la mochila es de 0,25 y el dinámico de 0,20. Si el coche arranca en línea recta con una aceleración de 2,7 m/s^2, averigua si deslizará la mochila y, en caso afirmativo, calcula cuánto tiempo tardará en caer por el otro extremo del techo del coche.

Si nos ponemos en un sistema de referencia ligado a la mochila, las fuerzas sobre ella serán:



- El peso **P**, en la dirección del radio terrestre y sentido hacia el centro de la Tierra: **P** = (0, $-m \cdot g$).
- La normal **N**, perpendicular a la superficie de contacto y hacia arriba: **N** = (0, N).
- La fuerza de rozamiento $\mathbf{F}_r$, en la dirección del movimiento de la mochila y sentido contrario: $\mathbf{F}_r = (-\mu \cdot N, 0)$.
- La fuerza de inercia $\mathbf{f}_i$, en la dirección del movimiento del coche y sentido contrario: $\mathbf{f}_i = (m \cdot a_c, 0)$.

El valor de la normal, en este caso, coincide con el peso de la mochila: $N = m \cdot g$.

La mochila deslizará sobre el techo si:

$$f_i > \mu_e \cdot N \;\rightarrow\; m \cdot a_c > \mu_e \cdot m \cdot g \;\rightarrow\; a_c > \mu_e \cdot g$$

Como a_c = 2,7 m/s^2 y $\mu_e \cdot g$ = 0,25 · 9,81 = 2,45, la desigualdad se cumple y, en consecuencia, la mochila deslizará sobre el techo del coche.

La ecuación sobre el eje del movimiento de la mochila será:

$$f_i - \mu_c \cdot N = m \cdot a_m \;\rightarrow\; m \cdot a_c - \mu_c \cdot m \cdot g = m \cdot a_m \;\rightarrow\; a_m = a_c - \mu_c \cdot g = 2{,}7 - 0{,}20 \cdot 9{,}81 = 0{,}74 \text{ m/s}^2$$

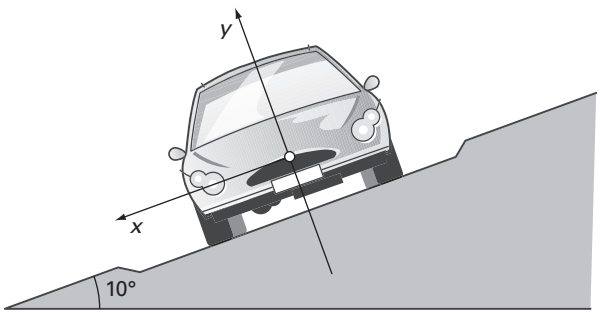
Con esta aceleración, y partiendo del reposo, la mochila tarda en recorrer los 1,5 m del techo:

$$s = \frac{1}{2} a_m \cdot t^2 \;\rightarrow\; t = \sqrt{\frac{2\,s}{a_m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}5}{0{,}74}} = 2 \text{ s}$$

41 Un vehículo de masa 1 300 kg toma una curva sin peralte de 200 m de radio a una velocidad de 90 km/h. Calcula:

a) La fuerza de rozamiento.

b) La velocidad que podría tomar en la curva si tuviera un peralte de 10º y el mismo rozamiento.



La velocidad del coche expresada en m/s es:

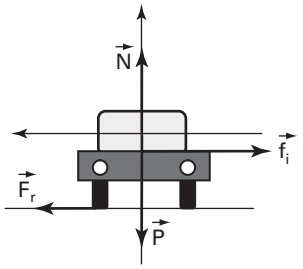
$$v = 90 \text{ km/h} \quad \rightarrow \quad v = 90 \cdot \frac{1\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = 25 \text{ m/s}$$

Si nos situamos dentro del coche nos vemos en reposo, en consecuencia, la suma de fuerzas debe ser cero, pero debemos admitir una fuerza de inercia en la dirección del radio, hacia fuera y de valor:

$$f_i = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

a) Si no hay peralte estamos en un plano horizontal. Las fuerzas que actúan sobre el coche son:

- El peso **P,** en la dirección del radio terrestre y sentido hacia el centro de la Tierra: $\mathbf{P} = (0, -m \cdot g)$.
- La normal **N,** perpendicular a la superficie de contacto y hacia arriba: $\mathbf{N} = (0, N)$.
- La fuerza de rozamiento $\mathbf{F}_r$**,** en dirección del radio y sentido hacia el centro: $\mathbf{F}_r = (-F_r, 0)$.
- La fuerza de inercia $\mathbf{f}_i$**,** en la dirección del radio de la curva y hacia el exterior: $\mathbf{f}_i = (m \cdot \frac{v^2}{R}, 0)$.



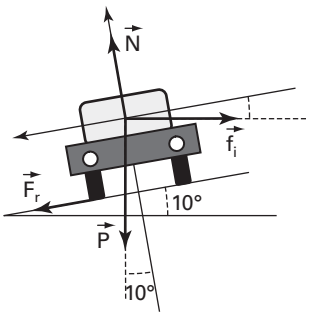
Aplicando la ecuación del segundo principio al eje horizontal y teniendo en cuenta que el coche está en reposo respecto del sistema obtenemos:

$$-F_r + m \cdot \frac{v^2}{R} = 0 \quad \rightarrow \quad F_r = m \cdot \frac{v^2}{R} = 1\,300 \cdot \frac{25^2}{200} = 4\,062{,}5 \text{ N}$$

b) Las fuerzas que actúan sobre el coche son las mismas en este caso:

- El peso: $\mathbf{P} = (-m \cdot g \cdot \sin 10°, -m \cdot g \cdot \cos 10°)$.
- La normal: $\mathbf{N} = (0, N)$.
- La fuerza de rozamiento $\mathbf{F}_r$, en dirección del plano y sentido hacia abajo: $\mathbf{F}_r = (-F_r, 0)$.
- La fuerza de inercia $\mathbf{f}_i$, en la dirección del radio de la circunferencia y hacia el exterior de ella:

$$\mathbf{f}_i = (m \cdot \frac{v^2}{R} \cdot \cos 10°, -m \cdot \frac{v^2}{R} \cdot \sin 10°).$$



La ecuación sobre el eje del movimiento es ahora:

$$-F_r - m \cdot g \cdot \sin 10° + m \cdot \frac{v^2}{R} \cdot \cos 10° = 0$$

Despejando la velocidad obtenemos:

$$v = \sqrt{\frac{R \cdot (F_r + m \cdot g \cdot \sin 10°)}{m \cdot \cos 10°}}$$

Sustituyendo los datos obtenemos:

$$v = 31{,}3 \text{ m/s}$$

42 Una pieza metálica de 100 g va atada a un hilo de 80 cm que se rompe si la tensión a la que está sometido sobrepasa los 20 N. Si ponemos a girar esa pieza como si fuese una honda, ¿qué velocidad tendrá cuando se rompa el hilo? ¿Qué dirección tendrá la velocidad de la pieza metálica en el momento de romperse el hilo?

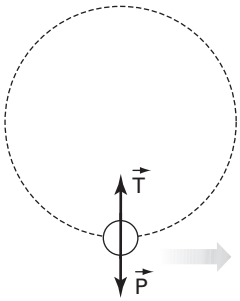
Supondremos que hacemos girar la honda en un plano vertical, la fuerza aplicada sobre la pieza metálica es la diferencia entre la tensión del hilo y el peso de la pieza:

$$T - P = m \cdot a_c \quad \rightarrow \quad T - P = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

Despejamos la velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{T \cdot R - m \cdot R \cdot g}{m}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 0{,}80 - 0{,}1 \cdot 0{,}80 \cdot 9{,}81}{0{,}1}} = 12{,}3 \text{ m/s}$$

La dirección es tangente a la trayectoria y sentido el del movimiento.



43 Un vagón se mueve sobre una vía horizontal con una aceleración constante de 2,5 m/s^2. En el interior, colgado del techo, se coloca un péndulo de longitud L = 1 m y masa m = 300 g.

a) Dibuja el diagrama de fuerzas ejercidas sobre la masa del péndulo para un observador inercial y para otro que está dentro del vagón.

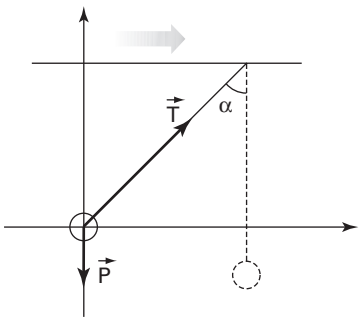
b) Calcula el ángulo que se desvía el péndulo respecto a la vertical.

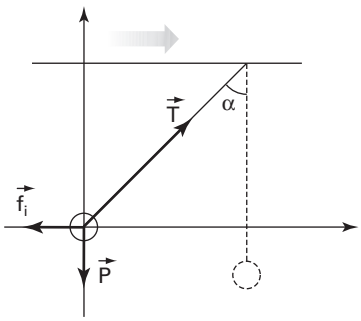
a) Para un observador inercial, fuera del vagón, las fuerzas ejercidas sobre la masa del péndulo son:

- El peso **P**, en la dirección del radio terrestre y sentido hacia el centro de la Tierra.
- La tensión del hilo **T**, en la dirección del hilo que sujeta la masa m.

Para un observador no inercial, dentro del vagón, las fuerzas ejercidas sobre la masa del péndulo son:

- El peso **P,** en la dirección del radio terrestre y sentido hacia el centro de la Tierra: **P** = (0, $-m \cdot g$).
- La tensión del hilo **T,** en la dirección del hilo: **T** = ($T \cdot \sin \alpha$, $T \cdot \cos \alpha$).
- La fuerza de inercia $\mathbf{f_i}$, en la dirección del movimiento del vagón y sentido contrario: $\mathbf{f_i}$ = ($-m \cdot a$, 0).





El observador dentro del vagón ve el péndulo en reposo, por tanto, debe plantear las siguientes ecuaciones sobre los ejes:

$$T \cdot \cos \alpha - m \cdot g = 0$$
$$T \cdot \sin \alpha - m \cdot a = 0$$

Separamos las razones trigonométricas:

$$T \cdot \cos \alpha = m \cdot g$$
$$T \cdot \sin \alpha = m \cdot a$$

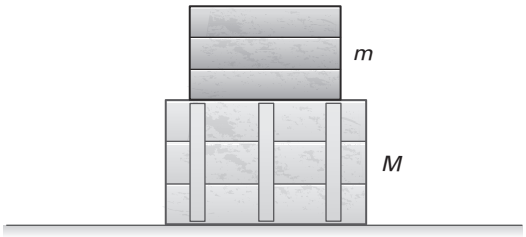
Dividimos las ecuaciones entre sí obteniendo:

$$\tan \alpha = \frac{a}{g}$$

Sustituyendo los datos obtenemos:

$$\tan \alpha = \frac{2{,}5}{9{,}81} = 0{,}25 \quad \rightarrow \quad \alpha = 14{,}3°$$

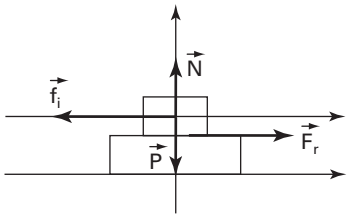
44 Una caja de $m = 2$ kg está colocada sobre otra de masa $M = 5$ kg. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre las dos cajas es de $\mu = 0{,}2$, calcula el valor máximo de la aceleración del conjunto, de manera que la caja de arriba no se deslice sobre la de abajo.



Cuando la caja de abajo se mueve con cierta aceleración *a* hacia la derecha, la de arriba viaja en un sistema no inercial y sobre ella se ejerce una fuerza de inercia en la dirección del movimiento y hacia la izquierda que la intentará mover en ese sentido.

Las fuerzas sobre la caja de arriba son:

- El peso **P**, en la dirección del radio terrestre y sentido hacia el centro de la Tierra: $\mathbf{P} = (0, -m \cdot g)$.
- La normal **N,** perpendicular a la superficie de contacto y hacia arriba: $\mathbf{N} = (0, N)$.
- La fuerza de rozamiento $\mathbf{F}_r$, en la dirección del movimiento y en sentido contrario a este. Como la caja tiende a moverse hacia la izquierda la fuerza de rozamiento va hacia la derecha: $\mathbf{F}_r = (\mu \cdot N, 0)$.
- La fuerza de inercia $\mathbf{f}_i$, en la dirección del movimiento del conjunto y en sentido contrario a este: $\mathbf{f}_i = (-m \cdot a, 0)$.



La caja de arriba está en reposo respecto de la de debajo, de modo que al plantear las ecuaciones sobre los ejes debemos escribir:

$$N - m \cdot g = 0$$
$$\mu \cdot N - m \cdot a = 0$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$\mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \quad \rightarrow \quad a = \mu \cdot g$$

Sustituyendo los datos:

$$a = 0{,}2 \cdot 9{,}81 = 2 \text{ m/s}^2$$

45 Enuncia, formula y explica la ley de Hooke. ¿Cómo construirías y calibrarías un dinamómetro?

En los sistemas elásticos, y para pequeñas deformaciones, la fuerza aplicada, *F*, es directamente proporcional a la deformación producida:

$$F = k \cdot \Delta l$$

La constante de proporcionalidad, *k*, se denomina constante elástica del sistema y depende exclusivamente del propio sistema.

Un dinamómetro es simplemente un muelle, uno de cuyos extremos se fija en un soporte fijo, un tubo transparente, por ejemplo. Al ejercer una fuerza sobre el otro extremo, el muelle se alarga proporcionalmente a la fuerza. Si se mide esa fuerza, tirando con otro dinamómetro calibrado, se puede marcar la misma en una escala de papel pegada en el tubo. De esta forma el muelle se puede utilizar como dinamómetro calibrado.

46 ¿Qué expresa y significa la constante elástica de un resorte? ¿En que unidad se mide?

Expresa la fuerza necesaria que hay que aplicar sobre un sistema elástico para producir una deformación unidad. En un muelle, por ejemplo, significa la fuerza que hay que aplicar para alargarlo o comprimirlo la unidad de longitud. En el SI se mide en newton por metro (N/m).

47 Una caja de 1,5 kg descansa sobre un plano inclinado 30º respecto a la horizontal y está unida a un punto fijo mediante un muelle. En la posición de equilibrio el muelle está alargado 5 cm. Despreciando el rozamiento, halla:

a) La constante elástica del muelle.

b) La aceleración inicial si se tira de la caja haciéndola deslizar a lo largo del plano inclinado hacia abajo 10 cm respecto a la posición de equilibrio y luego se suelta.

a) Las fuerzas aplicadas sobre la caja son:

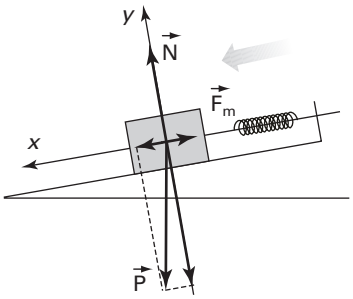
- El peso: $\mathbf{P} = (m \cdot g \cdot \sin 30°, -m \cdot g \cdot \cos 30°)$.
- La normal: $\mathbf{N} = (0, N)$.
- La fuerza que el muelle ejerce sobre ella: $\mathbf{F}_m = (-k \cdot x, 0)$.

Cuando se alcanza el equilibrio, es decir, cuando el muelle se alarga 5 cm, la suma de fuerzas en el eje del movimiento es cero:

$$m \cdot g \cdot \sin 30° - k \cdot x_0 = 0$$

Por tanto, la constante del muelle debe valer:

$$k = \frac{m \cdot g \cdot \sin 30°}{x_0} \rightarrow k = 147{,}2 \text{ N/m}$$



b) Si se estira ahora del muelle 10 cm, la fuerza total, en la dirección del movimiento, sobre la caja será: $F = k \cdot x$. Por tanto, en ausencia de rozamientos:

$$k \cdot x = m \cdot a \rightarrow a = \frac{k}{m} \cdot x \rightarrow a = 9{,}81 \text{ m/s}^2$$

48 Un muelle de constante $k = 150$ N/m está suspendido del techo de un ascensor. Del otro extremo pende un cuerpo de 2 kg. Halla la deformación producida cuando el ascensor:

a) Sube con velocidad constante.

b) Arranca con aceleración de 1 m/s^2.

Si nos situamos fuera del ascensor:

a) La suma de fuerzas sobre el cuerpo será igual a cero ya que sube con velocidad constante:

$$k \cdot x - m \cdot g = 0 \rightarrow x = \frac{m \cdot g}{k} = 0{,}131 \text{ m}$$

b) En este caso vemos subir el cuerpo con aceleración $a = 1$ m/s^2, por tanto:

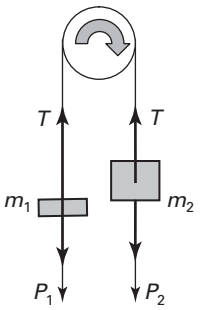
$$k \cdot x - m \cdot g = m \cdot a \rightarrow x = \frac{m \cdot (a + g)}{k} = 0{,}144 \text{ m}$$

49 Una cualquiera de las masas en una máquina de Atwood está unida a una cuerda mediante un muelle de constante elástica 35 N/m, que supondremos sin masa. Si las masas de la máquina son $m_1 = 175$ g y $m_2 = 250$ g, ¿cuál es el alargamiento del muelle?

En primer lugar hay que calcular la aceleración del sistema.

Las fuerzas sobre el cuerpo de masa m_1 son:

- El peso $\mathbf{P}_1$, en la dirección del radio terrestre y sentido hacia el centro de la Tierra.
- La tensión **T** que la cuerda ejerce sobre el cuerpo.



La ecuación que describe la dinámica del cuerpo 1 será:

$$T - m_1 \cdot g = m_1 \cdot a$$

Supondremos el cuerpo 2 como el conjunto m_2 + muelle. Entonces, las fuerzas sobre este cuerpo son:

- El peso $\mathbf{P}_2$, en la dirección del radio terrestre y sentido hacia el centro de la Tierra.
- La tensión **T** que la cuerda transmite íntegramente y ejerce sobre el cuerpo.

La ecuación que describe la dinámica del cuerpo 2 será:

$$m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot a$$

El sistema formado por estas dos ecuaciones permite conocer el valor de la aceleración del sistema. Sumando ambas obtenemos:

$$m_2 \cdot g - m_1 \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a$$

Despejando la aceleración y sustituyendo valores se obtiene:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \cdot g \qquad a = 1{,}73 \text{ m/s}^2$$

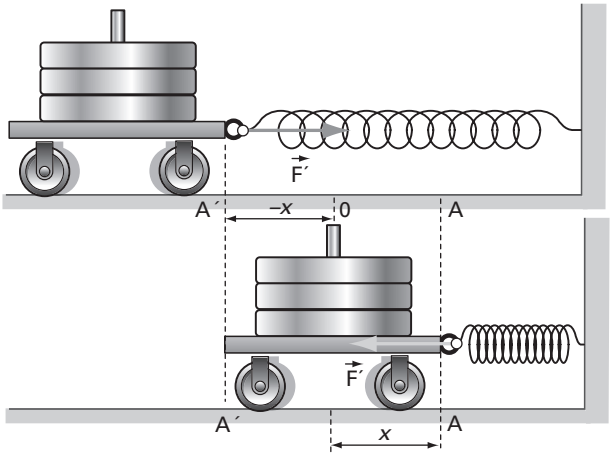
Si aplicamos el segundo principio al cuerpo 2, que baja con esta aceleración, tendremos:

$$m_2 \cdot g - k \cdot x = m_2 \cdot a$$

Despejando y sustituyendo valores:

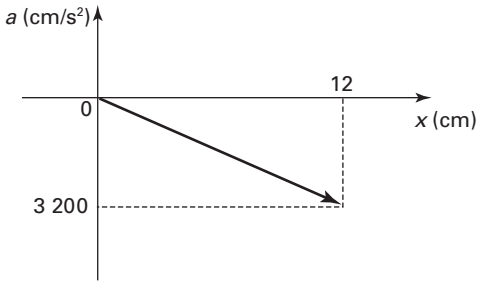
$$x = \frac{m_2 \cdot (g - a)}{k} = 0{,}058 \text{ m}$$

50 Si la constante del resorte es de 0,4 N/cm y el carrito tiene una masa m = 0,15 kg, haz una gráfica (representando aceleraciones en cm/s^2 y posiciones en cm) centímetro a centímetro desde 0 cm hasta 12 cm cuando, desplazado de la posición de equilibrio hasta esa elongación, se abandona para que oscile.



La aceleración en función del desplazamiento es:

$$a = -\omega^2 \cdot x \;\rightarrow\; a = -\frac{k}{m} \cdot x = -\frac{40}{0{,}15} \cdot x \;\rightarrow\; a = -266{,}7 \cdot x$$

Por tanto, la aceleración es directamente proporcional al desplazamiento de forma que la representación será una recta que pasa por el origen:

x (cm)	a (cm/s^2)
0	0
12	–3 200,4