Unidad 6 – Estudio gráfico de funciones

PÁGINA 96

¿QUÉ NECESITAS SABER?

Representar puntos en un eje de coordenadas

Representa los siguientes puntos en un eje de coordenadas:

a) (2, –3) c) (0, 3) e) (0, –3) g) (–2, –7)

b) (–2, 1) d) (–1, 0) f) (–1, –3) h) (0, 0)

Evaluar un polinomio

Dado el polinomio $P(x) = -x^3 + 2x^2 - x - 1$, calcula:

a) $P(-1)$ b) $P(0)$ c) $P(-2)$ d) $P(1)$ e) $P(2)$

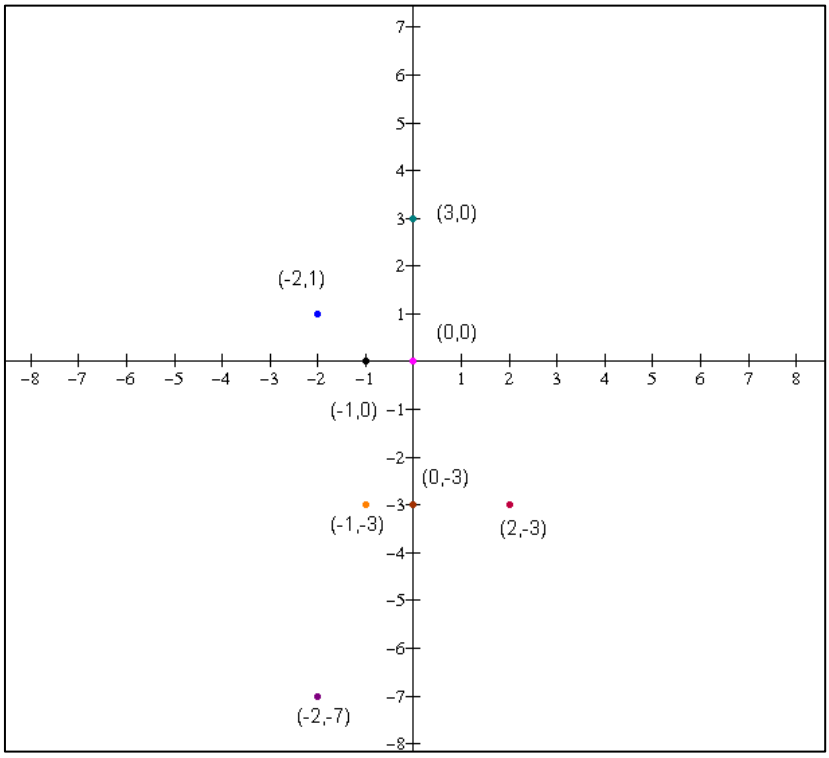
Escribir intervalos

Escribe los siguientes intervalos:

a) $-2 < x < -3$ b) $x > -1$ c) $x \leq 3$

SOLUCIONES

Representar puntos en un eje de coordenadas.



Evaluar un polinomio.

a) $P(-1) = 1 + 2 + 1 - 1 = 3$
b) $P(0) = -1$
c) $P(-2) = 8 + 8 + 2 - 1 = 17$
d) $P(1) = -1 + 2 - 1 - 1 = -1$
e) $P(2) = -8 + 8 - 2 - 1 = -3$

Escribir intervalos.

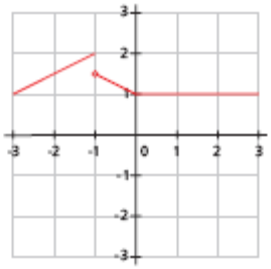
a) $(-\infty, -3) \cup (-2, \infty)$ b) $(-1, \infty)$ c) $(-\infty, 3]$

PÁGINA 98

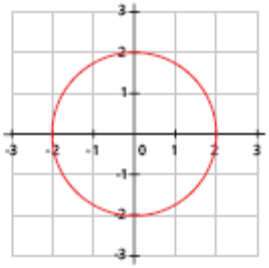
ACTIVIDADES

1. Dadas las siguientes gráficas, determina si corresponden a la gráfica de una función o no. Razona tu respuesta:

a)



b)



2. ¿La siguiente tabla puede representar una función? Razona tu respuesta.

x	–3	–2	–1	0	2	2
y	–16	12	12	–4	5	8

SOLUCIONES

1.a) Sí corresponden a una función, definida a trozos.

b) No corresponde a la gráfica de una función porque existen valores de la variable independiente "x" que tienen asignados dos valores de la dependiente "y"

2. No puede porque para el valor de la variable independiente 2 hay varios valores de la dependiente.

PÁGINA 99

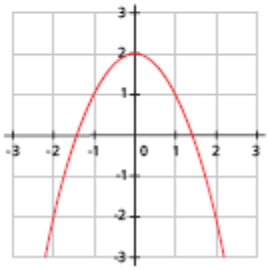
ACTIVIDADES

3. Determina los puntos de corte con los ejes y elabora una tabla con siete valores para las siguientes funciones:

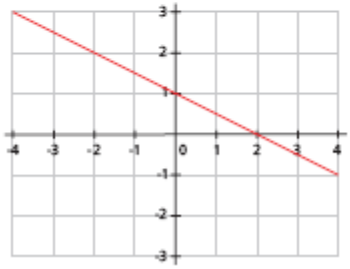
a) $f(x) = -2x + 3$ b) $g(x) = x^2 - 2x + 1$ c) $h(x) = x^2 - 2x$

4. Elabora una tabla para cada una de las siguientes gráficas:

a)



b)



SOLUCIONES

3. a) $f(x) = -2x + 3$

x	y
0	3
$\frac{3}{2}$	0
1	1
-1	5
2	-1
-2	7
3	-3

b) $g(x) = x^2 - 2x + 1$

x	y
0	1
1	0
-3	16
-1	5
2	1
-2	9
3	4

c) $h(x) = x^2 - 2x$

x	y
0	0
0, 2	0
1	-1
-1	3
2	0
-2	8
3	3

Puntos de corte OX:

$0 = -2x + 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ $\quad 0 - (x-1)^2 \rightarrow x - 1$ $\quad 0 = x(x-2) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ $\quad (1,0)$ $\quad (0,0)$ $(2,0)$

Puntos de corte OY

$f(0) - 3$ $\quad g(0) - 1$ $\quad h(0) = 0$

OY: $(0,3)$ $\quad$ OY: $(0,1)$ $\quad$ OY: $(0,0)$

4. a) La gráfica representa una parábola con ecuación $y = -x^2 + 2$

x	y
0	2
-2	-2
2	2

b) Es una recta cuya ecuación es $y = -\frac{1}{2}x + 1$

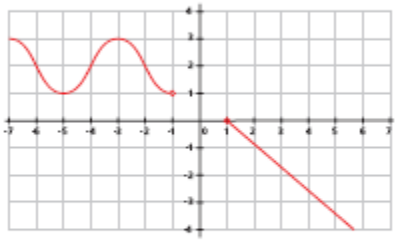
x	y
0	1
-2	0
1	1/2

PÁGINA 100

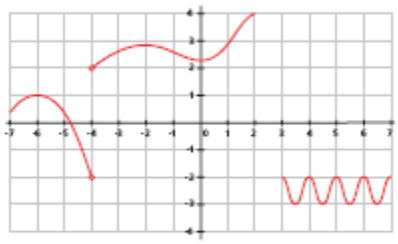
ACTIVIDADES

5. Determina el dominio y la imagen de las siguientes funciones:

a)



b)



6. Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ b) $g(x) = \dfrac{2x}{x-3}$ c) $h(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x-8}$

SOLUCIONES

5. a) $Dom(f) = [-7,-1) \cup (1,6]$ $Im(f) = [-4,-1) \cup [1,3]$

b) $Dom(f) = [-7,-4) \cup (-4,2] \cup [3,7]$ $Im(f) = [-3,1] \cup (2,4]$

6. a) Dado que "0" es el único valor de x que anula el denominador, el dominio es:

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

b) En este caso el denominador se anula para 3, luego el dominio es:

$Dom(g) = \mathbb{R} - \{3\}$

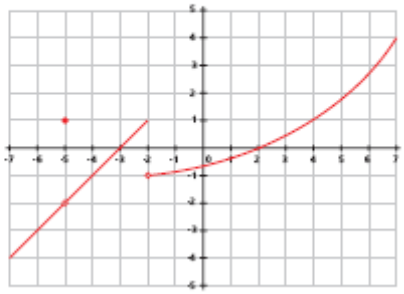
c) $x^2 - 2x - 8 = (x-4)\cdot(x-2) \Rightarrow$ El denominador se anula para 2 valores, luego el dominio es: $Dom(h) = \mathbb{R} - \{4,2\}$

PÁGINA 101

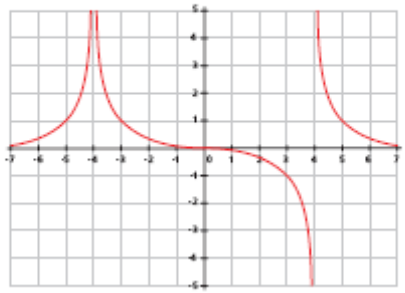
ACTIVIDADES

7. Clasifica los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

a)



b)



SOLUCIONES

7. a) Hay dos valores para analizar, $x = -5$ y $x = -2$. En el primer caso es claramente una discontinuidad evitable, pues con tan sólo cambiar la imagen de $x - -5$ para que sea $y = -2$ la función sería continua. En el caso de $x = -2$ es una discontinuidad de salto finito .

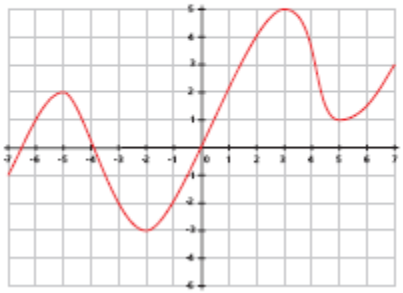
b) En $x = -4$ y de $x = 4$la función parece no estar definida por lo que en ambos casos hay una discontinuidad de salto infinito.

PÁGINA 102

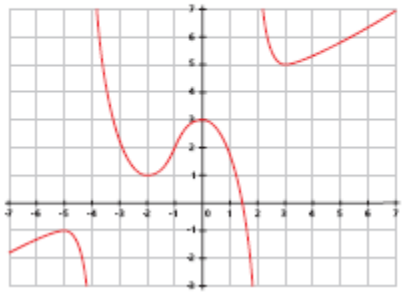
ACTIVIDADES

8. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de las siguientes funciones:

a)



b)



SOLUCIONES

8. a) La función es creciente en $(-\infty, -5) \cup (-2,3) \cup (5, \infty)$

Máximos relativos: $(-5,2), (3,5)$

La función es decreciente en $(-5, -2) \cup (3,5)$

Mínimos relativos: $(-2, -3), (5,1)$

b) La función es creciente en $(-\infty, -5) \cup (-2,0) \cup (2,3)$

Máximos relativos: $(-5, -1), (0,3)$

La función es decreciente en $(-5, -2) \cup (0,3)$

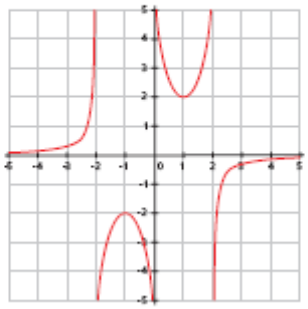
Mínimos relativos: $(-2,1), (3,5)$

PÁGINA 103

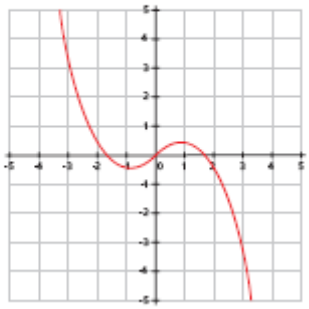
ACTIVIDADES

9. Determina los intervalos de concavidad y convexidad de estas funciones:

a)



b)



SOLUCIONES

9. Para analizar la concavidad o convexidad sígase el criterio expuesto en la página 103 del libro de texto.

a) La función es convexa en: $(-\infty,-2)\cup(0,2)$

La función es cóncava en: $(-2,0)\cup(-2,\infty)$

b) La función es convexa en: $(-\infty,0)$

La función es cóncava en: $(0,\infty)$

PÁGINA 104

ACTIVIDADES

10. Determina si las siguientes funciones son pares o impares:

a) $f(x) = x - 3$ c) $h(x) = \frac{1}{x}$ e) $j(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$

b) $g(x) = -x^3 + 3x$ d) $i(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$ f) $k(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

SOLUCIONES

10. a) $f(x) = x - 3 \Rightarrow f(-x) = -x - 3 \Rightarrow$ La función no tiene simetría par ni impar respecto al origen. Tiene simetría impar respecto al punto $(0, -3)$, que puede comprobarse haciendo el cambio de variable $x \to x = t + 3$

b) $g(x) = -x^3 + 3x \Rightarrow g(-x) = +x^3 - 3x = -g(x) \Rightarrow$ La función tiene simetría impar respecto al origen

c) $h(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow h(-x) = -\frac{1}{x} = -h(x) \Rightarrow$ La función tiene simetría impar respecto al origen

d) $i(x) = \frac{2x}{x^2-4} \Rightarrow i(-x) = -\frac{2x}{x^2-4} = -i(x) \Rightarrow$ La función tiene simetría impar respecto al origen

e) $j(x) = \frac{2}{x^2-4} \Rightarrow j(-x) = \frac{2}{x^2-4} = j(x) \Rightarrow$ La función tiene simetría par respecto al origen

f) $k(x) = \frac{x^2+1}{x} \Rightarrow k(-x) = -\frac{x^2+1}{x} = -k(x) \Rightarrow$ La función tiene simetría impar respecto al origen

PÁGINA 105

ACTIVIDADES

11. Estudia la tendencia de la función $f(x) = \dfrac{2}{3x-1}$ cuando $x \to \dfrac{1}{3}^-$ y $x \to \dfrac{1}{3}^+$.

12. Estudia la tendencia de las siguientes funciones cuando $x \to \pm\infty$:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ b) $g(x) = \dfrac{2}{x+3}$ c) $h(x) = \dfrac{-3}{x-5}$

SOLUCIONES

11.

En el caso de $\frac{1}{3}^-$ aproximaremos con valores cercanos a $\frac{1}{3}$ por la izquierda, es decir, menores:

- $f(0'33) = -200$
- $f(0'333) = -2000$
- $f(0'33333) = -200000$
- …

La tendencia es hacia infinito negativo:

$$f(x) \xrightarrow[x \to \frac{1}{3}^-]{} -\infty$$

En el caso de $\frac{1}{3}$ por la derecha, aproximaremos con valores mayores:

- $f(0'34) = 100$
- $f(0'334) = 1000$
- $f(0'333334) = 1000000$
- …

La tendencia es hacia infinito positivo:

$$f(x) \xrightarrow[x \to \frac{1}{3}^+]{} +\infty$$

12. Para comprobar las tendencias se tomarán los valores $\pm 10^{10}$:

a) $f(10^{10}) = 10^{-10}$ luego $f \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

$f(-10^{10}) = -10^{-10}$ luego $f \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

b) $g(10^{10}) = \frac{2}{10^{10}+3} \approx \frac{2}{10^{10}} = 2 \cdot 10^{-10}$ luego $g \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

$g(-10^{10}) = \frac{2}{-10^{10}+3} \approx -2 \cdot 10^{-10}$ luego $g \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

c) $h(10^{10}) = \frac{-3}{10^{10}-5} \approx \frac{-3}{10^{10}} = -3 \cdot 10^{-10}$ luego $h \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

$h(-10^{10}) = \frac{-3}{-10^{10}-5} \approx \frac{-3}{-10^{10}} = 3 \cdot 10^{-10}$ luego $h \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

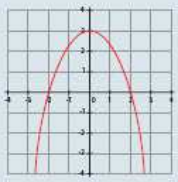
PÁGINA 108

→ EJERCICIOS

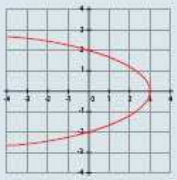
Concepto de función

☐ **13.** Determina si las siguientes gráficas se corresponden con una función. Razona tu respuesta:

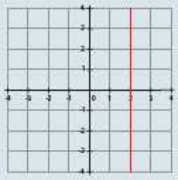
a)



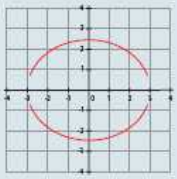
c)



b)



d)



☐ **14.** Calcula la imagen de los valores –2, –1, 0 y 3 de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -x^2 + 3x - 1$

b) $g(x) = \dfrac{x}{2x-1}$

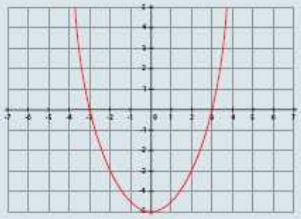
c) $h(x) = \sqrt{x+3}$

d) $i(x) = \dfrac{6}{1+\sqrt{x+1}}$

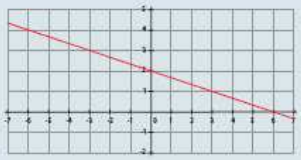
Gráfica de una función

☐ **15.** Realiza una tabla con, al menos, cinco puntos de las siguientes gráficas:

a)



b)



☐ **16.** Realiza una tabla de valores para las siguientes funciones:

a) $f(x) = -2x + 1$

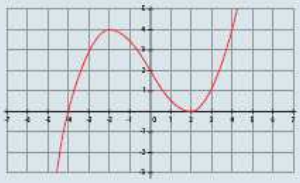
b) $g(x) = x^2 - x - 6$

c) $h(x) = x^3 - 2$

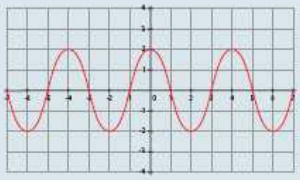
d) $i(x) = \dfrac{-2}{3x+1}$

☐ **17.** Realiza una tabla con, al menos, cinco puntos de las siguientes gráficas:

a)



b)



☐ **18.** Determina los puntos de corte con los ejes de los dos ejercicios anteriores.

☐ **19.** Determina los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -3x + 2$

b) $g(x) = x^2 - 5x - 6$

c) $h(x) = \dfrac{2}{x+3}$

d) $i(x) = \dfrac{2x-1}{x+5}$

Dominio e imagen de una función

☐ **20.** Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x - 4$

b) $g(x) = 2x^2 - 3x$

c) $h(x) = -x^3 + 5x - 3$

d) $i(x) = 3$

◪ **21.** Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

b) $g(x) = \dfrac{-x}{2x-3}$

c) $h(x) = \dfrac{x-5}{x^2-5x+6}$

d) $i(x) = \dfrac{3-x}{2x^2-3x}$

◪ **22.** Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{2x-3}$

b) $g(x) = \sqrt{x^2+5x}$

c) $h(x) = \sqrt{x^2-9}$

d) $i(x) = 3x - \sqrt{x+1}$

Concepto de función.

13. a) Es función, pues se conserva la relación unívoca: un solo valor de la variable dependiente para cada valor de la variable independiente.

b), c), d) No son funciones pues existen valores de la variable independiente que tienen varios valores de la dependiente.

14.

a) $f(-2) = -11 \quad f(-1) = -5 \quad f(0) = -1 \quad f(3) = -1$

b) $g(-2) = \frac{2}{5} \quad g(-1) = \frac{1}{3} \quad g(0) = 0 \quad g(3) = \frac{3}{5}$

c) $h(-2) = 1 \quad h(-1) = \sqrt{2} \quad h(0) = \sqrt{3} \quad h(3) = \sqrt{6}$

d) $-2 \notin Dom(i) \Rightarrow i(-2) = \nexists \quad i(-1) = 6 \quad i(0) = 3 \quad i(3) = 2$

Gráfica de una función.

15.

a)

x	y
0	-5
2	-3
-2	-3
-3	0
3	0

b)

x	y
0	2
3	1
6	0
-3	3
-6	4

16.

a) $f(x) = -2x + 1$

x	y
0	1
1	-1
-1	3
2	-3

b) $g(x) = x^2 - x - 6$

x	y
0	-6
1	-6
2	-4
-2	0

c) $h(x) = x^3 - 2$

x	Y
0	-2
1	-1
-1	-3
2	6

d) $i(x) = -\frac{2}{3x+1}$

x	y
0	-2
-1	1
1/3	-1
1	-1/2

17.

a)

x	y
4	0
0	2
-2	4
2	0
3	1

b)

x	y
0	2
3	0
-5	0
4	2
2	-2

18.

16a)

Eje OX: $0 = -2x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Eje OY: $f(0) = 1 \Rightarrow (0,1)$

16b)

Eje OX: $0 = x^2 - x - 6 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow (-2,0), (3,0)$

Eje OY: $g(0) = -6 \Rightarrow (0, -6)$

16c)

Eje OX: $0 = x^3 - 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} \Rightarrow \left(\sqrt[3]{2}, 0\right)$

Eje OY: $h(0) = -2 \Rightarrow (0, -2)$

16d)

Eje OX: $0 = -\frac{2}{3x+1}$ sólo corta el eje OX en el infinito

Eje OY: $i(0) - -2 \rightarrow (0, -2)$

17a)

Eje OX: $(4,0), (2,0)$

Eje OY: $(0,2)$

17b)

Eje OX: la naturaleza periódica de la gráfica hace que corte el eje OX infinitas veces:

$(1+2k,0)\ \forall k \in \mathbb{Z}$

Eje OY: $(0,2)$

19.

a) Eje OX: $0 = 3x - 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \Rightarrow \left(\frac{4}{3},0\right)$

Eje OY: $f(0) = -4 \Rightarrow (0,-4)$

b) Eje OX: $0 = x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x-6) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 6 \end{cases} \Rightarrow (-1,0)\ (6,0)$

Eje OY: $g(0) = -6 \Rightarrow (0,-6)$

c) Eje OX: $0 = \frac{2}{x+3} \Rightarrow$ Salvo para $x = \pm\infty$ no se corta el eje OX

Eje OY: $h(0) = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(0,\frac{2}{3}\right)$

d) Eje OX: $0 = \frac{2x-1}{x+5} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2},0\right)$

Eje OY: $i(0) = -\frac{1}{5} \Rightarrow \left(0,-\frac{1}{5}\right)$

Dominio e imagen de una función.

20. En todos los casos las funciones son polinómicas, luego su dominio de definición es el conjunto de los números reales:

$Dom(f) = Dom(g) = Dom(h) = Dom(i) = \mathbb{R}$

21.

a) Esta función presenta únicamente un problema para $x = -1$, pues el denominador se hace 0. Por tanto, su dominio es:

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

b) Comprobamos, igualmente, los posibles valores para los que el denominador se anula:

$2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow Dom(g) = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

c) Igualmente buscamos los valores que anulen el denominador:

$0 = x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2) \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow Dom(h) = \mathbb{R} - \{2,3\}$

d) Buscamos los valores que anulen el denominador

$$0 = 2x^2 - 3x = x(2x - 3) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \ Dom(i) = \mathbb{R} - \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$$

22. En este caso los valores problemáticos serán aquellos que fuercen radicandos menores que cero, luego habrá que resolver una inecuación $\text{radicando} \geq 0$ para encontrar el dominio de definición.

a) $2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2} \ \Rightarrow \ Dom(f) = \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$

b) $x^2 + 5x \ \geq 0$ En este caso el intervalo requiere analizar el comportamiento de la función $\mu(x) = x^2 + 5x$

En primer lugar buscaremos los puntos con el eje de abscisas:

$$0 = x^2 + 5x = x(x + 5) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases} \Rightarrow (0,0), (-5,0)$$

Por último comprobaremos evaluando en cuales de los tres posibles intervalos $(-\infty, -5)$, $(-5,0)$, $(0, \infty)$ la función está por encima del eje OX, es decir, es mayor que 0:

$\mu(-6) = \ 6 > 0 \quad \mu(-3) = \ -6 < 0 \quad \mu(3) \ = 24 > 0$

Por tanto, $Dom(g) = (-\infty, -5] \cup [0, \infty)$

Nota: -5 y 0 están incluidos porque la función vale 0 en ambos casos.

c) Nos encontramos ante la misma situación del apartado b). Tenemos una ecuación cuadrática en el radicando, luego procedemos de la misma manera:

$$0 = x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

El análisis de los tres posibles intervalos revela que el radicando es mayor que cero en el caso de $(\ \infty, \ \ 3)$ y $(3, \infty)$ luego el dominio de definición es:

$Dom\ (h) = (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

d) En este caso tendremos que analizar igualmente el radicando, pues el otro sumando es un polinomio y no presenta ningún problema.

$x + 1 \ \geq 0 \Leftrightarrow x \ \geq -1$

Así pues el dominio de definición es:

$Dom(i) = [-1, \infty)$

PÁGINA 109

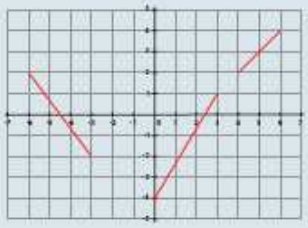
■ **23.** Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+5}}$ c) $h(x) = \sqrt{x^3 - 3x}$

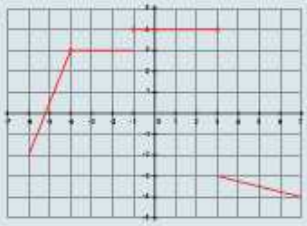
b) $g(x) = \sqrt{6x^4 + x^2 - 1}$ d) $i(x) = \dfrac{1}{x - 5\sqrt{x} + 6}$

□ **24.** Indica el conjunto dominio y el conjunto imagen de las siguientes funciones:

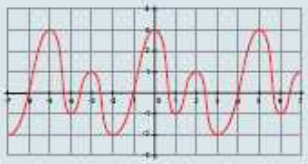
a)



b)



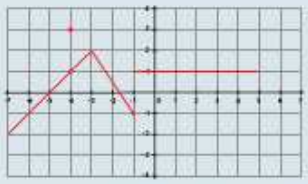
c)



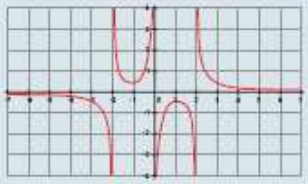
Continuidad

□ **25.** Determina los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

a)



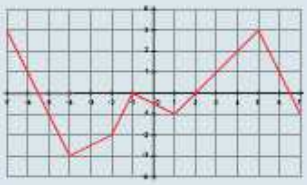
b)



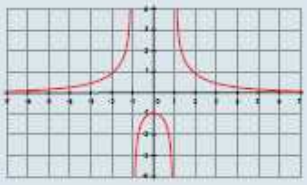
Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos

□ **26.** Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

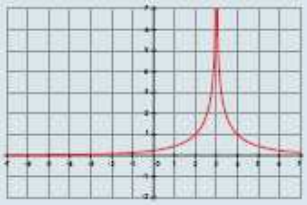
a)



b)

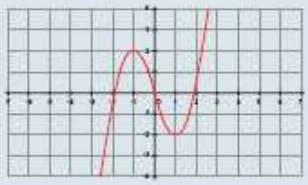


c)

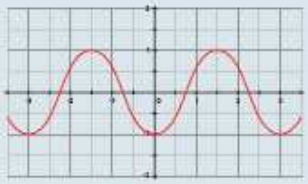


□ **27.** Indica los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes gráficas:

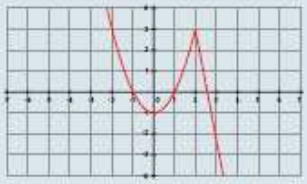
a)



b)



c)



→

23.

a) En este caso la función presenta una doble problemática. Por una lado, el radicando siempre tendrá que ser mayor o igual a 0 y, por otro, habrá que prestar atención a posibles valores que anulen el denominador:

$x+5=0 \Rightarrow x=-5 \Rightarrow$ excluimos el -5 del dominio.

$\frac{x-3}{x+5} \geq 0$ Para resolver esta inecuación vamos a analizar algunos intervalos en los que la función puede cambiar de signo. Los extremos de dichos intervalos serán, evidentemente, los puntos en los que la función corte al eje OX pero también aquéllos en los que la función tenga una discontinuidad:

	$(-\infty,-5)$	$(-5,3)$	$(3,\infty)$
$\frac{x-3}{x+5}$	>0	<0	>0

Luego el dominio de definición es:

$Dom(f)=(-\infty,-5)\cup[3,\infty)$

b) En este caso tenemos que asegurar que el radicando sea mayor o igual que 0:

$6x^4+x^2-1\geq 0$

Conviene hacer el cambio de variable $x^2 \rightarrow x^2=t$ y analizarlo como si fuera una ecuación de segundo grado:

$6t^2+t-1\geq 0$

Igualando a 0 para ver los puntos en los que cambia de signo:

$$t=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 6\cdot(-1)}}{12}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{12} \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{1}{3} \\ t=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$\begin{cases} x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \\ x=\pm\sqrt{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Descartamos las que pertenecen al conjunto de los complejos y nos quedamos con las reales, estableciendo los intervalos a evaluar:

	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty\right)$
$6x^4+x^2-1$	>0	<0	>0

Luego, finalmente, el dominio queda como:

$$Dom(g)=\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\infty\right)$$

c) Vamos a analizar, como en el resto de los apartados, el signo del radicando, forzándolo a que sea positivo o nulo:

$$x^3-3x\geq 0\ \Rightarrow x(x^2-3)\geq 0$$

Ahora buscaremos los intervalos a analizar, obteniendo los puntos en los que la función $\sigma(x)=x(x^2-3)$ corta el eje de abscisas:

$$x(x^2-3)=0\ \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \\ x=-3 \end{cases}$$

Analizamos los intervalos:

	$(-\infty,-3)$	$(-3,0)$	$(0,3)$	$(3,\infty)$
$6x^4+x^2-1$	<0	>0	<0	>0

El domino de definición es, por tanto:

$$Dom(h)=(-3,0)\cup(3,\infty)$$

d) En este caso hay que analizar que el denominador sea distinto de 0 pero también que el radicando no sea menor que 0.

En primera instancia el dominio será $x\geq 0$ pues hay una raíz cuadrada con radicando x. En segundo lugar vamos a ver para qué valores el denominador se anula:

$$x-5\sqrt{x}+6=0\ \Leftrightarrow$$

$x + 6 - 5\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow$

$(x + 6 - 5\sqrt{x})(x + 6 + 5\sqrt{x}) = 0 \Leftrightarrow$

$(x + 6)^2 - 25x = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 + 12x + 36 - 25x = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - 13x + 36 = 0 \Leftrightarrow$

$x = \frac{+13 \pm\sqrt{169-4\cdot 36}}{2} = \frac{+13 \pm\sqrt{25}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = +9 \\ x = +4 \end{cases}$

Después de comprobar que verifican la ecuación, exponemos finalmente el dominio:

$Dom(i) = \{0\} \cup (\mathbb{R}^+ - \{4,9\})$

24.

a) Dominio: $[-5,-3] \cup (0,3] \cup [4,6]$

Recorrido: $(-4,4]$

b) Dominio: $[-6,-4) \cup (-4,7]$

Recorrido: $[-4,-3) \cup (-2,3] \cup \{4\}$

c) Dominio: $[-7,7]$

Recorrido: $[-2,3]$

Continuidad.

25.

a) En $x = -4$ es una discontinuidad evitable

En $x = -1$ es una discontinuidad esencial de salto finito

b) Tanto en $x - -2$,$x - 0$ y $x - 2$ son discontinuidades esenciales de salto infinito (asíntotas verticales)

Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos.

26.

a) Crecimiento: $(-4,-1) \cup (1,5)$

Decrecimiento: $(-7,-4) \cup (-1,1) \cup (5,7)$

b) Crecimiento: $(-7,-1) \cup (-1,0)$

Decrecimiento: $(0,1) \cup (1,7)$

c) Crecimiento: $(-7,3)$
Decrecimiento: $(3,7)$

27.

a) Crecimiento: $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$
Decrecimiento: $(-1,1)$
Extremos relativos en: $(-1,2)$, $(1,2)$

b) Crecimiento: $\left(3k,\frac{3}{2}+3k\right) \forall\, k \in \mathbb{Z}$
Decrecimiento: $\left(\frac{3}{2}+3k, 3(1+k)\right) \forall\, k \in \mathbb{Z}$
Extremos relativos en: $(3k,-1), \left(\frac{3}{2}+3k, 1\right) \forall\, k \in \mathbb{Z}$

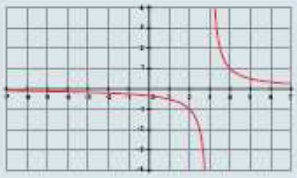
c) Crecimiento: (-1,2)
Decrecimiento: (-∞,-1)U (2,+∞)
Extremos relativos en: (0,-1) hay un mínimo relativo, y (2,3) un máximo relativo.

PÁGINA 110

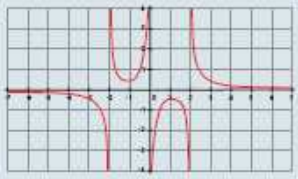
Concavidad y convexidad

□ **28.** Determina los intervalos de convexidad y concavidad de las siguientes funciones:

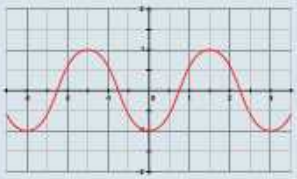
a)



b)



c)

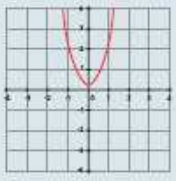


Simetría y periodicidad

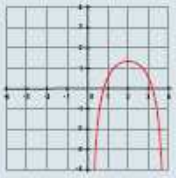
□ **29.** Indica el tipo de simetría que presenta cada una de estas funciones y, cuando se pueda, el eje de simetría:

a)

c)



b)



d)

□ **30.** Indica si son pares o impares las siguientes funciones:

a) $f(x) = x + 3$

b) $g(x) = -x^2 + 4$

c) $h(x) = -x^5 + 3x^3 - x$

d) $i(x) = 2x^4 + 3x^2 - 3$

■ **31.** Indica si las siguientes funciones son simétricas respecto del origen o respecto del eje de ordenadas:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2-3}{x^3+x}$

d) $i(x) = \dfrac{x-x^3}{x}$

Tendencias de las funciones

□ **32.** Determina la tendencia de las siguientes funciones:

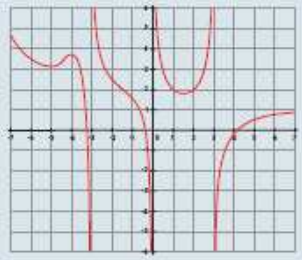
a) $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ cuando $x \to 2^+$

b) $g(x) = \dfrac{3}{x^2-2}$ cuando $x \to +\infty$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x} + 1$ cuando $x \to -\infty$

d) $i(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 1$ cuando $x \to +\infty$

□ **33.** Explica las tendencias de la siguiente función:



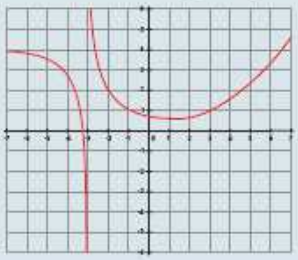
a) Cuando $x \to -3^-$ y $x \to -3^+$

b) Cuando $x \to 0^-$ y $x \to 0^+$

c) Cuando $x \to 3^-$ y $x \to 3^+$

d) Cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$

□ **34.** Determina las tendencias de la siguiente gráfica:



Concavidad y convexidad.

28.

a) Convexa: $(3,\infty)$ Cóncava: $(-\infty,3)$

b) Convexa: $(-2,0)\cup(2,\infty)$ Cóncava: $(-\infty,-2)\cup(0,2)$

c) Convexa: $\left(-\frac{3}{4}+3k,\frac{3}{4}+3k\right)$ Cóncava: $\left(\frac{3}{4}+3k,2+\frac{1}{4}+3k\right)$ $\forall k\in\mathbb{Z}$

Simetría y periodicidad.

29.

a) Presenta simetría impar respecto al origen, pues $f(-x)=-f(x)$

b) Tiene simetría par respecto al eje $x=-2$

c) Tiene simetría par respecto al eje de ordenadas

d) Presenta simetría impar respecto al origen

30.

a) $f(-x)=-x+3$, por lo que, respecto al sistema de referencia inicial, no es ni par ni impar, no obstante, si se hace el cambio de variable $x\to x=t-3$ presentará simetría impar. Podría considerarse con simetría impar respecto al punto $(3,0)$

b) $g(-x)=-x^2+4=g(x)$, es decir, presenta simetría par.

c) $h(-x)=x^5-3x^3+x=-h(x)$ luego presenta simetría impar

d) $i(-x)=2x^4+3x^2-3=i(x)$, es decir, simetría par.

31.

a) $f(-x)\neq f(x)$ y $f(-x)\neq -f(x)$ luego, a priori, no presenta simetría ni par ni impar. No obstante, haciendo el cambio de variable $x\to x=t+2$ presentará simetría impar respecto al nuevo origen. En este caso, la gráfica es una hipérbola equilátera que tiene múltiples simetrías:

- Respecto a su centro $(2,0)$
- Respecto a sus asíntotas $y=0\,,x=2$
- Respecto a sus ejes $y=-x+2,\ \ y=x-2$

b) $g(-x)=-\frac{x}{x^2+1}=-g(x)$ luego presenta simetría impar respecto al origen.

c) $h(-x)=\frac{x^2-3}{-x^3-x}=-\frac{x^2-3}{x^3+x}=-h(x)$, es decir, simetría impar respecto al origen

d) $i(-x)=\frac{-x+x^3}{-x}=\frac{x-x^3}{x}=i(x)$ $\Rightarrow$ presenta simetría par respecto al eje de ordenadas.

Tendencias de las funciones.

32.

a) $f(2'01) = \frac{3}{2'01-2} = 300$

$f(2'0001) = \frac{3}{2'0001-2} = 30000$

$f(2'00001) = \frac{3}{2'00001-2} = 300000$

…

$f(x) \xrightarrow[x\to 2^+]{} \infty$

b) $g(10^6) = \frac{3}{10^{12}-2} \approx \frac{3}{10^{12}} = 3\cdot 10^{-12}$

$g(10^{10}) - \frac{3}{10^{20}-2} \approx \frac{3}{10^{20}} - 3\cdot 10^{-20}$

…

$g(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

c) $h(-10^6) = -\frac{1}{10^{12}} + 1 = 1 + 10^{-12}$

$h(-10^{10}) = -\frac{1}{10^{20}} + 1 = 1 + 10^{-20}$

…

$h(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 1$

d) $i(10^6) = 3\cdot 10^{18} + 2\cdot 10^{12} - 10^6 + 1 \approx 3\cdot 10^{18}$

$i(10^{10}) = 3\cdot 10^{30} + 2\cdot 10^{20} - 10^6 + 1 \approx 3\cdot 10^{30}$

…

$i(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$

33.

En este caso, al disponer de la gráfico es mucho más sencillo obtener las tendencias, basta con interpretar la gráfica:

a) $f \xrightarrow[x\to -3^-]{} -\infty$ $\quad f \xrightarrow[x\to -3^+]{} +\infty$

b) $f \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty$ $\quad f \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$

c) $f \xrightarrow[x\to 3^-]{} +\infty$ $\quad f \xrightarrow[x\to 3^+]{} -\infty$

d) $f \xrightarrow[x\to +\infty]{} 1$ $\quad f \xrightarrow[x\to -\infty]{} +\infty$

34.

Se analizan las tendencias para $x \to -\infty$,$x \to -3^{\pm}$,$x \to \infty$

$$f \xrightarrow[x \to -3^{+}]{} +\infty$$

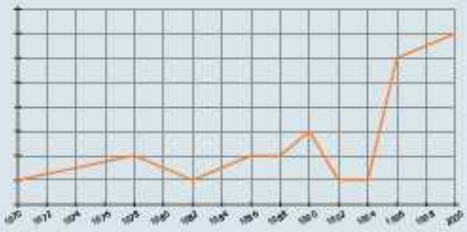
$$f \xrightarrow[x \to -3^{-}]{} -\infty$$

$$f \xrightarrow[x \to -\infty]{} 4$$

$$f \xrightarrow[x \to \infty]{} +\infty$$

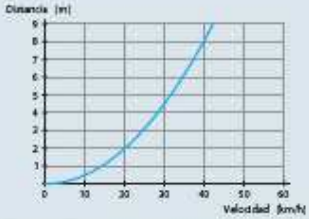
→ PROBLEMAS

☐ **35.** La siguiente gráfica muestra la evolución económica de una determinada empresa desde su fundación, en 1970, hasta el año 2000.



Indica los intervalos de crecimiento de su economía y los intervalos de tiempo en los que la economía ha sufrido un receso.

☐ **36.** La siguiente gráfica ilustra la relación existente entre la distancia de frenado de un vehículo y la velocidad a la que circula el vehículo:



a) ¿Cuántos metros son necesarios para detener un vehículo que circula a una velocidad de 23 km/h?

b) ¿A qué velocidad circula un vehículo que necesita 6'25 m para frenar?

AUTOEVALUACIÓN

1. Determina el dominio de las siguientes funciones:

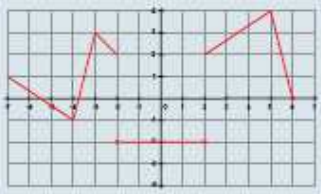
a) $f(x) = -x^2 - 2x + 4$ b) $g(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 16}$

2. Estudia el dominio de la función $h(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$.

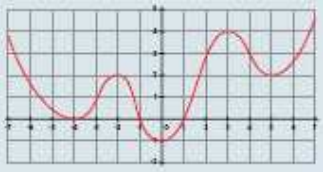
3. Calcula los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ b) $g(x) = \dfrac{x - 3}{x + 5}$

4. Determina el dominio y la imagen de la siguiente función:



5. Dada la siguiente gráfica:



Indica:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento

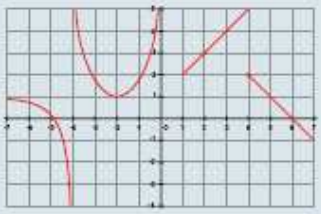
b) Los extremos relativos

c) Los puntos de corte con los ejes

6. Estudia si las siguientes funciones son pares o impares:

a) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 1$ b) $g(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x^3 + x}$

7. Encuentra los puntos de discontinuidad de la siguiente función e indica los intervalos donde la función es continua:



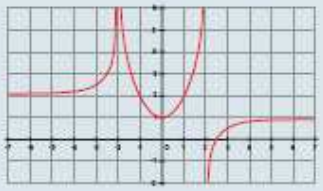
8. Indica la tendencia de la función $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 3}$ cuando:

a) $x \to 3^-$ b) $x \to 3^+$

9. Indica la tendencia de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2x - 1}$ cuando:

a) $x \to 1^-$ b) $x \to 1^+$ c) $x \to +\infty$ d) $x \to -\infty$

10. Determina las tendencias de la siguiente función:



→