Unidad 8 – Áreas y Volúmenes

PÁGINA 132

¿QUÉ NECESITAS SABER?

Unidades de medida

Pasa a centímetros cuadrados las siguientes cantidades:

a) 2 dm^2 b) 120 mm^2 c) 0'05 m^2

Pasa a metros cúbicos las siguientes unidades:

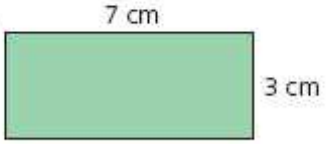
a) 9 dm^3 b) 0'05 km^3 c) 230 000 mm^3

¿Cuántos litros son 250 cm^3?

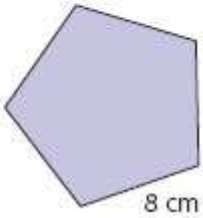
Perímetro de los polígonos

Calcula el perímetro de los siguientes polígonos:

a)



b)



Calcula la longitud de una circunferencia de 8 cm de radio.

SOLUCIONES

Unidades de medida.

Pasa a centímetros cuadrados las siguientes cantidades.

a) $2\ dm^2 <> 200\ cm^2$ b) $120\ mm^2 <> 1'2\ cm^2$ c) $0'05\ m^2 <> 500\ cm^2$

Pasa a metros cúbicos las siguientes unidades.

a) $9\ dm^2 <> 0'009\ m^3$ b) $0'05 km^3 <> 5 \cdot 10^7\ m^3$ c) $230000\ mm^3 <> 2'3 \cdot 10^{-4}\ m^3$

¿Cuántos litros son 250 cm^3?

$250\ cm^3 <> \frac{1}{4}\ l$

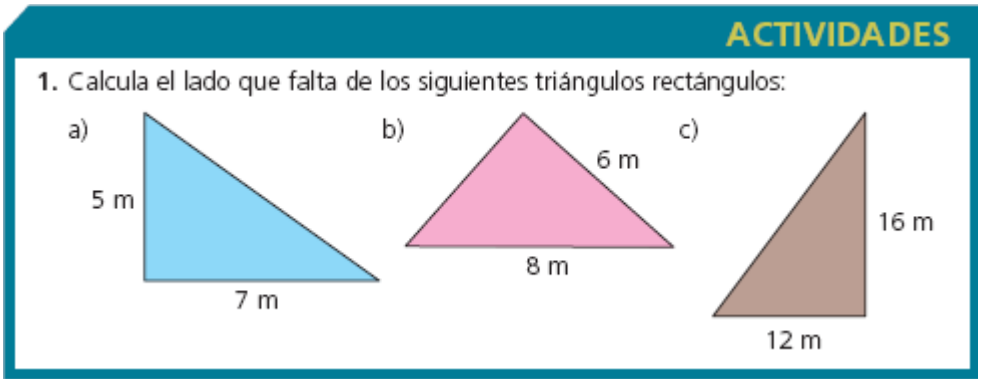
Perímetro de los polígonos.

a) $2 \cdot 7 + 2 \cdot 3 = 20\ cm$ b) $5 \cdot 8 = 40$

Calcula la longitud de una circunferencia de 8 cm de radio.

$L = 2 \cdot \pi \cdot r = 16\pi\ cm$

PÁGINA 134



SOLUCIONES

1. a) $h^2 = c^2 + C^2 \Rightarrow h = \sqrt{25+49} = 8'6m$

b) $h^2 = c^2 + C^2 \Rightarrow c = \sqrt{64-36} = 5'29m$

c) $h^2 = c^2 + C^2 \Rightarrow h = \sqrt{144+256} = 20m$

PÁGINA 135

ACTIVIDADES

2. Calcula la altura de un triángulo equilátero de lado 20 cm.

3. Calcula el lado de un cuadrado de 10 cm de diagonal.

4. Indica la altura sobre el lado mayor de un triángulo de lados 10, 17 y 21 cm.

5. Determina el lado de un rombo cuyas diagonales midan 24 y 10 cm.

6. Calcula la apotema de un hexágono regular de 40 cm de lado.

7. Calcula la altura sobre el lado desigual del triángulo de lados 26, 26 y 20 cm.

SOLUCIONES

2. Aplicando el teorema de Pitágoras a un lado y la mitad de otro:

$h^2 = c^2 + C^2 \Rightarrow c = \sqrt{400 - 100} = 17'32\ cm$

3. La diagonal y dos lados forman un triángulo rectángulo isósceles:

$h^2 = c^2 + c^2 = 2c^2 \Rightarrow c = \frac{\sqrt{2}}{2} h = 7'07\ cm$

4. Dibujamos el triángulo y planteamos las ecuaciones utilizando el teorema de Pitágoras:

$10^2 = h^2 + x^2$

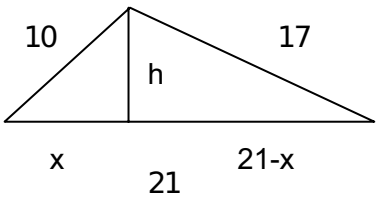
$17^2 = h^2 + (21 - x)^2$

Restando ambas ecuaciones:

$189 = 441 - 41x \Rightarrow x = 6'14\ cm$

Sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones y despejando:

$h = \sqrt{100 - x^2} = 7'89 cm$



5. El lado es la hipotenusa del triángulo rectángulo con catetos 24 y 10:

$$h = \sqrt{24 \cdot 24 + 10 \cdot 10} = 21'82\,cm$$

6. El hexágono regular está formado por 6 triángulos equiláteros, luego el valor buscado es uno de los catetos del triángulo rectángulo formado por medio lado como otro cateto y lado como hipotenusa:

$$C = \sqrt{h^2 - c^2} = \sqrt{40^2 - 20^2} = 34'64\,cm$$

7. Al tener dos lados iguales, es un triángulo isósceles. La altura es uno de los catetos del triángulo rectángulo formado por medio lado desigual como el otro cateto e hipotenusa uno de los lados iguales:

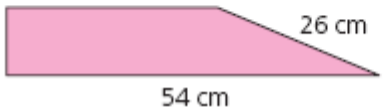
$$C = \sqrt{h^2 - c^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24\,cm$$

PÁGINA 136

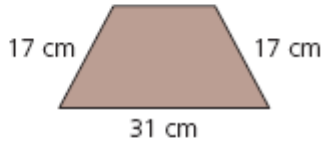
ACTIVIDADES

8. Determina el área de los siguientes trapecios:

a)



b)



9. Calcula el área de un triángulo equilátero de 12 cm de lado.

10. Calcula el área de un triángulo cuyos lados midan 17, 10 y 21 cm.

11. Calcula el área de un hexágono regular de lado 20 cm.

SOLUCIONES

8. a) Antes que el área, hay que calcular la altura del trapecio aplicando, por ejemplo, el teorema de Pitágoras al triángulo formado por el lado oblicuo de 26 cm (como hipotenusa), la proyección de este sobre la base (como cateto) y finalmente la altura:

$$h = \sqrt{26^2 - (54 - 30)^2} = 10$$

$$A = (B + b) \cdot \frac{h}{2} = (54 + 30) \cdot \frac{10}{2} = 168\ cm^2$$

b) Igualmente hay que calcular la altura previamente, para luego utilizar la fórmula del área del trapecio. Aplicaremos el teorema de Pitágoras al triángulo formado por la hipotenusa de 17cm, la proyección de este lado sobre la base como cateto y la altura como otro cateto:

$$h = \sqrt{17^2 - \left(\frac{31-15}{2}\right)^2} = 15$$

$$A = (B + b) \cdot \frac{h}{2} = (31 + 15) \cdot \frac{15}{2} = 345\ cm^2$$

9. Para calcular la altura de este triángulo aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo formado por uno de los lados, la mitad de la base y la altura:

$$h = \sqrt{12^2 - 6^2} = 10'39\ cm$$

$$A = b \cdot \frac{h}{2} = 12 \cdot \frac{10'39}{2} = 62'35\ cm$$

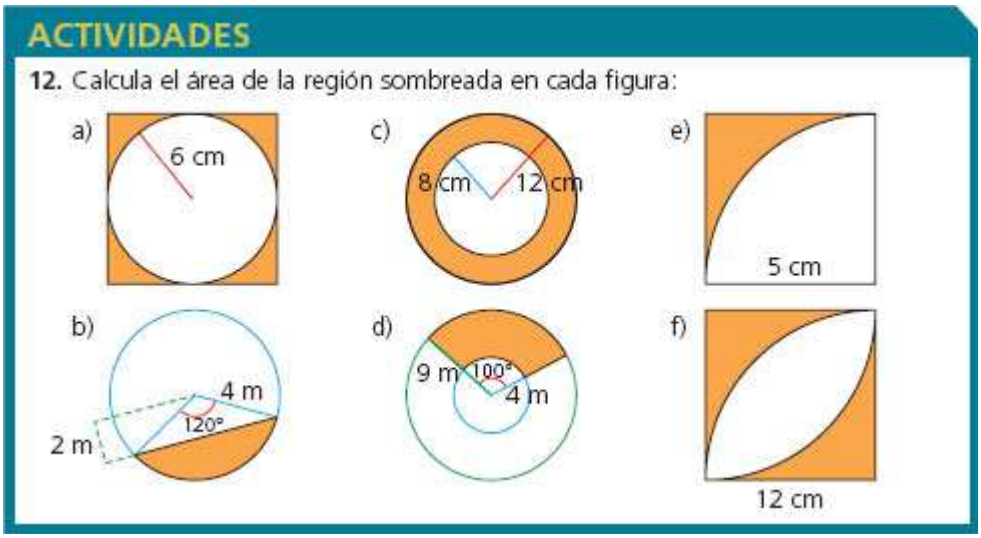
10. Seguimos el mismo razonamiento que en el ejercicio 4, que es el mismo triángulo. Una vez sabida la altura el área se obtiene con la fórmula:

$$A = b \cdot \frac{h}{2} = 21 \cdot \frac{7'89}{2} = 82'85\ cm^2$$

11. El hexágono se compone de 6 triángulos equiláteros cuyo lado, en este caso, será 20 cm. Seguimos el mismo razonamiento que en el ejercicio 9 para calcular el área de este triángulo:

$$A_{hex} = 6 \cdot A_{trig} = 6 \cdot b \cdot \frac{h}{2} = 6 \cdot 20 \cdot \frac{\sqrt{20^2 - 10^2}}{2} = 1039'23\ cm^2$$

PÁGINA 137



SOLUCIONES

12. a) Calcularemos el área del cuadrado y restaremos la de la circunferencia:

$$A = (2 \cdot 6)^2 - \pi \cdot 6^2 = 30'90\ cm^2$$

b) Calcularemos el área del sector circular y le restaremos el área del triángulo:

$$a_{sector} = \frac{120}{360} \cdot 4^2 \cdot \pi = 16'75 cm^2$$

Para calcular el área del triángulo aplicaremos el teorema de Pitágoras al triángulo con hipotenusa uno de los radios, un cateto la altura y el otro la mitad de la base:

$$\frac{b}{2} = \sqrt{4^2 - 2^2} \Rightarrow b = 6'93\ cm$$

$$a_{triangulo} = b \cdot \frac{h}{2} = 6'93 \cdot \frac{2}{2} = 6'93\ cm$$

$$A = 16'75 - 6'93 = 9'82\ cm^2$$

c) Calculamos el área de ambas circunferencias y restamos el área de la pequeña a la grande:

$$A = \pi(12^2 - 8^2) = 80\pi$$

d) En este caso hallaremos el área de ambas circunferencias y posteriormente lo restringiremos al sector de 100º:

$$A = \frac{100}{360}\pi(R^2 - r^2) = \frac{100}{360} \cdot \pi(9^2 - 4^2) = 5'67\ cm^2$$

e) Restamos el área del sector circular de 90º al cuadrado de lado 5:

$$A = l^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 = 5^2 - \frac{1}{4}\pi 5^2 = 5'37\ cm^2$$

f) Es idéntico al ejercicio anterior pero con área doble:

$$A = 2(l^2 - \frac{1}{4}\pi r^2) = 2(12^2 - \frac{1}{4}\pi 12^2) = 61'81\ cm^2$$

PÁGINA 138

ACTIVIDADES

13. Calcula el área lateral, el área total y el volumen de un prisma recto cuya base es un cuadrado de 5 cm de lado y 10 cm de altura.

14. Calcula el área lateral, el área total y el volumen de una pirámide recta que tiene como base un cuadrado de 8 cm de lado y 10 cm de arista lateral.

SOLUCIONES

13. $A_{base} = l^2 = 5^2 = 25\,cm^2$

$A_{lateral} = 4 \cdot 5 \cdot 10 = 200\,cm^2$

$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} = 250\,cm^2$

$V = A_{base} \cdot h = 25 \cdot 10 = 250\,cm^3$

14. $A_{base} = l^2 = 8^2 = 64\,cm^2$

Por teorema de Pitágoras:

$apotema = \sqrt{10^2 - 4^2} = 9'17\,cm^2$

$altura = \sqrt{9'17^2 - 4^2} = 8{,}25\,cm^2$

$A_{lateral} = 9'17 \cdot 4 \cdot 8 = 293'44\,cm^2$

$A_{total} = A_{base} + A_{lateral} = 357'44\,cm^2$

$V = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 8'25 = 176\,cm^3$

PÁGINA 139

ACTIVIDADES

15. Calcula el área lateral, el área total y el volumen de las siguientes figuras:

a) Un cilindro de 5 cm de radio y 12 cm de generatriz.

b) Una pirámide de 10 cm radio y 8 cm de generatriz.

16. Calcula el área y el volumen de una esfera de 8 cm de radio.

SOLUCIONES

15. a)

$A_{lateral} = h \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = 376'99\, cm^2$

$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} = 2 \cdot \pi \cdot 5^2 + 376'99 = 534'07\ cm^2$

$V = A_{base} \cdot h = 157'08 \cdot 12 = 1884{,}96\, cm^3$

b) La generatriz, por definición, no puede ser menor que el radio en un cono recto.

16. $A = 4\pi r^2 = 804'25 cm^2$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 2144'66\, cm^3$

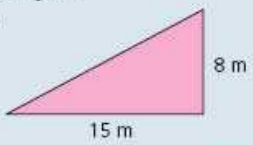
ACTIVIDADES FINALES

→ EJERCICIOS

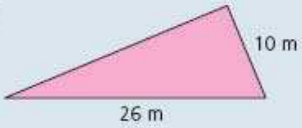
El teorema de Pitágoras. Aplicaciones

□ **17.** Determina el lado que falta en los siguientes triángulos rectángulos:

a)



b)



□ **18.** Calcula la diagonal de un cuadrado de 8 cm de lado.

□ **19.** Calcula el lado de un cuadrado de 15 cm de diagonal.

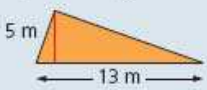
□ **20.** Calcula la altura de un triángulo equilátero de 24 cm de lado.

□ **21.** Calcula la altura del siguiente triángulo isósceles:

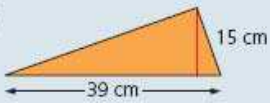
◪ **22.** Calcula la altura sobre el lado mayor de un triángulo cuyos lados miden 13, 14 y 15 cm.

◪ **23.** Calcula la altura sobre la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos:

a)



b)



□ **24.** Calcula el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 20 cm y 15 cm.

□ **25.** Calcula el perímetro del siguiente rectángulo:

◪ **26.** Calcula la altura de los siguientes triángulos:

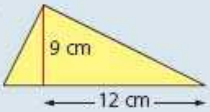
a)

b)

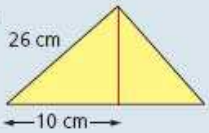
◪ **27.** Calcula la apotema de un hexágono regular de 12 cm de lado.

■ **28.** Calcula el perímetro de cada uno de los siguientes triángulos rectángulos:

a)



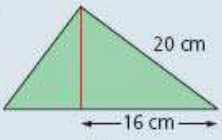
b)



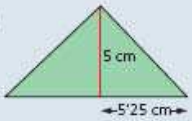
◪ **29.** Dado un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 y 8 cm, calcula la altura del triángulo sobre la hipotenusa.

■ **30.** Calcula el perímetro de cada uno de los siguientes triángulos rectángulos:

a)



b)



Área de un polígono

□ **31.** Calcula el área de un cuadrado de 20 cm de diagonal.

□ **32.** Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 25 cm.

Teorema de Pitágoras y aplicaciones.

17. Por teorema de Pitágoras:

a) $h = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17\ cm$

b) $c = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24\,cm$

18. Por teorema de Pitágoras:

$d = \sqrt{8^2 + 8^2} = 11'31\,cm$

19. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \Rightarrow l = \frac{\sqrt{2}}{2}d = 10'61\,cm$

20. Por teorema de Pitágoras:

$h = \sqrt{24^2 - \left(\frac{24}{2}\right)^2} = 20'78\,cm$

21. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$h = \sqrt{10^2 - \left(\frac{16}{2}\right)^2} = 6\,cm$

22. Siguiendo el mismo razonamiento y procedimiento que el ejercicio 4:

$13^2 = h^2 + x^2$

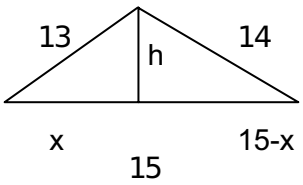
$14^2 = h^2 + (15 - x)^2$

Restando ambas ecuaciones:

$27 - 225 - 30x \rightarrow x - 6'6\,cm$

Sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones y despejando:

$h = \sqrt{169 - x^2} = 11'2cm$



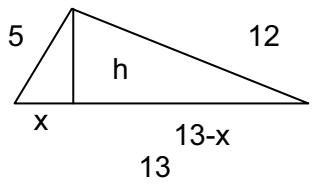
23.

a) En primer lugar obtenemos el valor del otro lado usando el teorema de Pitágoras:

$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

Posteriormente planteamos las dos ecuaciones (de manera semejante al ejercicio 4:

$5^2 = h^2 + x^2$
$12^2 = h^2 + (13 - x)^2$
Restándolas:
$144 = 169 - 26x \Rightarrow x = 0'96$
$h = \sqrt{25 - 0'96^2} = 4'91$



b) Procedemos igual que en el caso anterior.
Lado que falta del triángulo:
$h = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36\,cm$

Sistema de ecuaciones:
$36^2 = h^2 + (39 - x)^2$
$15^2 = h^2 + x^2$
Restando:
$1071 = 1521 - 68x \Rightarrow x = 6'62$
$h = \sqrt{15^2 - 6'62^2} = 13'46$

24. La diagonal es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son 20 y 15:

$P = 4 \cdot h = 4 \cdot \sqrt{20^2 + 15^2} = 59'92\,cm$

25. Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo formado por la hipotenusa y los dos lados para encontrar la longitud del lado que falta:

$c = \sqrt{11'24^2 - 6'4^2} = 9'24$

26. a) Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo que forma la altura, media base y uno de los lados:

$h = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

b) Aplicamos el teorema de Pitágoras a los dos triángulos que se forman para obtener un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

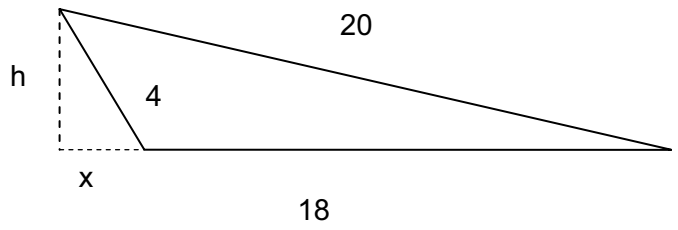
$4^2 = h^2 + x^2$

$20^2 = (18 + x)^2 + h^2$

Restando:

$284 = 324 + 36x \Rightarrow x = 1'\hat{6}$

$h = \sqrt{16 - 1'6^2} = 3'64\ cm$



27. Sabiendo que el hexágono está formado por 6 triángulos equiláteros, se aplica el teorema de Pitágoras a la mitad de la base de uno, un lado y la altura, que coincide con la apotema del hexágono:

$h = \sqrt{12^2 - 6^2} = 10'39cm$

28. a) Aplicamos Pitágoras al triángulo formado por la altura, el cateto mayor y la proyección de este sobre la hipotenusa:

$C = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$

El lado que falta por calcular se haya aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo entero por un lado y al otro triángulo interior para llegar al sistema:

$c^2 = x^2 + 9^2$

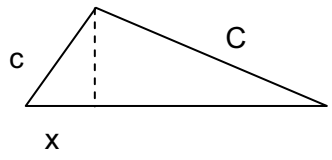
$(12 + x)^2 = c^2 + 15^2$

Sumándolas:

$144 + 24x = 306 \Rightarrow x = 6'75$

$c = 6'75^2 + 9^2 = 11'25$

Por tanto el perímetro es: $P = 11{,}25 + 15 + 12 + 6'75 = 45\ cm$



b) Seguimos el mismo razonamiento que en el caso anterior:

$h = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$

$(10 + x)^2 = 26^2 + c^2$

$c^2 = 24^2 + x^2$

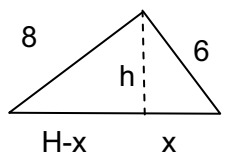
Sumándolas:

$100 + 20x = 1252 \Rightarrow x = 57'6$

$c = \sqrt{24^3 + 57'6^2} = 62'4$

Luego el perímetro es: $P = 10 + 57'6 + 62'4 + 26 = 104\,cm$

29.



En primer lugar, aplicando el teorema de Pitágoras hallamos el valor de la hipotenusa:

$H = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

Ahora plantearemos un sistema de dos ecuaciones para encontrar el valor de h (altura)

$8^2 = h^2 + (10 - x)^2$

$6^2 = h^2 + x^2$

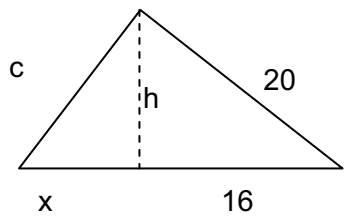
Las restamos:

$28 = 100 - 20x \Rightarrow x = 3'6$

$h = 4'8\,cm$

30. El planteamiento y el procedimiento es idéntico al problema 28.

a)



$20^2 = h^2 + 16^2 \Rightarrow h = 12$

$(x+16)^2 = 20^2 + c^2$

$c^2 = x^2 + 12^2$

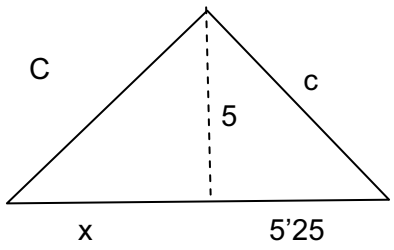
Sumándolas:

$32x + 256 = 344 \;\Rightarrow\; x = 2'59\,cm$

$c = \sqrt{2'59^2 + 12^2} = 12'28\,cm$

Luego el perímetro es $P = 16 + 2'59 + 20 + 12'28 = 50'87$

b)



$c^2 = 5^2 + 5'25^2 \;\Rightarrow\; c = 7'25$

$(x + 5'25)^2 = c^2 + C^2$

$C^2 = x^2 + 5^2$

Sumándolas:

$10'5x + 27'56 = 77'56 \;\Rightarrow\; x = 4'76\,cm$

$C = \sqrt{4'76^2 + 25} = 6'9\,cm$

Área de un polígono.

31. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo formado por dos lados del cuadrado y una diagonal::

$d^2 = 2l^2 \Rightarrow A = l^2 = \frac{d^2}{2} = 200\,cm^2$

32. Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo formado por un lado del triángulo como hipotenusa, la altura (incógnita) y medio lado como catetos:

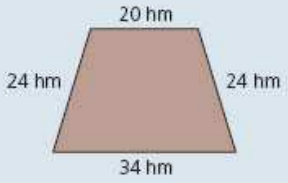
$h = \sqrt{25^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2} = 21'65$

Ahora aplicamos la fórmula del área del triángulo: $A = b \cdot \frac{h}{2} = 270'62\ cm^2$

PÁGINA 143

□ **33.** Calcula el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 13 cm y cuyo lado desigual mide 24 cm.

□ **34.** Calcula el área del siguiente trapecio isósceles:



□ **35.** Calcula el área de un cuadrado de diagonal 7 m.

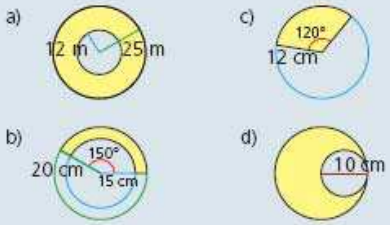
◪ **36.** Calcula el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 10 y 24 cm.

◪ **37.** Calcula el área del siguiente hexágono regular:

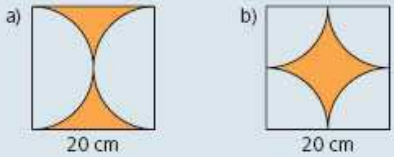
■ **38.** Calcula el área del siguiente un pentágono regular:

Figuras circulares

□ **39.** Calcula el área de la zona sombreada:

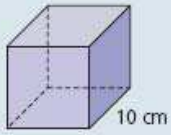


◪ **40.** Calcula el área de la zona sombreada:



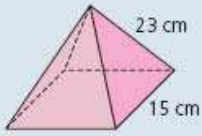
Cuerpos geométricos

□ **41.** Calcula el área lateral y el volumen de un cubo de arista 10 cm.

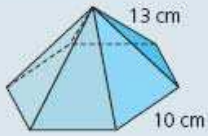


◪ **42.** Calcula el área lateral y el volumen de un prisma de altura 10 cm y de base un hexágono regular de lado 20 cm.

◪ **43.** Calcula el volumen de una pirámide recta cuya base es un cuadrado de diagonal 15 cm y de arista 25 cm.



■ **44.** Calcula el volumen de una pirámide recta cuya base es un hexágono regular de lado 10 cm y cuyas caras triangulares tienen una arista de 13 cm.



Cuerpos de revolucion

□ **45.** Calcula el área de un cilindro de radio 5 cm y altura 12 cm.

□ **46.** Calcula el volumen de un cilindro de diámetro de 20 cm y de 15 cm de altura.

□ **47.** Calcula el área de un cono de 20 cm de diámetro y de altura 24 cm.

□ **48.** Calcula el volumen de un cono de radio 12 cm y generatriz 15 cm.

□ **49.** Calcula el área y el volumen de una esfera de 15 cm de diámetro. →

33. Seguimos el mismo procedimiento que en el ejercicio 32, utilizando el teorema de Pitágoras para encontrar la altura:

$h = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5\ cm$

Ahora aplicamos la fórmula del área del triángulo: $A = b \cdot \frac{h}{2} = 24 \cdot \frac{5}{2} = 60\ cm^2$

34. Necesitamos calcular la altura para aplicar la fórmula del área, así que aplicamos el teorema de Pitágoras a uno de los lados (hipotenusa), a la mitad de la diferencia entre base mayor y base menor y a la altura:

$$h = \sqrt{24^2 - \left(\frac{34-20}{2}\right)^2} = 22'96\,cm$$

Ahora aplicamos la fórmula del área de un trapecio: $A = (B + b) \cdot \frac{h}{2} = 620\ cm^2$

35. Seguimos el mismo procedimiento que en el ejercicio 31, aplicamos el teorema de Pitágoras a la diagonal (hipotenusa) y a los dos lados (catetos):

$$A = l^2 = \frac{d^2}{2} = 24'5\ cm^2$$

36. Las semidiagonales forman parte de un triángulo rectángulo al que, aplicando el teorema de Pitágoras, podremos obtener la longitud de uno de los lados (hipotenusa de dicho triángulo):

$$h = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + \left(\frac{24}{2}\right)^2} = 13$$

Por tanto, el perímetro es: $P = 4 \cdot 13 = 52\,cm$

37. Necesitamos conocer la apotema, así que aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo formado por una semidiagonal (hipotenusa), medio lado y la apotema (catetos):

$$a = \sqrt{8^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2} = 6'93$$

Ahora aplicamos la fórmula del área de un polígono regular

$A = a \cdot \frac{l}{2} \cdot n^{\underline{o}}lados = 6'93 \cdot \frac{8}{2} \cdot 6 = 124'71cm^2$

38. Calculamos la apotema con el mismo procedimiento que antes:

$$a = \sqrt{8'5^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2} = 6'87\ cm$$

Aplicamos la fórmula del área de un polígono regular:

$A = a \cdot \frac{l}{2} \cdot nºlados = 6'87 \cdot \frac{10}{2} \cdot 5 = 171'85\ cm^2$

Figuras circulares.

39.

a) Restaremos el área de la circunferencia pequeña a la grande:

$A = \pi(R^2 - r^2) = 1511'11\ m^2$

b) En primer lugar calcularemos el área del disco y luego la restringiremos al sector de 150º:

$A = \frac{150}{360}\pi(R^2 - r^2) = 229'075\ cm^2$

c) $A = \frac{120}{360} \cdot \pi \cdot r^2 = 150'77\ cm^2$

d) $A = \pi\left(R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2\right) = 235'62\ cm^2$

40. a) $A = l^2 - \frac{\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = 242'92\ cm^2$

b) Es idéntica al anterior

Cuerpos geométricos.

41. $A_{lateral} = l^2 \cdot 4 = 400\ cm^2$

$V = l^3 = 1000\ cm^3$

42. $A_{lateral} = b \cdot h \cdot 6 = 1200\ cm^2$

Para calcular el volumen necesitamos el área de la base. Para ello vamos a encontrar la altura de uno de los seis triángulos (coincidente con la apotema del hexágono) equiláteros que forman el hexágono aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo formado por un lado de dichos triángulos (hipotenusa), la apotema del hexágono y medio lado (catetos):

$ap = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = 17'32\ cm$

Una vez conocida la apotema podemos calcular el área de la base:

$A_{base} = 6 \cdot ap \cdot \frac{l}{2} = 1039'23\ cm^2$

$V = A_b \cdot h = 1039'2\ cm^3$

43. Para calcular el volumen son necesarias la altura y el área de la base.

Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo formado por una arista (hipotenusa), media diagonal y la altura (catetos) para obtener la altura:

$h = \sqrt{25^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2} = 23'86\ cm$

Para calcular el área de la base basta con aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo formado por la diagonal (hipotenusa) y dos lados de la base (catetos):

$A_{base} = l^2 = \frac{d^2}{2} = 112'5 cm^2$

Finalmente, el volumen: $V = A_{base} \cdot h = 2684'25\ cm^3$

44. Para calcular el volumen son necesarias la altura y el área de la base. Dado que la base es un hexágono, está formada por seis triángulos equiláteros, de tal manera que las semidiagonales del hexágono son coincidentes con lados de estos triángulos.

Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo formado por una arista (hipotenusa), un lado y la altura (catetos) para obtener la altura:

$h = \sqrt{13^2 - 10^2} = 8'31\ cm$

Para calcular el área de la base necesitamos conocer la altura de uno de los triángulos, que coincide con la apotema del hexágono (ver ejercicio 42):

$ap = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = 8'66\ cm$

El área de la base, queda entonces: $A_{base} = ap \cdot \frac{l}{2} \cdot 6 = 259'81\ cm^2$

Finalmente, el volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h = 719'67\ cm^3$

Cuerpos de revolución.

45. $A = A_{lat} + 2 \cdot A_{base} = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2 = 534'07\ cm^2$

46. $V = h \cdot A_{base} = h \cdot 2\pi \cdot r^2 = 9424'78\ cm^3$

47. Calculamos la generatriz, necesaria para calcular el área, mediante el teorema de Pitágoras:

$g = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26\ cm$

48. $A = A_{lat} + A_{base} = \pi \cdot r(g + r) = 1130'97\ cm^2$

49. $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 94'25\ cm^2$

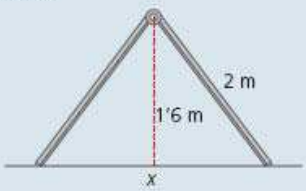
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 1767'15\ cm^3$

ACTIVIDADES **FINALES**

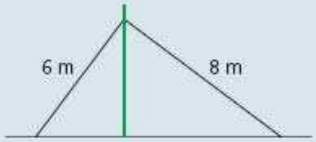
→ PROBLEMAS

□ **50.** Un electricista tiene que acceder a unos cables que están en un muro a una altura de 12 m, para lo que utiliza una escalera de 13 m. ¿A qué distancia de la pared tiene que colocar la escalera para alcanzar la altura que necesita?

□ **51.** Una escalera de tijera tiene 2 m de largo y alcanza una altura de 1'6 m de alto cuando la abrimos. ¿Qué distancia hay entre las patas de la escalera cuando está abierta completamente?

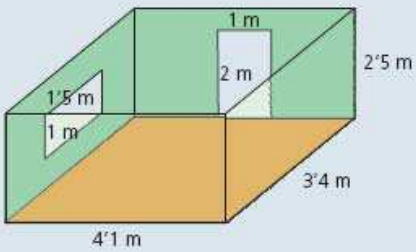


◪ **52.** Un poste está sujeto con dos alambres que forman un ángulo recto en su unión. Si los alambres miden 8 y 6 m, ¿a qué altura del poste están atados los alambres?



□ **53.** Abelardo quiere pintar una piscina de 15 m de largo, 10 m de ancho y 2 m de alto. Si el pintor cobra a 7 € el metro cuadrado, ¿cuánto costará pintar la piscina?

□ **54.** Julia quiere alicatar la cocina que se muestra en la figura. Calcula los metros cuadrados de azulejos que necesita.



□ **55.** En el jardín de una casa colocan una piscina redonda de 9 m de diámetro y 1'2 m de altura. Si un metro cúbico de agua cuesta 0'9 €, ¿cuánto costará llenar la piscina?

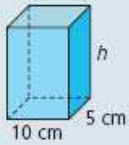
□ **56.** El diámetro de la base de una lata de tomate cilíndrica mide 8 cm. ¿Cuánto medirá su altura si la lata tiene 400 cm^3 de capacidad?

□ **57.** Una fábrica de helados fabrica cucuruchos de 5 cm de diámetro y 10 cm de generatriz. ¿Qué volumen de helado cabe en cada cucurucho?

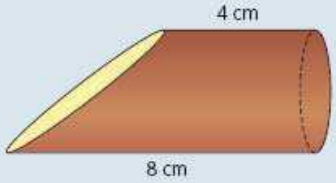
□ **58.** Determina las medidas de un recipiente cilíndrico que tiene una capacidad de π dm^3 de agua.

□ **59.** La altura de un barril de cerveza es de 0'5 m. ¿Qué radio tendrá sabiendo que en él caben 50 l de cerveza?

□ **60.** Una fábrica realiza envases con forma de prisma con un rectángulo de 10 cm de largo y 5 cm de ancho como base. ¿Qué altura deberá tener el envase para que pueda almacenar 1 l de leche?

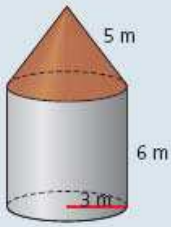


◪ **61.** Un taco de madera de forma cilíndrica mide 8 cm de altura y 2 cm de radio. Si lo cortan como se muestra en la figura, ¿qué volumen de madera tendrá?



◪ **62.** El principio de Arquímedes afirma que un cuerpo flota si la cantidad de agua que desplaza pesa más que el cuerpo. Supongamos que tenemos una esfera de 15 cm de radio y que al echarla al agua queda sumergida justo hasta la mitad. ¿Cuánto pesa, como mucho, dicha esfera? Nota: 1 l de agua pesa 1 kg.

■ **63.** Queremos pintar un molino como el de la figura. Si sabemos que con 1 kg de pintura pintamos 3 m^2, ¿cuánta necesitaremos para pintar todo el molino?



50. La escalera (hipotenusa), el muro y la distancia (catetos) de la escalera al suelo forman un triángulo rectángulo del que conocemos 2 de sus lados, luego aplicando el teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$

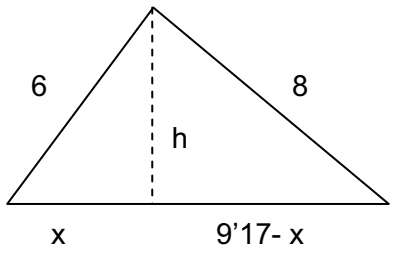
51. La distancia será dos veces el cateto del triángulo rectángulo que forman la altura, un brazo de la escalera y el suelo:

$$d = 2 \cdot \sqrt{2^2 - 1'6^2} = 2'4\,m$$

52. En primer lugar calculamos la distancia entre los puntos de inserción del cable con el suelo, hipotenusa del triángulo, aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{6^2 + 8^2} = 9'17$$

Ahora planteamos un sistema de ecuaciones utilizando de nuevo el teorema de Pitágoras donde "x" y "h" son las incógnitas:



$$6^2 = x^2 + h^2$$

$$8^2 = h^2 + (9'17 - x)^2$$

Restándolas:

$$28 = 84'09 - 18'34x \Rightarrow x = 3'06$$

$$h = \sqrt{36 - 3'06^2} = 5'16\,m$$

53. $p = 7 \cdot A = 7 \cdot (15 \cdot 2 \cdot 2 + 10 \cdot 2 \cdot 2 + 10 \cdot 15) = 1750\,€$

54. $A_f = A_t - A_{vacio} = [2 \cdot 4'2 \cdot 2'5 + 2 \cdot 3'4 \cdot 2'5] - [1'5 \cdot 1 + 1 \cdot 2] = 34'5\,m^2$

55. $p = \frac{0'35€}{l} \cdot V = 0'9 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 68'71€$

56. $V = A_{base} \cdot h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2} = 7'96cm$

57. $V = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h$

Hallamos primero la altura, utilizando el teorema de Pitágoras:

$h = \sqrt{g^2 - r^2} = 9'68cm$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = 63'36\, cm^3$

58. $V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Imponemos la condición: $\pi = \pi \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow r^2 \cdot h = 1$ luego existen infinitos recipientes cilíndricos que cumplen con esa condición, simplemente se debe verificar que $r^2 = \frac{1}{h}$

59. Consideramos el barril como cilíndrico: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Imponemos ahora las condiciones:

$50l <> 50\, dm^3 <> 0'05m^3 = \pi \cdot r^2 \cdot 0'5 \Rightarrow r = 0'18\, m$

60. $1l <> 1dm^3 <> 1000cm^3 = V = A_{base} \cdot h = 10 \cdot 5 \cdot h \Rightarrow h = 20\, cm$

61. El volumen corresponde a ¾ de lo que sería el cilindro completo, luego:

$V = \frac{3}{4} \cdot A_{base} \cdot h = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 75'40\, cm^3$

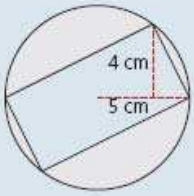
62. Pesará como máximo el volumen del agua desalojada, es decir, la mitad de su volumen:

$\frac{1}{2}V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = 7'07 \cdot 10^{-6}\, dm^3 <> 7'07 \cdot 10^{-6} l \Rightarrow masa = 7'07 \cdot 10^{-6}\, Kg$

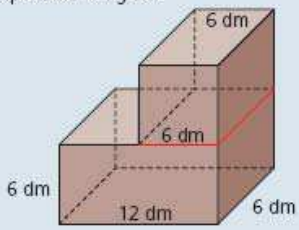
63. $A_{total} = A_{cono} + A_{cilindro} = \pi \cdot r \cdot g + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 160'22\, m^3$

$\frac{1Kg}{3m^3} = \frac{x}{160'22} \Rightarrow x = 53'41Kg$

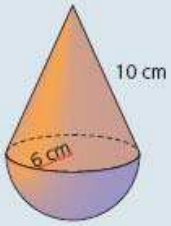
64. Una cristalería cobra a 25 € el metro cuadrado de cristal. ¿Cuánto cobrará por la siguiente pieza?



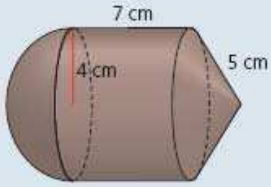
65. Una empresa de carpintería metálica cobra las piezas de acero a 120 € el metro cúbico. Calcula el dinero que costaría la pieza de la figura:



66. Una vasija tiene la forma de la figura. ¿Qué capacidad tiene?



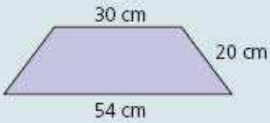
67. Un obrador de confitería hace figuras de chocolate. Calcula la cantidad de chocolate necesaria para hacer una figura maciza como la que se muestra.



AUTOEVALUACIÓN

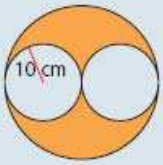
1. Calcula el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 24 y 10 m.

2. Calcula el área del siguiente trapecio isósceles:

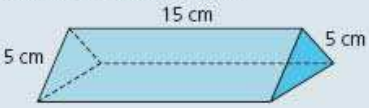


3. Calcula el área de una corona circular de radios 8 y 15 cm.

4. Calcula el área de la zona sombreada:



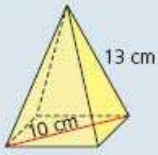
5. Calcula el área del siguiente prisma:



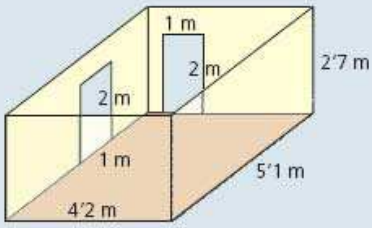
6. Calcula el área de un cilindro de radio 5 m y altura 12 m.

7. Calcula el volumen del cono de radio 12 m y generatriz 13 m.

8. Calcula el volumen de la pirámide recta de base cuadrada que se muestra en la figura:



9. Una empresa de reformas cobra 7'2 € por metro cuadrado de tabique. Si levantan los muros de una habitación como la que se muestra en la figura, ¿cuánto costará construir los tabiques de esta habitación?



10. Calcula el volumen de la siguiente figura:

→

64. Tenemos un paralelogramo del que conocemos la altura de uno de sus triángulos y la base, luego podemos calcular su área, que será la mitad de la buscada:

$A = 2 \cdot b \cdot \frac{h}{2} = 4 \cdot 5 = 40\ cm^2 <> 0'004\ m^2$

El precio final será de $0'004m^2 \cdot \frac{25€}{m^2} = 0'1€$

65. $V_t = V_1 + V_2 = 6 \cdot 6 \cdot 12 + 6 \cdot 6 \cdot 6 = 648\ dm^3 <> 0'648m^3$

El precio final será de $120\frac{€}{m^3} \cdot 0'648m^3 = 77'76€$

66. $V_t = V_{cono} + V_{semiesfera} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h + \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

La altura la calculamos con el teorema de Pitágoras:

$h = \sqrt{g^2 - r^2} = 8$

$V_t = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 8 + \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 = 753'98\ cm^3$

67. $V_t = V_{cono} + V_{semiesfera} + V_{cilindro} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h + \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 + h \cdot \pi \cdot r^2$

La altura la calculamos con el teorema de Pitágoras:

$h = \sqrt{g^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

$V_t = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 + 3 \cdot \pi \cdot 4^2 = 301'59\ cm^3$

AUTOEVALUACIÓN

1. Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de uno de los lados, tomando las semidiagonales como catetos:

$P = 4 \cdot l = 4 \cdot l = 4 \cdot \sqrt{12^2 + 5^2} = 52\ m$

2. Necesitamos calcular la altura del trapecio, por lo que aplicamos el teorema de Pitágoras a uno de los lados (hipotenusa), la proyección de este sobre la base y la altura (catetos):

$h = \sqrt{20^2 - \left(\frac{54-30}{2}\right)^2} = 16$

$A = (b + B) \cdot \frac{h}{2} = 672\ cm^2$

3. $A = \pi(R^2 - r^2) = \pi(15^2 - 8^2) = 161\pi\ cm^2$

4. $A = \pi r^2 - 2\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = 50\pi$