Unidad 4 – Polinomios

PÁGINA 58

¿QUÉ NECESITAS SABER?

Sacar factor común

Extrae el factor común en las siguientes expresiones:

a) $3x - 6$ b) $5x^3 - 10x^2 + 5x$

Evaluar un polinomio en un punto

Dado el polinomio $P(x) = x^4 - x^3 - x + 1$, calcula:

a) $P(1)$ b) $P(-1)$ c) $P(2)$ d) $P(-2)$

Realizar operaciones sencillas con polinomios

Opera y simplifica:

a) $2x^3 + 3x^2(2x - x^3)$

b) $-3x + 5x^2 - (2x + 3x^2) - 2(x + 5)$

c) $(3x - 5x^2)(2x + 4) - (x + 3)(x - 2)$

d) $x + 2(3x - 4)(2x + 3) - x(2x + 3)$

SOLUCIONES

Sacar factor común.

a)

$$3x - 6 = 3 \cdot (x - 2)$$

b)

$$5x^3 - 10x^2 + 5x = 5x \cdot (x^2 - 2x + 1)$$

Evaluar un polinomio en un punto.

Dado el polinomio $P(x) = x^4 - x^3 - x + 1$, podemos asegurar que:

a) $P(1) = 1^4 - 1^3 - 1 + 1 = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$
b) $P(-1) = (-1)^4 - (-1)^3 - (-1) + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$
c) $P(2) = 2^4 - 2^3 - 2 + 1 = 16 - 8 - 2 + 1 = 7$
d) $P(-2) = (-2)^4 - (-2)^3 - (-2) + 1 = 16 + 8 + 2 + 1 = 27$

Realizar operaciones sencillas con polinomios.

a)

$$x^3 + 3x^2 \cdot (2x - x^3) = 2x^3 + 6x^3 - 3x^5 = -3x^5 + 8x^3$$

b)

$$-3x + 5x^2 - (2x + 3x^2) - 2(x + 5) = -3x + 5x^2 - 2x - 3x^2 - 2x - 10 = 2x^2 - 7x - 10$$

c)

$$(3x - 5x^2) \cdot (2x + 4) - (x + 3) \cdot (x - 2) = 6x^2 + 12x - 10x^3 - 20x^2 - (x^2 - 2x + 3x - 6) =$$
$$6x^2 + 12x - 10x^3 - 20x^2 - x^2 + 2x - 3x + 6 = -10x^3 - 15x^2 + 11x + 6$$

d)

$$x + 2(3x - 4) \cdot (2x + 3) - x \cdot (2x + 3) = x + (6x - 8) \cdot (2x + 3) - 2x^2 - 3x =$$
$$x + 12x^2 + 18x - 16x - 24 - 2x^2 - 3x = 10x^2 - 24$$

PÁGINA 60

ACTIVIDADES

1. Indica el coeficiente, la parte literal y el grado de los siguientes monomios:

a) $-3'4xy$ b) xy^3 c) $3x^5$ d) 5

2. Escribe tres monomios de grado 4 con x, y como indeterminadas y cuyas partes literales sean distintas.

3. Calcula:

a) $-2x^3yz + 5x^3yz + x^3yz$

b) $5x^3 \cdot 3x^2y \cdot (-4xz^3)$

c) $\sqrt{2}x^3 \cdot \sqrt{2}xy^4$

d) $(-18x^3yz^3) : 6xyz^3$

SOLUCIONES

1.

MONOMIO	COEFICIENTE	PARTE LITERAL	GRADO
a) -3'4xy	-3'4	xy	2
b) xy^3	1	xy^3	4
c) $3x^5$	3	x^5	5
d) 5	5	x^0	0

2.

$3x^2y^2$; $-7xy^3$; x^3y

3.

a)

$$-2x^3yz + 5x^3yz + x^3yz = 4x^3yz$$

b)

$$5x^3 \cdot 3x^2y \cdot (4xz^3) = 60x^6yz^3$$

c)

$$\sqrt{2}x^3 \cdot \sqrt{2}xy^4 = (\sqrt{2})^2x^4y^4 = 2x^4y^4$$

d)

$$(18x^3yz^3) : 6xyz^3 = 3x^2$$

PÁGINA 61

ACTIVIDADES

4. Indica el grado y nombra todos los coeficientes del siguiente polinomio:

$$P(x) = -3x^7 + 2x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x - 3$$

5. Escribe un polinomio de grado 5 que tenga como término independiente 3 y cuyo coeficiente de grado 2 sea –5.

6. Escribe un polinomio completo con dos variables de grado 3.

7. Evalúa el polinomio $P(x) = -x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2$ en:

a) 1 b) –1 c) 2 d) –2 e) 3 f) –3

SOLUCIONES

4.
El grado del polinomio coincide con el del monomio de mayor grado, en este caso, el grado del polinomio P(x) es 7.

Los coeficientes del polinomio ordenados desde el monomio de mayor grado al del menor son: -3, 2, -3, 2, -1, -3

5.
Si el polinomio es de grado 5 su término de mayor grado es x^5.
Si el coeficiente de grado 2 es -5, el sumando de grado 2 es $-5x^2$.
Y puesto que el término independiente es 3, el polinomio más sencillo que cumple las condiciones pedidas es: $P(x) = x^5 - 5x^2 + 3$.
A este polinomio le podemos añadir cualquier sumando de grado 4, 3 o de grado uno. Por ejemplo:
$P(x) = x^5 + 4x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 9x + 3$.

6.
Un polinomio es completo si tiene todos los términos de todos los grados.
$P(x, y) = x^3 - 2x^2y + 3xy^2 - 7y^3 - x^2 + xy - y^2 + 3x - 6y + 1$

7.
Dado el polinomio $P(x) = -x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2$:

a) $P(1) = -1^4 + 3.1^3 + 1^2 - 2.1 - 2 = -1 + 3 + 1 - 2 - 2 = -1$
b) $P(-1) = -(-1)^4 + 3.(-1)^3 + (-1)^2 - 2.(-1) - 2 = -1 - 3 + 1 + 2 - 2 = -3$
c) $P(2) = -2^4 + 3.2^3 + 2^2 - 2.2 - 2 = -16 + 24 + 4 - 4 - 2 = 6$
d) $P(-2) = -(-2)^4 + 3.(-2)^3 + (-2)^2 - 2.(-2) - 2 = -16 - 24 + 4 + 4 - 2 = -34$
e) $P(3) = -3^4 + 3.3^3 + 3^2 - 2.3 - 2 = -81 + 81 + 9 - 6 - 2 = 1$
f) $P(-3) = -(-3)^4 + 3.(-3)^3 + (-3)^2 - 2.(-3) - 2 = -81 - 81 + 9 + 6 - 2 = -149$

PÁGINA 62

ACTIVIDADES

8. Sean los polinomios:

$P(x) = x^2 - 3x \qquad Q(x) = -3x^4 + 2x^3 - 3x^2 \qquad R(x) = 3x^2 - 2x + 4$

Calcula:

a) $P(x) - R(x)$ b) $Q(x) \cdot R(x)$ c) $Q(x) + P(x) \cdot R(x)$

9. Realiza las siguientes operaciones de polinomios:

a) $(3x^2 - 2x)(-x^3 + 3x^2 + 2) - x^3(2x^2 - 3x + 5)$

b) $(x^2 - 3x)(2x + 3) - (2x - 3)(x - 4)$

c) $3x^4 - 2x^3 + 3x^2(3 - 2x^2) - 2x(2x^3 - 3x^2)$

d) $3x^5 - 2x^3(-3x^2 + 2x) - (2x^2 - 5x)(-3x + 2x^2)$

10. Opera:

a) $(2x + 3)^2$ b) $(-3x^2 - 5x)^2$ c) $(2x - x^2)^3$

SOLUCIONES

8.

Sean los polinomios: $P(x) = x^2 - 3x$; $Q(x) = -3x^4 + 2x^3 - 3x^2$; y $R(x) = 3x^2 - 2x + 4$. Entonces:

a)

$$P(x) - R(x) = x^2 - 3x - (3x^2 - 2x + 4) = x^2 - 3x - 3x^2 + 2x - 4 = -2x^2 - x - 4$$

b)

$$Q(x) \cdot R(x) = (-3x^4 + 2x^3 - 3x^2) \cdot (3x^2 - 2x + 4) =$$
$$-9x^6 + 6x^5 - 12x^4 + 6x^5 - 4x^4 + 8x^3 - 9x^4 + 6x^3 - 12x^2 = -9x^6 + 12x^5 - 25x^4 + 14x^3 - 12x^2$$

c)

$$Q(x) + P(x) \cdot R(x) = -3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + (x^2 - 3x) \cdot (3x^2 - 2x + 4) =$$
$$-3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + (3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 9x^3 + 6x^2 - 12x) =$$
$$-9x^3 + 7x^2 - 12x$$

9.

a)

$$(3x^2 - 2x) \cdot (-x^3 + 3x^2 + 2) - x^3 \cdot (2x^2 - 3x + 5) = (-3x^5 + 9x^4 + 6x^2 + 2x^4 - 6x^3 - 4x) - (2x^5 - 3x^4 + 5x^3) =$$
$$-3x^5 + 11x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 4x - 2x^5 + 3x^4 - 5x^3 = -5x^5 + 14x^4 - 11x^3 + 6x^2 - 4x$$

b)

$$(x^2 - 3x) \cdot (2x + 3) - (2x - 3) \cdot (x - 4) = 2x^3 + 3x^2 - 6x^2 - 9x - (2x^2 - 8x - 3x + 12) =$$
$$2x^3 + 3x^2 - 6x^2 - 9x - 2x^2 + 8x + 3x - 12 = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 12$$

c)

$$3x^4 - 2x^3 + 3x^2 \cdot (3 - 2x^2) - 2x \cdot (2x^3 - 3x^2) = 3x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 6x^4 - 4x^4 + 6x^3 = -7x^4 + 4x^3 + 9x^2$$

d)

$$3x^5 - 2x^3 \cdot (-3x^2 + 2x) - (2x^2 - 5x) \cdot (-3x + 2x^2) = 3x^5 + 6x^5 - 4x^4 - (-6x^3 + 4x^4 + 15x^2 - 10x^3) =$$
$$3x^5 + 6x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 4x^4 - 15x^2 + 10x^3 = 9x^5 - 8x^4 + 16x^3 - 15x$$

10.

Aplicando las igualdades notables

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

tenemos que:

a)

$$(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

b)

$$(-3x^2 - 5x)^2 = (-3x^2)^2 - 2 \cdot (-3x^2) \cdot (5x) + (5x)^2 = 9x^4 + 30x^3 + 25x^2$$

c)

$$(2x - x^2)^3 = (2x - x^2)^2 \cdot (2x - x^2) = \left((2x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot (x^2) + (x^2)^2 \right) \cdot (2x - x^2) =$$
$$(4x^2 - 4x^3 + x^4) \cdot (2x - x^2) = 8x^3 - 4x^4 - 8x^4 + 4x^5 + 2x^5 - x^6 = -x^6 + 6x^5 - 12x^4 + 8x^3$$

PÁGINA 63

ACTIVIDADES

11. Realiza las siguientes divisiones de polinomios:

a) $(3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 5) : (-x^2 + 3)$

b) $(5x^5 - 3x^3 + 2x - 5) : (x^2 - 3x + 4)$

c) $(-6x^6 + 19x^5 - 47x^4 + 61x^3 - 68x^2 + 42x - 5) : (-2x^3 + 5x^2 - 9x + 4)$

d) $(-14x^6 + 10x^5 - 44x^4 + 49x^3 - 48x^2 + 43x - 23) : (-2x^3 - 4x + 3)$

SOLUCIONES

11.

a) $(3x^4 - 2x^3 - x + 5) : (-x^2 + 3)$

$$C(x) = -3x^2 + 2x - 12$$
$$R(x) = -7x + 41$$

b) $(5x^5 - 3x^3 + 2x - 5) : (x^2 - 3x + 4)$

$$C(x) = 5x^3 - 15x^2 + 22x + 6$$
$$R(x) = 68x - 29$$

c) $(-6x^6 + 19x^5 - 47x^4 + 61x^3 - 68x^2 + 42x - 5) : (-2x^3 + 5x^2 - 9x + 4)$

$$C(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3$$
$$R(x) = -5x + 7$$

d) $(-14x^6 + 10x^5 - 44x^4 + 49x^3 - 48x^2 + 43x - 23) : (-2x^3 - 4x + 3)$

$$C(x) = 7x^3 - 5x^2 + 8x - 4$$
$$R(x) = -x^2 + 3x - 11$$

PÁGINA 64

ACTIVIDADES

12. Desarrolla las siguientes expresiones algebraicas utilizando las identidades notables:

a) $(x-2)^2$ c) $(2x+1)^2$ e) $(-x^2+3)^2$

b) $(x+3)^2$ d) $(3x+1)(3x-1)$ f) $(-2x+5)(2x+5)$

13. Utiliza las identidades notables para escribir las siguientes expresiones en forma de producto o de potencia:

a) x^2-4x+4 c) $x^2+8x+16$ e) $4x^6-20x^3+25$

b) $9x^2-16$ d) $4x^8-3$ f) $4x^4+4x^2+1$

14. Extrae factor común en las siguientes expresiones:

a) $4x^2-6x+2x^3$ c) $-3xy-2xy^2-10x^2yz$

b) $12x^4y^2+6x^2y^4-15x^3y$ d) $-2x(x-3)^2+4x^2(x-3)$

SOLUCIONES

12.
Aplicando las igualdades notables

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

tenemos que:

a)

$$(x-2)^2=x^2-2x2+2^2=x^2-4x+4$$

b)

$$(x+3)^2=x^2+2x3+3^2=x^2+6x+9$$

c)

$$(2x+1)^2=(2x)^2+2\cdot(2x)+1^2=4x^2+4x+1$$

d)

$$(3x+1)\cdot(3x-1)=(3x)^2-(1)^2=9x^2-1$$

e)

$$(-x^2+3)^2=(-x^2)^2+2\cdot(-x^2)\cdot 3+3^2=x^4-6x^2+9$$

f)

$$(-2x+5)\cdot(2x+5)=(5-2x)\cdot(5+2x)=$$
$$(5)^2-(2x)^2=25-4x^2$$

13.

a)

$$x^2-4x+4=x^2-2x2+2^2=(x-2)^2$$

b)

$$9x^2-16=(3x)^2-4^2=(3x+4)\cdot(3x-4)$$

c)

$$x^2+8x+16=x^2+2x4+4^2=(x+4)^2$$

d)

$$4x^8-3=(2x^4)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=(2x^4+\sqrt{3})\cdot(2x^4-\sqrt{3})$$

e)

$$4x^6 - 20x^3 + 25 = \left(2x^3\right)^2 + 2 \cdot 2x^3 \cdot 5 + 5^2$$
$$= (2x^3 + 5)^2$$

f)

$$4x^4 + 4x^2 + 1 = \left(2x^2\right)^2 + 2 \cdot 2x^2 \cdot 1 + 1^2$$
$$= (2x^2 + 1)^2$$

14.

a)

$$4x^2 - 6x + 2x^3 = 2x \cdot \left(2x - 3 + x^2\right)$$

b)

$$12x^4y^2 + 6x^2y^4 - 15x^3y = 3x^2y \cdot \left(4x^2y + 2y^3 - 5x\right)$$

c)

$$-3xy - 2xy^2 - 10x^2yz = xy \cdot \left(-3 - 2y - 10xz\right)$$

d)

$$-2x \cdot (x-3)^2 + 4x^2 \cdot (x-3) = (x-3) \cdot (-2x^2 + 6x + 4x^2)$$
$$= (x-3) \cdot (2x^2 + 6x)$$

PÁGINA 65

ACTIVIDADES

15. Realiza las siguientes divisiones utilizando la regla de Ruffini:

a) $(x^3 - 1) : (x - 1)$

b) $(-x^4 - 3x^2 + 5x - 3) : (x + 1)$

c) $(x^3 - 3x^2 + x - 2) : (x - 3)$

d) $(5x^3 - 3) : (x + 2)$

e) $(3x^3 - 2x^2 + x) : (x + 2)$

f) $(-2x^3 + 4x^2) : (x - 2)$

g) $(x^4 - x^2 - x + 1) : (x - 1)$

h) $(-2x^7 + 3x^6 + 2x^3 + 48) : (x - 2)$

SOLUCIONES

15.

a) $C(x) = x^2 + x + 1$
$R(x) = 0$

	1	0	0	-1
1		1	1	1
	1	1	1	0

b) $C(x) = -x^3 + x^2 - 4x + 9$
$R(x) = -12$

	-1	0	-3	5	-3
-1		1	-1	4	-9
	-1	1	-4	9	-12

c) $C(x) = x^2 + 1$
$R(x) = 1$

	1	-3	1	-2
3		3	0	3
	1	0	1	1

d) $C(x) = x^2 - 2x + 4$
$R(x) = -11$

	5	0	0	-3
-2		-2	4	-8
	1	-2	4	-11

e) $C(x) = 3x^2 - 8x + 17$
$R(x) = -34$

	3	-2	1	0
-2		-6	16	-34
	3	-8	17	-34

f) $C(x) = -2x^2$
$R(x) = 0$

	-2	4	0	0
2		-4	0	0
	-2	0	0	0

g) $C(x) = x^3 + x^2 - 1$
$R(x) = 0$

	1	0	-1	-1	1
1		1	1	0	-1
	1	1	0	-1	0

h) $C(x) = -2x^6 - x^5 - 2x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 12x - 24$
$R(x) = 0$

	-2	3	0	0	2	0	0	48
2		-4	-2	-4	-8	-12	-24	-48
	-2	-1	-2	-4	-8	-12	-24	0

PÁGINA 66

ACTIVIDADES

16. Calcula el resto de $(3x^4 - 2x^3 + x^2 - 3) : (x + 1)$ sin efectuar la división.

17. Realiza la división del ejercicio anterior y comprueba que obtienes el mismo resultado para el resto.

18. Busca dos raíces enteras para cada uno de los siguientes polinomios:

a) $3x^3 - x^2 - 8x - 4$

b) $3x^3 + 2x^2 - 3x - 2$

c) $2x^4 + 3x^3 - 20x^2 - 27x + 18$

d) $2x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 8x + 4$

e) $2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3$

f) $3x^5 + x^4 - 30x^3 - 10x^2 + 27x + 9$

SOLUCIONES

16.
Aplicando el Teorema del Resto se asegura que el resto de dividir $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 3$ entre $(x + 1)$ es $P(-1)$, es decir,

$R(x) = P(-1) = 3(-1)^4 - 2(-1)^3 + (-1)^2 - 3 = 3 + 2 + 1 - 3 = 3$

17.
$P(x) : (x + 1) = C(x)$
$R(x) = 3$

18.
a) Las posibles raíces de $P(x) = 3x^3 - x^2 - 8x - 4$ son los divisores del término independiente, es decir, +1, -1, +2, -2, +4, -4.

$P(-1) = 3.(-1)^3 - (-1)^2 - 8.(-1) - 4 = -3 - 1 + 8 - 4 = 0$
$P(2) = 3.2^3 - 2^2 - 8.2 - 4 = 24 - 4 - 16 - 4 = 0$

-1 y 2 son dos raíces de $P(x) = 3x^3 - x^2 - 8x - 4$.

b) Las posibles raíces de $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2$ son los divisores del término independiente, es decir, +1, -1, +2, -2.

$P(1) = 3.1^3 + 2.1^2 - 3.1 - 2 = 3 + 2 - 3 - 2 = 0$
$P(-1) = 3.(-1)^3 + 2.(-1)^2 - 3.(-1) - 2 = -3 + 2 + 3 - 2 = 0$

1 y -1 son dos raíces de $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2$.

c) Las posibles raíces de $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 20x^2 - 27x + 18$ son los divisores del término independiente, es decir, +1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6, +9 y -9.

$P(-2) = 2.(-2)^4 + 3.(-2)^3 - 20.(-2)^2 - 27.(-2) + 18 = 32 - 24 - 80 + 54 + 18 = 0$
$P(3) = 2.3^4 + 3.3^3 - 20.3^2 - 27.3 + 18 = 162 + 81 - 180 - 81 + 18 = 0$

-2 y 3 son dos raíces de $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 20x^2 - 27x + 18$.

d) Las posibles raíces de $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 – 8x + 4$ son los divisores del término independiente, es decir, +1, -1, +2, -2, +4, -4.

$P(1) = 2.1^4 + 5.1^3 – 3.1^2 – 8.1 + 4 = 0$
$P(-2) = 2. (-2)^4 + 5. (-2)^3 – 3. (-2)^2 – 8. (-2) + 4 = 32 – 40 -12 + 16 + 4 = 0$

1 y -2 son dos raíces de $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 – 8x + 4$.

e) Las posibles raíces de $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 5x^2 – 5x + 3$ son los divisores del término independiente, es decir, +1, -1, +2, -2, +3, -3.

$P(1) = 2.1^4 + 5.1^3 – 5.1^2 – 5.1 + 3 = 2 + 5 – 5 - 5 + 3 = 0$
$P(-1) = 2. (-1)^4 + 5. (-1)^3 – 5. (-1)^2 – 5. (-1) + 3 = 2 – 5 – 5 + 5 + 3 = 0$

1 y -1 son dos raíces de $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 5x^2 – 5x + 3$.

f) Las posibles raíces de $P(x) = 3x^5 + x^4 – 30x^3 – 10x^2 + 27x + 9$ son los divisores del término independiente, es decir, +1, -1, +2, -2, +3, -3, +9 y -9.

$P(1) = 3.1^5 + 1^4 – 30.1^3 – 10.1^2 + 27.1 + 9 = 3 + 1 – 30 – 10 + 27 + 9 = 0$
$P(-1) = 3. (-1)^5 + (-1)^4 – 30. (-1)^3 – 10. (-1)^2 + 27. (-1) + 9 = -3 + 1 + 30 – 10 - 27 + 9 = 0$

1 y -1 son dos raíces de $P(x) = 3x^5 + x^4 – 30x^3 – 10x^2 + 27x + 9$.

PÁGINA 67

ACTIVIDADES

19. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

b) $2x^3 - x^2 - 7x + 6$

c) $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

d) $3x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 24x$

e) $x^4 - 1$

f) $3x^5 - 3x^4 - 6x^2 - 12x$

SOLUCIONES

19.

a) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

Aplicamos Ruffini intentando dividir por los divisores del término independiente, en nuestro caso 1 y -1.

	1	-3	3	-1
1		1	-2	1
	1	-2	1	0
1		1	-1	
	1	-1	0	

$P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$.

b) $P(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 6$

Aplicamos Ruffini intentando dividir por los divisores del término independiente, en nuestro caso 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6 y -6.

	2	-1	-7	6
1		2	1	-6
	2	1	-6	0
-2		-4	6	
	2	-3	0	

$$P(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 6 = (x-1)\cdot(x+2)\cdot(2x-3)$$

c) $P(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$.

Aplicamos Ruffini intentando dividir por los divisores del término independiente, en nuestro caso 1, -1, 2, -2, 4, -4.

	1	5	8	4
-1		-1	-4	-4
	1	4	4	0
-2		-2	-4	
	1	2	0	

$$P(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x+1)\cdot(x+2)^2$$

d) $P(x) = 3x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 24x$.

Sacamos factor común 3x, de manera que obtenemos: $P(x) = 3x\cdot(x^3 + 6x^2 - 12x - 8)$

Aplicamos Ruffini i sobre el polinomio que obtenemos al sacar factor común, intentando dividir por los divisores del término independiente, en nuestro caso 1, -1, 2, -2, 4, -4, +8 y -8.

	1	6	-12	-8
2		2	16	8
	1	8	4	0

El resto de raíces del polinomio no son números enteros, así que resolvemos la ecuación de segundo grado:

$x^2 + 8x + 4 = 0$

$x = -4 \pm \sqrt{3}$

Por lo tanto, al factorizar el polinomio inicial obtenemos:

$$P(x) = 3x\cdot(x-2)\cdot(x+4+\sqrt{3})\cdot(x+4-\sqrt{3})$$

e) $P(x) = x^4 - 1$

Si aplicamos las igualdades notables que hemos visto en epígrafes anteriores tenemos que: $P(x) = x^4 - 1 = (x^2+1)\cdot(x^2-1) = (x^2+1)\cdot(x+1)(x-1)$

Observación: El factor (x^2 + 1) no tiene raíces reales.

f) $P(x) = 3x^5 - 3x^4 - 6x^2 - 12x$

Sacamos factor común 3x, de manera que obtenemos: $P(x) = 3x \cdot (x^4 - x^3 - 2x - 4)$

Aplicamos Ruffini sobre el polinomio que obtenemos al sacar factor común, intentando dividir por los divisores del término independiente, en nuestro caso 1, -1, 2, -2, 4 y -4.

	1	-1	0	-2	-4
1		-1	2	-2	4
	1	-2	2	-4	0
2		2	0	4	
	1	0	2	0	

Por lo tanto, al factorizar el polinomio inicial obtenemos: $P(x) = 3x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x^2 + 2)$

Observación: El factor (x^2 + 2) no tiene raíces reales.

PÁGINA 68

ACTIVIDADES

20. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x(x^2-4)}{x^2-2x}$ b) $\dfrac{4x^3+4x^2+x}{x^2-x}$ c) $\dfrac{4x^2-12x+9}{2x^3+7x^2-15}$

21. Reduce a común denominador las siguientes fracciones algebraicas:

$\dfrac{3}{x+3}$ $\dfrac{x+3}{x-3}$ $\dfrac{x+1}{x^2-3x}$

SOLUCIONES

20.

a) $\dfrac{x\cdot(x^2-4)}{x^2-2x}=\dfrac{x\cdot(x-2)\cdot(x+2)}{x\cdot(x-2)}=x+2$

b) $\dfrac{4x^3+4x^2+x}{x^2-x}=\dfrac{x\cdot(2x+1)^2}{x\cdot(x-1)}=\dfrac{(2x+1)^2}{(x-1)}$

c) $\dfrac{4x^2-12x+9}{2x^3+7x^2-15x}=\dfrac{(2x-3)^2}{(2x-3)\cdot(x+5)}=\dfrac{2x-3}{x+5}$

21.

Para reducir a común denominador tenemos que factorizar cada uno de los polinomios del denominador y calcular su mínimo común múltiplo:

$$\frac{3}{x+3},\ \frac{x+3}{x-3},\ \frac{x+1}{x^2-3x}$$

$$x^2-3x=x\cdot(x-3)$$

$$mcm(x+3,\ x-3,\ x^2-3x)=x\cdot(x-3)\cdot(x+3)$$

$$\frac{3\cdot(x-3)\cdot x}{x\cdot(x-3)\cdot(x+3)},\ \frac{x\cdot(x+3)^2}{x\cdot(x-3)\cdot(x+3)},\ \frac{(x+1)\cdot(x+3)}{x\cdot(x-3)\cdot(x+3)}$$

$$\frac{3x^2-9x}{x^3-9x},\ \frac{x^3+6x^2+9x}{x^3-9x},\ \frac{x^2+4x+3}{x^3-9x}$$

PÁGINA 69

ACTIVIDADES

22. Realiza las siguientes operaciones de fracciones algebraicas y simplifica el resultado cuando sea posible:

a) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}$

b) $\frac{x}{x-3}-\frac{2x-1}{x^2-9}$

c) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}$

d) $\frac{1-x}{x+3}\cdot\frac{x}{x+1}$

e) $\frac{4+2x}{x-2}:\frac{2x+x^2}{x^2-4}$

f) $\frac{1}{x}+\frac{x}{x+3}\cdot\frac{x^2+6x+9}{x^2}$

SOLUCIONES

22.

a) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{(x+2)^2}{(x-2)\cdot(x+2)}-\frac{(x-2)^2}{(x-2)\cdot(x+2)}=$

$\frac{x^2+4x+4-(x^2-4x+4)}{(x-2)\cdot(x+2)}=\frac{x^2+4x+4-x^2+4x-4}{x^2-4}=\frac{8x}{x^2-4}$

b) $\frac{x}{x-3}-\frac{2x-1}{x^2-9}=\frac{x\cdot(x+3)-2x+1}{x^2-9}=\frac{x^2+x+1}{x^2-9}$

c) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1+1-(x+1)}{x^2-1}=\frac{-1}{x^2-1}=\frac{1}{1-x^2}$

d) $\frac{1-x}{x+3}\cdot\frac{x}{x+1}=\frac{x\cdot(1-x)}{(x+3)\cdot(x+1)}=\frac{-x^2+x}{x^2+4x+3}$

e) $\frac{4+2x}{x-2}:\frac{2x+x^2}{x^2-4}=\frac{(4+2x)\cdot(x-2)\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x+2)\cdot x}=\frac{4+2x}{x}$

f)

f) $\frac{1}{x}+\frac{x}{x+3}\cdot\frac{x^2+6x+9}{x^2}=\frac{1}{x}+\frac{(x+3)^2}{x+3}=\frac{1+x\cdot(x+3)}{x}=\frac{x^2+3x+1}{x}$

ACTIVIDADES FINALES

→ EJERCICIOS

Polinomios

23. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $2x^3y - 5x^3y + \frac{3}{4}x^3y$

b) $(2xy)(-3x^2yz)\left(\frac{5}{6}x^2yz^2\right)$

c) $\frac{-3a(a^2b) + 5a^4b}{-ab^2}$

d) $\frac{-3xy^2(-2x^3y)}{4x^2y}$

24. Escribe un polinomio completo de grado 4 con dos indeterminadas.

25. Evalúa el polinomio $P(x) = -x^3 - 2x^2 + x - 3$ en:

a) $x = 1$ c) $x = -2$ e) $x = -3$

b) $x = -1$ d) $x = 2$

26. Escribe un polinomio de grado 5 que verifique las siguientes condiciones:

- El coeficiente líder es 4.
- El término independiente es –3.
- El coeficiente de grado 2 es 1.
- No tiene término de grado 3.

Operaciones con polinomios

27. Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

a) $(3x^3 - 5x^2 + 3x) + (2x^3 + 3x^2) - (5x^3 - 4x^2 + 3x)$

b) $2x(-x^2 + 5x - 3) - x(3x + 1)(x - 3)$

c) $(2x - 1)(3x - x^2) + 5x(2x - 3)$

d) $4x - x(2x^2 - 3x)(x - 2) + (5x - 2)(3 - x^2)$

28. Sean los polinomios:

$P(x) = -x^2 + 5x - 2$ $R(x) = 3x^2 - x + 1$

$Q(x) = 3x^2 - 2x$ $S(x) = 2x - 3$

Calcula:

a) $P(x) + Q(x) - R(x)$

b) $Q(x) - P(x) \cdot S(x)$

c) $P(x) \cdot R(x) - Q(x) \cdot S(x)$

29. Realiza las siguientes divisiones de polinomios:

a) $(-3x^5 + 11x^4 - 4x^3 - 21x^2 + 26x - 10) : (3x^2 - 5x + 3)$

b) $(-12x^5 - 18x^4 + 8x^3 + 27x^2 + 6x - 11) : (-6x^2 - 3x + 2)$

c) $(-6x^7 - x^5 + 40x^3 - 2x + 5) : (-x^3 + 5)$

30. Simplifica:

$$2x^2y(-3xy^2 + 2x^2 - y^2) + 3xy^3(2x^2 - 5xy)$$

Identidades notables. Factor común

31. Utiliza las identidades notables para desarrollar las siguientes expresiones:

a) $(x + 4)^2$ d) $(3x + 7)(3x - 7)$

b) $(x - 5)^2$ e) $(-x + 3)(x + 3)$

c) $(x^3 - 3)^2$ f) $(x - 3)(3 - x)$

32. Desarrolla las siguientes expresiones utilizando las identidades notables:

a) $(2x - 3)^2$ e) $(-3x - 5)^2$

b) $(-2x + 5)^2$ f) $(-3x - 2)(3x + 2)$

c) $(3x^2 + x^3)^2$ g) $(3x^2 - 2x)(2x + 3x^2)$

d) $(-5x - 6)^2$ h) $(2x^2 + 5x)(-5x + 2x^2)$

33. Desarrolla las siguientes expresiones utilizando las identidades notables:

a) $\left(x - \frac{1}{5}\right)^2$ d) $\left(-\frac{x}{2} + 3\right)\left(3 + \frac{x}{2}\right)$

b) $\left(2x + \frac{3}{2}\right)^2$ e) $\left(-\frac{3}{2}x - 5\right)^2$

c) $\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x\right)^2$ f) $\left(-\frac{3}{4}x^2 - 3x\right)\left(\frac{3}{4}x^2 + 3x\right)$

34. Opera y simplifica utilizando las identidades notables:

a) $(x + 1)^2 + (x - 2)(x + 2)$

b) $(3x - 1)^2 - (2x + 5)(2x - 5)$

c) $(2x + 3)(-3 + 2x) - (x + 1)^2$

d) $(-x + 2)^2 - (2x + 1)^2 - (x + 1)(x - 1)$

e) $-3x + x(2x - 5)(2x + 5) - (1 - x^2)^2$

f) $(3x - 1)^2 - (-5x^2 - 3x)^2 - (-x + 2x^2)(2x^2 + x)$

35. Expresa en forma de producto o de cuadrado utilizando las identidades notables:

a) $x^2 - 6x + 9$ c) $x^4 - 4x^2 + 4$

b) $x^2 + 10x + 25$ d) $4x^2 - 4x + 1$

36. Expresa en forma de producto o de cuadrado utilizando las identidades notables:

a) $x^2 - 9$ d) $81 - 4x^2$

b) $x^2 + 6x + 9$ e) $x^4 + 2x^2 + 1$

c) $x^4 - 9$ f) $9x^4 - 30x^3 + 25x^2$

37. Extrae factor común en las siguientes expresiones:

a) $-3x + 6x^2 + 12x^3$

b) $2ab^2 - 4a^3b + 8a^4b^3$

c) $2x^3 + 4x^2 - 8x$

d) $6x^3y^2 - 3x^2yz + 9xy^3z^2$

Polinomios.

23.

a) $2x^3y - 5x^3y + \frac{3}{4}x^3y = \frac{8}{4}x^3y - \frac{20}{4}x^3y + \frac{3}{4}x^3y = -\frac{9}{4}x^3y$

b) $(2xy)\cdot(-3x^2yz)\cdot\left(\frac{5}{6}x^2yz^2\right) = -5x^5y^2z^3$

c) $\frac{-3a(a^2b)+5a^4b}{-ab^3} = \frac{-3a^3b+5a^4b}{-ab^3} = \frac{3a^2-5a^3}{b^2}$

d) $\frac{-3xy^2(-2x^3y)}{4x^2y} = \frac{6x^4y^3}{4x^2y} = \frac{3x^2y^2}{2}$

24.

Un polinomio completo es aquel que tiene términos en todos los grados. Así:

$P(x,y) = 4x^4 - 5x^3y + 3x^2y^2 + xy^3 - 2y^4 + 4x^3 - x^2y + 4xy^2 - xy^2 + 2y^3 +$
$+ 2x^2 - xy - 5y^2 - 2x - y + 13.$

25.

$P(x) = -x^3 - 2x^2 + x - 3.$

a) $P(1) = -1^3 - 2.1^2 + 1 - 3 = -1 - 2 + 1 - 3 = -5.$
b) $P(-1) = -(-1)^3 - 2.(-1)^2 + (-1) - 3 = 1 - 2 - 1 - 3 = -5.$
c) $P(-2) = -(-2)^3 - 2.(-2)^2 + (-2) - 3 = 8 - 8 - 2 - 3 = -5.$
d) $P(2) = -2^3 - 2.2^2 + 2 - 3 = -8 - 8 + 2 - 3 = -11.$
e) $P(-3) = -(-3)^3 - 2.(-3)^2 + (-3) - 3 = 27 - 18 - 3 - 3 = 3$

26.

Si el coeficiente líder es cuatro y el polinomio es de grado 5, entonces el término de mayor grado es : $4x^5$.

Si el coeficiente de grado dos es uno, entonces, el sumando de grado dos es x^2.
Como el polinomio no tiene término en grado tres y su término independiente es -3, entonces, el polinomio más sencillo que cumple estas condiciones es:

$$P(x) = 4x^5 + x^2 - 3.$$

Podríamos añadirle cualquier término de grado 4, perno nunca de tercer grado.

Operaciones con polinomios.

27.

a) $(3x^3 - 5x^2 + 3x) + (2x^3 + 3x^2) - (5x^3 - 4x^2 + 3x) = 2x^2$

b) $2x\cdot(-x^2+5x-3) - x\cdot(3x+1)(x-3) = -2x^3 + 10x^2 - 6x - (3x^3 - 8x^2 - 3x) =$
$-2x^3 + 10x^2 - 6x - 3x^3 + 8x^2 + 3x = -5x^3 + 18x^2 - 3x$

c) $(2x-1)\cdot(3x-x^2)+5x\cdot(2x-3)=7x^2-2x^3-3x+10x^2-15x=-2x^3+17x^2-18x$

d) $4x-(2x^3-3x^2)\cdot(x-2)+15x-5x^3-6+2x=4x-(2x^4-7x^3+6x^2)+15x-5x^3-6+2x=$
$=4x-2x^4+7x^3-6x^2+15x-5x^3-6+2x=-2x^4+2x^3-6x^2+21x-6$

28.

a) $P(x)+Q(x)-R(x)=(-x^2+5x-2)+(3x^2-2x)-(3x^2-x+1)=$
$=2x^2+3x-2-3x^2+x-1=-x^2+4x-3$

b) $Q(x)-P(x)\cdot S(x)=(3x^2-2x)-(-x^2+5x-2)\cdot(2x-3)=3x^2-2x-(-2x^3-7x^2-15x-10)=$
$3x^2-2x+2x^3+7x^2+15x+10=2x^3+10x^2+13x+10$

c) $P(x)\cdot R(x)-Q(x)\cdot S(x)=(-x^2+5x-2)\cdot(3x^2-x+1)-(3x^2-2x)\cdot(2x-3)=$
$=-3x^4+16x^3-12x^2+7x+1-(6x^3-13x^2+6x)=$
$=-3x^4+10x^3+x^2+x+1$

29.

a) $(-3x^5+11x^4-4x^3-21x^2+26x-10):(3x^2-5x+3)=-x^3+2x^2+3x-4$
$R(x)=-3x+2$

b) $(-12x^5-18x^4+8x^3+27x^2+6x-11):(-6x^2-3x+2)=2x^3+2x^2-\frac{5}{3}x-3$

$R(x)=\frac{x}{3}-5$

c) $(-6x^7-x^5+40x^3-2x+5):(-x^3+5)=6x^4+x^2+30x-40$
$R(x)=-5x^2-152x+205$

30.

$(2x^2y)\cdot(-3xy^2+2x^2-y^2)+3xy^3\cdot\left(2x^2-5xy\right)=-6x^3y^3+4x^4y-2x^2y^3+6x^3y^3-15x^2y^4=$
$=4x^4y-2x^2y^3-15x^2y^4=x^2y\cdot\left(4x^2-2y^2-15y^3\right)$

Identidades notables. Factor común.

31.
Dadas las siguientes igualdades notables:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

a) $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$

b) $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$

c) $(x^3-3)^2 = x^6 - 6x^3 + 9$

d) $(3x+7)\cdot(3x-7) = 9x^2 - 49$

e) $(-x+3)\cdot(x+3) = (3-x)\cdot(3+x) =$
$= 9 - x^2$

f) $(x-3)\cdot(3-x) = -(3-x)\cdot(3-x) =$
$= -(3-x)^2 = -(9-6x+x^2) = -x^2+6x-9$

32.

a) $(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$

b) $(-2x+5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$

c) $(3x^2+x^3)^2 = 9x^4 - 6x^5 + x^6$

d) $(-5x-6)^2 = 25x^2 + 60x + 36$

e) $(-3x-5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$

f) $(-3x-2)\cdot(3x+2) = -(3x+2)^2 = -(9x^2+12x+4) = -9x^2 12x - 4$

g) $(3x^2-2x)\cdot(2x+3x^2) = (3x^2-2x)\cdot(3x^2+2x) = 9x^4 - 4x^2$

h) $(2x^2+5x)\cdot(-5x+2x^2) = (2x^2+5x)\cdot(2x^2-5x) = 4x^4 - 25x^2$

33.

a) $\left(x-\frac{1}{5}\right)^2 = x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}$

b) $\left(2x+\frac{3}{2}\right)^2 = 4x^2 + 6x + \frac{9}{4}$

c) $\left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x\right)^2 = \frac{4}{9}x^6 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{6}x^2$

d) $\left(-\frac{x}{2}+3\right)\cdot\left(3+\frac{x}{2}\right) = \left(3-\frac{x}{2}\right)\cdot\left(3+\frac{x}{2}\right) = 9 - \frac{x^2}{4}$

e) $\left(-\frac{3}{2}x-5\right)^2 = \frac{9}{4}x^2 + 15x + 25$

f) $\left(-\frac{3}{4}x^3-3x\right)\cdot\left(\frac{3}{4}x^3+3x\right) = -\left(\frac{3}{4}x^3+3x\right)^2 = -\left(\frac{9}{16}x^6 + \frac{9}{2}x^4 + 9x^2\right) = -\frac{9}{16}x^6 - \frac{9}{2}x^4 - 9x^2$

34.

a) $(x+1)^2 + (x-2)\cdot(x+2) = x^2 + 2x + 1 + x^2 - 4 = 2x^2 + 2x - 3$

b) $(3x-1)^2 - (2x+5)\cdot(2x-5) = 9x^2 - 6x + 1 - (4x^2 - 25) = 9x^2 - 6x + 1 - 4x^2 + 25 = 5x^2 - 6x + 26$

c) $(2x+3)\cdot(-3+2x) - (x+1)^2 = (2x+3)\cdot(2x-3) - (x+1)^2 = (4x^2-9) - (x^2+2x+1) = 4x^2 - 9 - x^2 - 2x - 1 = 3x^2 - 2x - 10$

d) $(-x+2)^2-(2x+1)^2-(x+1)\cdot(x-1)=x^2-4x+4-(4x^2+4x+1)-(x^2-1)=x^2-4x+4-4x^2-4x-1-x^2+1=-4x^2-8x+4$

e) $-3x+x\cdot(2x-5)\cdot(2x+5)-(1-x^2)^2=-3x+x\cdot(4x^2-25)-(1-2x^2+x^4)$

$=-3x+4x^3-25x-1+2x^2-x^4=-x^4+4x^3+2x^2-28x-1$

f) $(3x-1)^2-(-5x^2-3x)^2-(-x+2x^2)\cdot(2x^2+x)=9x^2-6x+1-(25x^4+30x^3+9x^2)-(4x^4-x^2)=$

$9x^2-6x+1-25x^4-30x^3-9x^2-4x^4+x^2=-29x^4-30x^3+x^2-6x+1$

35.

a) $x^2-6x+9=(x-3)^2$

b) $x^2+10x+25=(x+5)^2$

c) $x^4-4x^2+4=(x^2-2)^2$

d) $4x^2-4x+1=(2x-1)^2$

36.

a) $x^2-9=(x-3)\cdot(x+3)$

b) $x^2-6x+9=(x-3)^2$

c) $x^4-9=(x^2-3)\cdot(x^2+3)$

d) $81-4x^2=(9-2x)\cdot(9+2x)$

e) $x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2$

f) $9x^4-30x^3+25x^2=x^2\cdot(9x^2-30x+25)=x^2\cdot(3x-5)^2$

37.

a) $-3x+6x^2+12x^3=3x\cdot(-1+2x+4x^2)$

b) $2ab^2-4a^3b+8a^4b^3=2ab\cdot(b-2a^2+4a^3b^2)$

c) $2x^3+4x^2-8x=2x\cdot(x^2+2x-4)$

d) $6x^3y^2-3x^2yz+9xy^3z^3=3xy\cdot(2x^2y-xz+3y^2z^3)$

38. Extrae factor común en las siguientes expresiones:

a) $-2a(a+2)+6a^2(a+2)^2+8a(a+2)$

b) $\frac{2(x+1)}{5}-\frac{1}{5}x(x+1)^2$

c) $-4(a-3b)+8a(a-3b)-3b(a-3b)$

d) $5x^2(x^2+1)-5(x^2+1)$

e) $2b(a+b)-4a(a+b)+4(a+b)$

Regla de Ruffini

39. Utiliza la regla de Ruffini para calcular las siguientes divisiones de polinomios:

a) $(x^5-1):(x-1)$

b) $(x^5-2x^3+3x-4):(x-2)$

c) $(-2x^5-6x^4+3x^2+7x-10):(x+3)$

d) $(3x^4+5x^3-4x^2-4x+2):(x+2)$

e) $(-x^5+3x):(x+1)$

f) $(2x^6-3x^3+4x^2):(x+1)$

g) $(6x^7-18x^6-3x^3+7x^2+6x):(x-3)$

h) $(-3x^6+15x^5+6x^4-30x^3-2x^2+10x):(x-5)$

40. Determina el valor de *a* para que la división sea exacta:

$$(2x^5+4x^4-3x^3-4x^2+x+a):(x+2)$$

Raíces de un polinomio. Teorema del resto

41. Determina el resto de las siguientes divisiones sin realizar la división:

a) $(x^5-1):(x-1)$

b) $(x^5-2x^3+3x-4):(x-2)$

c) $(-2x^5-6x^4+3x^2+7x-10):(x+3)$

d) $(3x^4+5x^3-4x^2-4x+2):(x+2)$

42. Sin hacer la división, determina el resto de las siguientes divisiones:

a) $(-x^5+3x):(x+1)$

b) $(2x^6-3x^3+4x^2):(x+1)$

c) $(6x^7-18x^6-3x^3+7x^2+6x):(x-3)$

d) $(-3x^6+15x^5+6x^4-30x^3-2x^2+10x):(x-5)$

43. Determina el valor de a para que el resto de las siguientes divisiones sea 0:

a) $(x^4+2x^3-3x+a):(x+2)$

b) $(2x^5+ax^4-3x^3-x^2-x):(x+1)$

44. Determina el valor de *a* para que el resto de la siguiente división sea 0:

$$(ax^4-7x^3+5x^2+4x-4):(x-2)$$

45. Determina el valor de *a* para que el resto de la siguiente división sea –1:

$$(-x^5+3x^4+ax^2+9x^2+2x-7):(x-3)$$

46. Determina el valor de *a* para que el siguiente polinomio verifique que $P(-2)=0$:

$$P(x)=-x^4+ax^3-4x^2+2x-4$$

47. Encuentra dos raíces enteras para los siguientes polinomios:

a) $2x^3-x^2-13x-6$

b) $5x^3-x^2-14x-8$

c) $2x^4-x^2-6x^2-x+2$

d) $x^4+4x^3+4x^2+4x+3$

48. Escribe dos polinomios de grado 3 que tengan una raíz doble en $x=-2$ y una raíz en $x=1$.

49. ¿Puede tener seis raíces un polinomio de grado 4? Razona tu respuesta.

50. Escribe un polinomio de grado 4 con una raíz doble en $x=-1$.

51. Determina el polinomio de grado 3 que verifica:

$$P(-1)=P(2)=P(-3)=0 \qquad P(-2)=18$$

52. Escribe un polinomio de grado 4 con una única raíz doble.

Factorización de polinomios

53. Utiliza las identidades notables para descomponer los siguientes polinomios:

a) x^4-8x^2+16

b) $16x^4-8x^2+1$

c) $16x^4-72x^2+81$

54. Extrae factor común y utiliza las identidades notables para descomponer los siguientes polinomios:

a) x^3-2x^2+x

b) $8x^3+8x^2+2x$

c) $3x^5-54x^3+243x$

d) $162x^5-36x^3+2x$

55. Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $2x^3-x^2-13x-6$

b) $5x^3-x^2-14x-8$

c) $2x^4-x^3-6x^2-x+2$

d) x^3-3x^2+3x-1

56. Calcula el MCD y el mcm de los polinomios:

a) $P(x)=x^2-4,\ Q(x)=x^3+4x^2-7x-10$

b) $S(x)=x^3-x^2-8x+12,\ R(x)=x^3-2x^2-9x+18$

c) $T(x)=x^2-1,\ U(x)=x^2+3x+2,\ V(x)=x^3-2x-3$

57. Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $x^4+5x^3+9x^2+7x+2$

b) $x^3+6x^2+12x+8$

c) $2x^5+9x^4+9x^3-x^2-3x$

d) $x^6+5x^5+7x^4+5x^3+6x^2$

38.

a) $-2a\cdot(a+2)+6a^2\cdot(a+2)^2+8a\cdot(a+2)=2a\cdot(a+2)\cdot(-1+3a^2+6a+4)=2a\cdot(a+2)\cdot(3a^2+6a+3)$

b) $\dfrac{2\cdot(x+1)}{5}-\dfrac{1}{5}x\cdot(x+1)^2=\dfrac{1}{5}(x+1)\cdot(2-x\cdot(x+1))=\dfrac{1}{5}(x+1)\cdot(-x^2-x+2)$

c) $-4\cdot(a-3b)+8a\cdot(a-3b)-3b\cdot(a-3b)=(a-3b)\cdot(-4+8a-3b)$

d) $5x^2\cdot(x^2+1)-5\cdot(x^2+1)=5\cdot(x^2+1)\cdot(x^2-1)$

e) $2b\cdot(a+b)-4a\cdot(a+b)+4\cdot(a+b)=2\cdot(a+b)\cdot(b-2a+2)$

Regla de Ruffini.

39.

a) $C(x)=x^4-x^3+x^2-x+1$
$R(x)=-2$

	1	0	0	0	0	-1
-1		-1	1	-1	1	-1
	1	-1	1	-1	1	-2

b) $C(x)=x+2x^3+2x^2+4x+11$
$R(x)=18$

	1	0	-2	0	3	-4
2		2	4	4	8	22
	1	2	2	4	11	18

c) $C(x)=-2x^4+3x-2$
$R(x)=-4$

	-2	-6	0	3	7	-10
-3		6	0	0	-9	6
	-2	0	0	3	-2	-4

d) $C(x)=3x^3-x^2-2x$
$R(x)=2$

	3	5	-4	-4	2
-2		-6	2	4	0
	3	-1	-2	0	2

e) $C(x)=-x^4+x^3-x^2+x+2$
$R(x)=-2$

	1	0	0	0	3	0
-1		1	-1	1	-1	-2
	1	1	-1	1	2	-2

f) $C(x)=2x^5-2x^4+2x^3-5x^2+9x-9$
$R(x)=9$

	2	0	0	-3	4	0	0
-1		-2	2	-2	5	-9	9
	2	-2	2	-5	9	-9	9

g) $C(x)=6x^6-3x^2-2x$
$R(x)=0$

	6	-18	0	0	-3	7	6	0
3		18	0	0	0	-9	-6	0
	6	0	0	0	-3	-2	0	0

h) $C(x)=-3x^5+6x^3-2x$
$R(x)=0$

	-3	15	6	-30	-2	10	0
5		-15	0	30	0	-10	0
	-3	0	6	0	-2	0	0

40.
Si la división $(2x^5 + 4x^4 – 3x^3 – 4x^2 + x + a) : (x + 2)$ tiene que ser exacta, entonces su resto es 0, y por tanto, (x + 2) tiene que ser factor del polinomio dividendo P(x), por lo tanto, P(-2) = 0. (Teorema del resto)

$P(-2) = 2\cdot(-2)^5 + 4\cdot(-2)^4 – 3\cdot(-2)^3 – 4\cdot(-2)^2 + (-2) + a = 0$
$-64 + 64 + 24 – 16 – 2 + a = 0$
$6 + a = 0$
a = -6

Raíces de un polinomio. Teorema del resto

41.
Aplicando el Teorema del resto podemos asegurar que el resto de dividir un polinomio P(x) entre x – a, es el valor numérico de P(x) cuando x toma el valor a, es decir, P(a).

Por lo tanto:

a) $R(x) = P(1) = 1^5 – 1 = 0$
b) $R(x) = P(2) =2^5 – 2\cdot(2)^3 + 3\cdot2 – 4 = 32 – 16 +6 – 4 = 6$
c) $R(x) = P(-3) =-2\cdot(-3)^5 – 6\cdot(-3)^4 + 3\cdot(-3)^2 + 7\cdot(-3) – 10 = 27 – 21 – 10 = -4$
d) $R(x) = P(-2) =3\cdot(-2)^4 + 5\cdot(-2)^4 – 4\cdot(-2)^2 – 4\cdot(-2) + 2 = 48 – 40 – 16 + 8 + 2 = 2$

42.
a) $R(x) = P(-1) = -(-1)^5 + 3\cdot(-1) = 1 – 3 = -2$
b) $R(x) = P(-1) = 2\cdot (-1)^6 – 3\cdot(-1)^3 + 4\cdot(-1)^2 = 2 + 3 + 4 = 9$
c) $R(x) = P(3) =6\cdot(3)^7 – 18\cdot(3)^6 – 3\cdot(3)^3 + 7\cdot(3)^2 + 6\cdot3 = 0$
d) $R(x) = P(5) =-3\cdot(5)^6 + 15\cdot(5)^5 + 6\cdot(5)^4 –30\cdot(5)^3 – 2\cdot(5)^2 + 10\cdot5 = 0$

43.
Si el resto de la división $P(x) : (x – a)$ es cero, entonces $(x – a)$ es un factor en la factorización de $P(x)$, y por tanto, por el teorema del resto, $P(a) = 0$.

a) $(x^4 + 2x^3 – 3x + a) : (x + 2)$
$P(-2) = (-2)^4 + 2\cdot(-2)^3 – 3\cdot(-2) + a = 0$
$16 – 16 + 6 + a = 0$
a = -6

b) $(2x^5 + ax^4 – 3x^3 – x^2 – x) : (x + 1)$
$P(-1) = 2\cdot(-1)^5 + a\cdot(-1)^4 – 3\cdot(-1)^3 – (-1)^2 – (-1) = 0$
$-2 + a + 3 – 1 + 1 = 0$
a = -1

44.
$(ax^5 – 7x^3 + 5x^2 + 4x – 4) : (x – 2)$
$P(2) = a\cdot2^5 – 7\cdot2^3 + 5\cdot2^2 + 4\cdot2 – 4 = 0$
$32a – 56 + 20 + 8 – 4 = 0$
$32a = 32$
a = 1

45.
Si el resto de la división $(-x^5 + 3x^4 + ax^3 + 9x^2 + 2x – 7) : (x – 3)$ es -1, entonces, por el teorema del resto podemos asegurar que $P(3) = -1$

$P(3) = -3^5 + 3\cdot3^4 + a\cdot3^3 + 9\cdot3^2 + 2\cdot3 – 7 = -1$
$-243 + 243 + 27a + 27 + 6 – 7 = -1$
$27a = -27$
a = -1

46.
$P(x) = -x^4 + ax^3 – 4x^2 + 2x – 4.$
$P(-2) = -(-2)^4 + a\cdot(-2)^3 – 4\cdot(-2)^2 + 2\cdot(-2) – 4 = 0$
$-16 – 8a – 16 – 4 – 4 = 0$
a = 5

47.
a) Las posibles raíces de $P(x) = 2x^3 – x^2 – 13x – 6$ son los divisores del término independiente, es decir, +1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6.

$P(-1) = 2\cdot(-2)^3 – (-2)^2 – 13\cdot(-2) – 6 = 0$
$P(3) = 2\cdot3^3 – 3^2 – 13\cdot3 – 6 = 0$

En este caso, -1 y 3 son dos raíces de $P(x) = 2x^3 – x^2 – 13x – 6$.

b) Las posibles raíces de $P(x) = 5x^3 – x^2 – 14x – 8$ son los divisores del término independiente, es decir, +1, -1, +2, -2, +4, -4, +8, -8.

$P(-1) = 5\cdot(-1)^3 – (-1)^2 – 14\cdot(-1) – 8 = 0$
$P(2) = 5\cdot2^3 – 2^2 – 14\cdot2 – 8 = 0$

En este caso, -1 y 2 son dos raíces de $P(x) = 5x^3 – x^2 – 14x – 8$.

c) Las posibles raíces de $P(x) = 2x^4 – x^3 – 6x^2 – x + 2$ son los divisores del término independiente, es decir, +1, -1, +2, -2.

$P(-1) = 2\cdot(-1)^4 – (-1)^3 – 6\cdot(-1)^2 – (-1) + 2 = 0$
$P(2) = 2\cdot2^4 – 2^3 – 6\cdot2^2 – 2 + 2 = 0$

En este caso, -1 y 2 son dos raíces de $P(x) = 2x^4 – x^3 – 6x^2 – x + 2$.

d) Las posibles raíces de $P(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$ son los divisores del término independiente, es decir, +1, -1, +2, -2, +3 y -3.

$P(-1) = (-1)^4 + 4\cdot(-1)^3 + 4\cdot(-1)^2 + 4\cdot(-1) + 3 = 0$
$P(-3) = (-3)^4 + 4\cdot(-3)^3 + 4\cdot(-3)^2 + 4\cdot(-3) + 3 = 0$

En este caso, -1 y -3 son dos raíces de $P(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$.

48.

Si el polinomio tiene como raíz doble -2, entonces, uno de sus factores es $(x + 2)^2$.
Si 1 es otra de sus raíces, otro de sus factores es $(x – 1)$.

Con estos dos factores ya tenemos el polinomio base que buscamos:

$P(x) = (x – 1) \cdot(x + 2)^2 = x^3 + x^2 + 2x – 4$.

Otro polinomio que cumpla las mismas propiedades sería:

$P(x) = 2\cdot(x – 1)\cdot(x + 2)^2 = 2x^3 + 2x^2 + 4x – 8$.

49.

Por el Teorema Fundamental del Álgebra, el número de raíces de un polinomio contadas con su multiplicidad, es decir, el número de veces que se repiten, coinciden con su grado. Por lo tanto, ningún polinomio de grado 4 puede tener 6 raíces diferentes, a lo sumo tendrá 4.

50.

Si el polinomio tiene una raíz doble en -1, uno de sus factores es $(x + 1)^2$. Las otras dos raíces, puesto que debe ser de grado 4, pueden ser cualquier número entero.

$P(x) = (x – a) \cdot (x – b) \cdot (x + 1)^2$

Por ejemplo: $P(x) = x\cdot(x – 1)\cdot(x + 1)^2 = x^4 + x^3 – x^2 – 4x$.

51.
Si el polinomio es de grado 3 y P(-1) = P(2) = P(-3) = 0, entonces sus raíces son -1, 2 y -3 y por tanto, los tres factores del polinomio son: (x + 1) , (x – 2) y (x +3), y así, el polinomio es de la forma:

$P(x) = a\cdot(x + 1)\cdot(x – 2)\cdot(x + 3) = a(x^3 + 2x^2 – 5x - 6)$

Por otra parte P(-2) = 18, por tanto: $P(-2) = a\cdot(-2 + 1)\cdot(-2 – 2)\cdot(-2 + 3) = 4a = 18$;

$$a = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

El polinomio que buscamos es $P(x) = \frac{9}{2}\cdot(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = \frac{9}{2}x^3 + 9x^2 - \frac{45}{2}x - 18$

52.
Supongamos que -1 es la raíz doble del polinomio, entonces el factor asociado es $(x + 1)^2$.
Y supongamos también que las otras dos raíces son 0 y 2, luego, el polinomio es:
$P(x) = x(x – 2)(x + 1)^2$

Factorización de polinomios.

53.

a) $x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2 - 4)^2$
b) $16x^4 - 8x^2 + 1 = (4x^2 - 1)^2$
c) $16x^4 - 72x^2 + 81 = (4x^2 - 9)^2$

54.

a) $x^3 - 2x^2 + x = x\cdot(x^2 - 2x + 1) = x\cdot(x - 1)^2$
b) $x^3 - 2x^2 + x = x\cdot(x^2 - 2x + 1) = x\cdot(x - 1)^2$
c) $3x^5 - 54x^3 + 243x = 3x\cdot(x^4 - 18x^2 + 81) = 3x\cdot(x^2 - 9)^2$
d) $162x^5 - 36x^3 + 2x = 2x\cdot(81x^4 - 18x^2 + 1) = 3x\cdot(3x^2 - 1)^2$

55.

a) Aplicando Ruffini tenemos que:

	2	-1	-13	-6
-2		-4	10	6
	2	-5	-3	0
3		6	3	
	2	1	0	

$$2x^3 - x^2 - 13x - 6 = (x + 2)\cdot(x - 3)\cdot(2x + 1)$$

b) Aplicando Ruffini obtenemos:

$$5x^3 - x^2 - 14x - 8 = (x+1)\cdot(x-2)\cdot(5x+4)$$

	5	-1	-14	-8
-1		-5	6	8
	5	-6	-8	0
2		10	8	
	5	4	0	

c) Por Ruffini sabemos que:

$$2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = (x+1)^2\cdot(x-2)\cdot(2x-1)$$

	2	-1	-6	-1	2
-1		-2	3	3	-2
	2	-3	-3	2	0
-1		2	5	-2	
	2	-5	2	0	
2		4	-2		
	2	-1	0		

d) Aplicando Ruffini sabemos que:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$$

	1	-3	3	-1
1		1	-2	1
	1	-2	1	0
1		1	-1	
	1	-1	0	
1		1		
	1	0		

56.
El *máximo común divisor* de dos polinomios es el polinomio formado por los factores comunes elevados al menor exponente.

El *mínimo común múltiplo* es el producto de los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

a)

$P(x) = x^2 - 4 = (x+2)\cdot(x-2)$

$Q(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = (x-2)\cdot(x+1)\cdot(x+5)$

$mcd(P(x), Q(x)) = x - 2$

$mcm(P(x), Q(x)) = (x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x+5) = x^4 + 6x^3 + x^2 - 24x - 20$

b)

$S(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x-2)^2\cdot(x+3)$

$R(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = (x-2)\cdot(x+3)^2$

$mcd(S(x), R(x)) = (x-2)\cdot(x+3) = x^2 + x - 6$

$mcm(S(x), R(x)) = (x-2)^2\cdot(x+3)^2 = x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36$

c)

$T(x) = x^2 - 1 = (x-1)\cdot(x+1)$

$U(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)\cdot(x+2)$

$V(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)\cdot(x-3)$

$mcd(T(x), U(x), V(x)) = x+1$

$mcm(T(x), U(x), V(x)) = (x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

57.

a) Como es polinomio de grado cuatro con término independiente, lo único que podemos hacer es aplicar Ruffini:

	1	5	9	7	2
-1		-1	-4	-5	-2
	1	4	5	2	0
-1		-1	-3	-2	
	1	3	2	0	

Resolvemos la ecuación de segundo grado para obtener las dos raíces que quedan:

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = -2$$

Por lo tanto, la factorización del polinomio es: $x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2 = (x+1)^3 \cdot (x+2)$

b) Aplicamos Ruffini sobre el polinomio inicial para obtener la primera raíz:

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)\cdot(x^2 + 4x + 4)$$

Por las igualdades notables conseguimos la raíz doble que nos falta: 2. $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3$

c) Sacamos factor común x y aplicamos Ruffini sobre un polinomio de grado 4:

$$2x^5 + 9x^4 + 9x^4 - x^2 - 3x = x\cdot(2x^4 + 9x^3 + 9x^2 - x - 3) = x\cdot(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x^2 + x - 1)$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado y conseguimos así todas las raíces necesarias:

$$2x^5 + 9x^4 + 9x^3 - x^2 - 3x = x\cdot(2x^4 + 9x^3 + 9x^2 - x - 3) = x\cdot(x+1)^2\cdot(x+3)\cdot(2x-1)$$

Sacamos factor común x2 y aplicamos Ruffini sobre un polinomio de grado 4:

$$x^6 + 5x^5 + 7x^4 + 5x^3 + 6x^2 = x^2 \cdot (x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 5x + 6) = x^2 \cdot (x+2) \cdot (x+3) \cdot (x^2+1)$$

El factor de segundo grado no tiene raíces enteras, luego la factorización del polinomio estaría terminada.

PÁGINA 74

ACTIVIDADES **FINALES**

Fracciones algebraicas

58. Realiza las siguientes sumas y restas formadas por fracciones algebraicas:

a) $\frac{1}{x}-\frac{x}{x+1}$

b) $\frac{2x}{x+2}+\frac{x^2-1}{x^2}$

c) $\frac{x}{2x-1}+\frac{6x}{2x+1}$

d) $\frac{1-x}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}$

e) $\frac{2x-1}{2-x}-\frac{4x+2}{x+2}$

f) $\frac{5x-1}{x^2}-\frac{2x-1}{x}+x$

59. Realiza las siguientes operaciones formadas por fracciones algebraicas:

a) $\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}$

b) $\frac{x-1}{2x}+\frac{3}{2x^2}-\frac{1}{4x^3}$

60. Realiza las siguientes operaciones formadas por fracciones algebraicas:

a) $\frac{x}{x+2}-\frac{1}{x}$

b) $\frac{x+4}{2x-1}-\frac{3x+1}{2x+1}$

c) $\frac{2x}{x-3}-\frac{x-3}{x+3}$

d) $\frac{x+3}{x}+\frac{3x^2-1}{x^2}$

61. Realiza las siguientes operaciones formadas por fracciones algebraicas:

a) $\frac{2}{x^2-1}-\frac{5x}{x+1}$

b) $\frac{3x-1}{2x-1}-\frac{2x^2-5x}{6x-3}$

c) $\frac{1}{2x-3}-\frac{1}{2x+3}$

d) $\frac{x+2}{x-2}+\frac{1}{x^2-4}$

e) $\frac{x+5}{2x+6}+\frac{3x+1}{x+3}$

f) $\frac{3x-2}{x^2-x}+\frac{x}{x-1}$

62. Opera y simplifica si es posible:

a) $\frac{x-1}{x}\cdot\frac{x+1}{x-1}$

b) $\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{x-2}{x^2-x}$

c) $\frac{2x-1}{x^2-3x}:\frac{1}{x^2-6x+9}$

d) $\frac{x-2}{5-3x}:\frac{x+2}{5-3x}$

e) $\frac{3a-b}{b-a}\cdot\frac{a^2-b^2}{6a-2b}$

63. Opera y simplifica:

a) $\left(x-\frac{1}{x}\right):\frac{x-1}{x^2+x}$

b) $\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{3}\right):\frac{x-6}{x^2-4x}$

c) $\frac{x^2}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-4x+3}{x^4-5x^3}$

d) $\left(\frac{x+1}{x^2+x-2}-\frac{x-1}{x^2-x-2}\right):\frac{x}{x^2-4}$

64. Opera y simplifica:

$$\frac{2x^3+6x^2+4x}{x^2-4x+4}\cdot\frac{x^2-5x+6}{x^4+5x^3+7x^4+3x^3}$$

65. Opera y simplifica:

$$\left(\frac{5x}{1-2x}-\frac{3x}{1+2x}\right):\frac{3x-1}{4x^2-4x+1}$$

66. Opera y simplifica:

a) $\frac{x-2}{x^2-4x}-\frac{5x}{x}:\frac{x^2-4}{3x+1}$

b) $\frac{x+3}{x-2}-\frac{x+1}{x^2-4}+\frac{2x+1}{x+2}$

c) $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+3}{x+2}-\frac{2x}{x^2-4x+4}$

67. Opera y simplifica:

$$\frac{\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x+1}}{\frac{x}{x-1}}$$

Fracciones algebraicas.

58.

a) $\frac{1}{x}-\frac{x}{x+1}=\frac{x+1}{x\cdot(x+1)}-\frac{x^2}{x\cdot(x+1)}=\frac{-x^2+x+1}{x\cdot(x+1)}$

b) $\frac{2x}{x+2}-\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{2x^3}{x^2\cdot(x+2)}-\frac{(x^2-1)\cdot(x+2)}{x^2\cdot(x+2)}=\frac{2x^3}{x^2\cdot(x+2)}-\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2\cdot(x+2)}=\frac{x^3-2x^2+x+2}{x^2\cdot(x+2)}$

c) $\frac{x}{2x-1}-\frac{6x}{2x+1}=\frac{x\cdot(2x+1)-6x\cdot(2x-1)}{(2x-1)\cdot(2x+1)}=\frac{14x^2-5x}{4x^2-1}$

d) $\frac{1-x}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}=\frac{-(x-1)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}-\frac{(x+1)^2}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{-(x^2-2x+1)}{x^2-1}-\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}=\frac{-2x^2-2}{x\cdot(x+1)}$

e) $\frac{2x-1}{2-x}-\frac{4x+2}{x+2}=\frac{(2x-1)\cdot(2+x)}{4-x^2}-\frac{(4x+2)\cdot(2-x)}{4-x^2}=\frac{6x^2-3x-6}{4-x^2}$

f) $\frac{5x-1}{x^3}-\frac{2x-1}{x}+x=\frac{5x-1}{x^3}-\frac{2x^3-x^2}{x^3}+\frac{x^4}{x^3}=\frac{x^4-2x^3+x^2+5x-1}{x^3}$

59.

a) $\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}=\frac{2x^2}{x^3}+\frac{3x}{x^3}-\frac{4}{x^3}=\frac{2x^2+3x-4}{x^3}$

b) $\frac{x-1}{2x}+\frac{3}{2x^2}-\frac{1}{4x^3}=\frac{2x^3-2x^2}{4x^3}+\frac{6x}{4x^3}-\frac{1}{4x^3}=\frac{2x^3-2x^2+6x-1}{4x^3}$

60.

a) $\frac{x}{x+2}-\frac{1}{x}=\frac{x^2}{x^2+2x}-\frac{x+2}{x^2+2x}=\frac{x^2-x-2}{x^2+2x}$

b) $\frac{x+4}{2x-1}-\frac{3x+1}{2x+1}=\frac{(x+4)\cdot(2x-1)}{(2x-1)\cdot(2x+1)}-\frac{(2x-1)\cdot(3x+1)}{(2x-1)\cdot(2x+1)}=\frac{2x^2+7x-4-(6x^2-x-1)}{(2x-1)\cdot(2x+1)}=\frac{-4x^2+8x-3}{4x^2-1}$

c) $\frac{2x}{x-3}-\frac{x-3}{x+3}=\frac{2x\cdot(x+3)}{x^2-9}-\frac{(x-3)^2}{x^2-9}=\frac{x^2+12x-9}{x^2-9}$

d) $\frac{x+3}{x}+\frac{3x^2-1}{x^2}=\frac{x\cdot(x+3)}{x^2}+\frac{3x^2-1}{x^2}=\frac{4x^2+3x-1}{x^2}$

61.

a) $\frac{2}{x^2-1}-\frac{5x}{x+1}=\frac{2}{(x-1)\cdot(x+1)}-\frac{5x\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{-5x^2+5x+2}{x^2-1}$

b) $\frac{3x-1}{2x-1}-\frac{2x^2-5x}{6x-3}=\frac{3\cdot(3x-1)}{3\cdot(2x-1)}-\frac{2x^2-5x}{3\cdot(2x-1)}=\frac{-2x^2+14x-3}{6x-3}$

c) $\frac{1}{2x-3}-\frac{1}{2x+3}=\frac{2x+3}{(2x-3)\cdot(2x+3)}-\frac{2x-3}{(2x-3)\cdot(2x+3)}=\frac{6}{4x^2-9}$

d) $\frac{x+2}{x-2}+\frac{1}{x^2-4}=\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{(x^2-4)}+\frac{1}{(x^2-4)}=\frac{x^2-3}{x^2-4}$

e) $\frac{x+5}{2x+6}+\frac{3x+1}{x+3}=\frac{x+5}{2x+6}+\frac{2\cdot(3x+1)}{2x+6}=\frac{7x+7}{2x+6}$

f) $\frac{3x-2}{x^2-x}+\frac{x}{x-1}=\frac{3x-2}{x^2-x}+\frac{x^2}{x^2-x}=\frac{x^2+3x-2}{x^2-x}$

62.

a) $\frac{x-1}{x}\cdot\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x-1)^2+x\cdot(x+1)}{x\cdot(x-1)}=\frac{2x^2-x+1}{x^2-x}$

b) $\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{x-2}{x^2-x}=\frac{(x-1)\cdot(x-2)}{x^2\cdot(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{x-2}{x^2\cdot(x+1)}$

c) $\frac{2x-1}{x^2-3x}:\frac{1}{x^2-6x+9}=\frac{(2x-1)\cdot(x-3)^2}{x\cdot(x-3)}=\frac{2x^2-7x+3}{x}$

d) $\frac{x-2}{5-3x}:\frac{x+2}{5-3x}=\frac{x-2}{x+2}$

e) $\frac{3a-b}{b-a}\cdot\frac{a^2-b^2}{6a-2b}=\frac{(3a-b)\cdot(a+b)\cdot(a-b)}{-(a-b)\cdot 2\cdot(3a-b)}=-\frac{a+b}{2}$

63.

a) $\left(x-\frac{1}{x}\right):\frac{x-1}{x^2+x}=\frac{x^2-1}{x}:\frac{x-1}{x^2+x}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)^2\cdot x}{x\cdot(x-1)}=(x+1)^2$

b) $\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{3}\right):\frac{x-6}{x^2-4x}=\frac{6-x^2}{3x}:\frac{x-6}{x^2-4x}=\frac{(6-x^2)\cdot(x-4)\cdot x}{3x\cdot(x-6)}=\frac{(6-x^2)\cdot(x-4)}{3(x-6)}$

c) $\frac{x^3}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-4x+3}{x^4-5x^3}=\frac{x^3\cdot(x-1)\cdot(x-3)}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot x^3\cdot(x-5)}=\frac{(x-3)}{(x+1)\cdot(x-5)}$

d) $\left(\frac{x+1}{x^2+x-2}-\frac{x-1}{x^2-x-2}\right):\frac{x}{x^2-4}=\frac{(x+1)\cdot(x^2-x-2)-(x-1)\cdot(x^2+x-2)}{(x^2+x-2)\cdot(x^2-x-2)}:\frac{x}{x^2-4}=$

$=\frac{-4}{(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+1)}:\frac{x}{(x+2)\cdot(x-2)}=\frac{-4\cdot(x+2)\cdot(x-2)}{x\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+1)}=\frac{-4}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}$

64.

$$\frac{2x^3+6x^2+4x}{x^2-4x+4}\cdot\frac{x^2-5x+6}{x^6+5x^5+7x^4+3x^3}=\frac{2x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}{(x-2)^2\cdot x^3\cdot(x+1)^2\cdot(x+3)}=\frac{2(x+2)\cdot(x-3)}{x^2\cdot(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x+3)}$$

65.

$$\left(\frac{5x}{1-2x}-\frac{3x}{1+2x}\right):\frac{3x-1}{4x^2-4x+1}=\frac{5x\cdot(1+2x)-3x\cdot(1-2x)}{(1-2x)\cdot(1+2x)}:\frac{3x-1}{(1-2x)^2}=\frac{2x\cdot(8x+1)\cdot(1-2x)^2}{(1-2x)\cdot(1+2x)\cdot(3x-1)}=\frac{2x\cdot(8x+1)\cdot(1-2x)}{(1+2x)\cdot(3x-1)}$$

66.

a) $\frac{x-2}{x^3-4x}-\frac{5x}{x+2}:\frac{x^2-4}{3x+1}=\frac{x-2}{x^3-4x}-\frac{5x\cdot(3x+1)}{(x+2)^2\cdot(x-2)}=\frac{(x+2)\cdot(x-2)}{x\cdot(x+2)^2\cdot(x-2)}-\frac{5x^2\cdot(3x+1)}{x\cdot(x+2)^2\cdot(x-2)}=\frac{-15x^3-4x^2-4}{x^4+2x^3-4x^2-8x}$

b) $\frac{x+3}{x-2}-\frac{x+1}{x^2-4}+\frac{2x+1}{x+2}=\frac{(x+3)\cdot(x+2)-(x+1)+(2x+1)\cdot(x-2)}{x^2-4}=\frac{3x^2+3x+3}{x^2-4}$

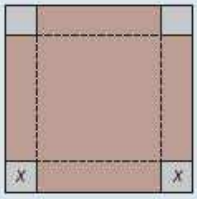
c) $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+3}{x+2}-\frac{2x}{x^2-4x+4}=\frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)}{(x+2)\cdot(x-2)^2}+\frac{(x+3)\cdot(x-2)^2}{(x+2)\cdot(x-2)^2}-\frac{2x\cdot(x+2)}{(x+2)\cdot(x-2)^2}=\frac{2x^3-4x^2-18x+10}{x^3-2x^2-4x+8}$

67.

$$\frac{\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x+1}}{\frac{x}{x-1}}=\frac{\frac{x\cdot(x+1)+x-1}{(x-1)\cdot(x+1)}}{\frac{x}{x-1}}=\frac{(x-1)\cdot(x^2+2x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot x}=\frac{x^2+2x-1}{x^2+x}$$

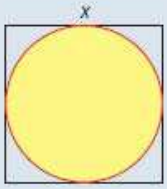
→ PROBLEMAS

□ **68.** Con un cartón cuadrado de 50 cm de lado se pretende construir una caja, de altura x, recortando las esquinas y doblando como se muestra en la figura.



Expresa mediante lenguaje algebraico el área de la caja y su volumen.

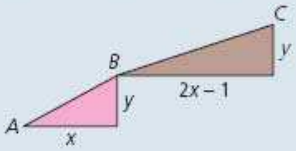
□ **69.** Determina en función de x la longitud de la circunferencia y el área del círculo inscrito en un cuadrado de lado x.



□ **70.** Expresa en lenguaje algebraico el siguiente enunciado:

«La edad de mi hija es la mitad de la que yo tenía hace 7 años, y mi hija tendrá 23 dentro de 6 años.»

◪ **71.** Expresa algebraicamente la suma de las áreas de los triángulos que se muestran en la siguiente figura:



◪ **72.** Lucía ha hecho los ejercicios de Matemáticas, pero cuando va a corregirlos en clase se encuentra un borrón de tinta en la solución de uno de los problemas y no lo puede leer.

—El polinomio que había escrito —dice Lucía— cumplía las siguientes condiciones:

a) Es divisible entre $x - 2$.

b) -1 es una raíz.

c) El resto de dividir el polinomio entre $x + 5$ es -3.

¿Podrías ayudar a Lucía a construir un polinomio con estas condiciones? ¿Cuántos polinomios hay que verifiquen estas condiciones?

AUTOEVALUACIÓN

1. Simplifica los siguientes polinomios:

a) $2x^3 - 3x^2 + x - 2x^2 - 3x^3 + 2x - 3$

b) $2x - 3x^4 + 2x^3 - 3x + x^4 - 2x^3 - (x^2 + 3x)$

2. Dado el polinomios $P(x) = -x^3 + 3x^2 - x + 2$, calcula:

a) $P(-2)$ b) $P(1)$ c) $P(-1)$

3. Opera:

a) $x(2x - 3) - (x + 1)(x - 3)$

b) $1 - 2x(3 - x^2) - x + 3(2x - x^3)$

4. Utiliza las identidades notables para factorizar el polinomio:

$$x^4 - 2x^2 + 1$$

5. Opera y simplifica:

a) $\dfrac{4x}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}$

b) $\dfrac{x+2}{x-2} + \dfrac{3x}{x+2}$

6. Dados los siguientes polinomios:

$P(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 3x + 2$ $R(x) = -x^4 + 3x^3$

$Q(x) = 3x^3 + 2$ $S(x) = 3x^2 + 2$

Calcula:

a) $P(x) - Q(x) - 2R(x)$

b) $R(x) - [P(x) - Q(x)]$

c) $P(x) \cdot S(x) - Q(x) \cdot R(x)$

7. Realiza la siguiente división de polinomios:

$(12x^6 - 17x^5 + 18x^4 + 6x^3 - 19x^2 + 26x - 6) : (3x^2 - 2x + 3)$

8. Utiliza la regla de Ruffini para realizar la siguiente división:

$$(2x^5 - 3x^2 + x) : (x + 1)$$

9. Descompón en factores el siguiente polinomio:

$$2x^5 + 7x^4 - 3x^3 - 17x^2 + 5x + 6$$

10. Determina un polinomio de grado 3 que tenga una raíz doble en $x = 1$, una raíz simple en $x = -2$ y cuyo resto de la división entre $x + 3$ sea 9. →

68.
El área de un cuadrado es $A = l^2$ Si el lado del cuadrado grande mide 50cm, entonces su área será: $A_1 = 50^2 = 2500cm^2$

Cada uno de los cuadrados de las esquinas tienen un área de $A_2 = x^2$, por lo tanto, el área de nuestra caja es $A = A_1 - 4A_2 = 2500 - 4x^2$ cm^2

El volumen de un paralelepípedo de base cuadrada es $V = h \cdot l^2$, en nuestro caso:
$V = x \cdot (2500 - 4x^2) = 2500x - 4x^3$ cm^3

69.
La longitud de la circunferencia es $L = 2\pi r$. En nuestro caso el radio de la circunferencia es la mitad del lado del cuadrado, por tanto, su longitud es $L = 2\pi r = \pi x$ unidades.

En el caso del área, la definimos como $A = \pi r^2 = \pi \frac{x^2}{4}$ u^2.

70.
Definamos x como la edad de mi hija e y, mi edad, entonces:
''La edad de mi hija es la mitad de la que yo tenía hace siete años…'' $x = \frac{y-7}{2}$
''… y mi hija tendrá 23 dentro de 6 años.'' $x + 6 = 23$

71.
El área del triángulo rosa es: $A_{t_1} = \frac{bh}{2} = \frac{xy}{2}$ u^2

El área del triángulo morado es: $A_{t_2} = \frac{bh}{2} = \frac{(2x-1)\cdot y}{2} = \frac{2xy - y}{2} = xy - \frac{y}{2}$ u^2

Así, el área total es $A_{t_1} + A_{t_2} = \frac{xy}{2} + xy - \frac{y}{2} = \frac{3xy - y}{2}$ u^2

72.
a) La primera condición nos dice que el polinomio es divisible entre x – 2, por lo tanto, podemos escribir nuestro polinomio de la forma: $P(x) = Q(x)\cdot(x - 2)$
b) Con la segunda propiedad nos aseguramos que otro de los factores es (x + 1), es decir, nuestro polinomio quedaría: $P(x) = R(x)\cdot(x - 2)\cdot(x + 1)$
c) La tercera condición nos conduce a aplicar el teorema del resto: $P(-5) = -3$

Así: $P(-5) = R(x)\cdot(-5 - 2)\cdot(-5 + 1) = 28\cdot R(x) = -3$; $R(x) = -\frac{3}{28}$

Y uno de los polinomios que cumpliría las tres condiciones sería: $P(x) = -\frac{3}{28}(x^2 - x - 2)$

Puesto que no nos están diciendo cuál sería el grado del polinomio no podemos asegurar que exista una solución única.