5 Aplicaciones de las leyes de la dinámica

Actividades del interior de la unidad

1. Indica con qué interacciona cada uno de los siguientes cuerpos y dibuja las fuerzas que actúan sobre ellos:

a) Un cuerpo en caída libre.

b) Un cuerpo colgado del techo mediante un muelle elástico.

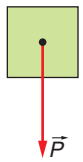
c) Un cuerpo en reposo en un plano inclinado.

d) Un cuerpo lanzado desde el punto más bajo de un plano inclinado que sube deslizándose por la línea de máxima pendiente en los siguientes casos: I) si consideramos despreciable el rozamiento; II) si lo tenemos en cuenta.

e) Un cuerpo en órbita alrededor de la Tierra.

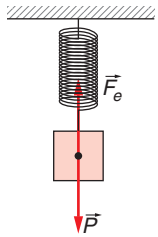
a) El cuerpo solo interacciona con la Tierra, a distancia; luego, sobre él únicamente actúa la fuerza peso:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P}$$



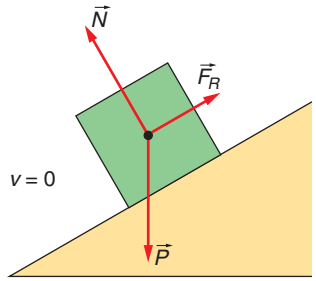
b) El cuerpo interacciona con la Tierra, a distancia, y con el muelle, por contacto; luego las fuerzas que actúan sobre él son el peso y la fuerza elástica, y el diagrama de fuerzas es el de la figura:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_e$$



c) El cuerpo interacciona a distancia con la Tierra y por contacto con la superficie del plano inclinado. Por tanto, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso, $\vec{P}$, y la fuerza normal, $\vec{N}$, del plano; pero si el cuerpo permanece en reposo en un plano inclinado tiene que existir rozamiento; luego, también actúa la fuerza de rozamiento. Entonces, la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo vale:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R = 0$$



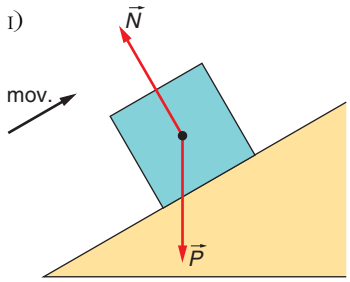
d) I) Si no existe rozamiento, el cuerpo solo interacciona con la Tierra, a distancia, y por contacto con el plano inclinado; luego, las únicas fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso y la normal:

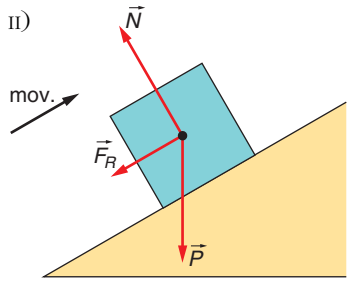
$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N}$$

II) Si existe rozamiento, además de las anteriores, también está la fuerza de rozamiento; por tanto:

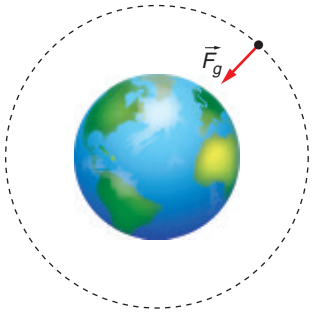
$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R$$

Estos dos casos se representan en las siguientes figuras:





e) La única fuerza que actúa sobre la nave en órbita es la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre ella, que está dirigida radialmente hacia el centro de la Tierra.



2. Calcula el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna y en la de Marte.

Datos: $M_L = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ **kg;** $R_L = 1\,738$ **km**
$M_M = 6{,}42 \cdot 10^{23}$ **kg;** $R_M = 3\,397$ **km**

En la Luna, pasando los datos a unidades del S.I., tenemos:

$$M_L = 7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{kg} \quad ; \quad R_L = 1{,}738 \cdot 10^{6}\ \text{m}$$

Luego, la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna vale:

$$g_L = G \cdot \frac{M_L}{R_L^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}}{(1{,}738 \cdot 10^{6})^2} = 1{,}62\ \text{m/s}^2$$

Los datos de Marte, en el S.I., son:

$$M_M = 6{,}42 \cdot 10^{23}\ \text{kg} \quad ; \quad R_M = 3{,}397 \cdot 10^{6}\ \text{m}$$

Por tanto, la aceleración de la gravedad en la superficie de Marte vale:

$$g_M = G \cdot \frac{M_M}{R_M^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}42 \cdot 10^{23}}{(3{,}397 \cdot 10^6)^2} = 3{,}71 \text{ m/s}^2$$

3. Si el peso de una persona en la superficie de la Tierra es de 637 N, ¿cuál es su peso en la Luna? ¿Y en Marte?

En la superficie de la Tierra:

$$g = g_T = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{(6{,}378 \cdot 10^6)^2} = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

Y como el peso es $P = m \cdot g = 637$ N, entonces $m = P/g = 65$ kg; utilizando los datos de la actividad 1, tenemos:

- Peso en la Luna:

$$P_L = m \cdot g_L = 65 \cdot 1{,}62 = 105{,}3 \text{ N}$$

- Peso en Marte:

$$P_M = m \cdot g_M = 65 \cdot 3{,}71 = 241{,}15 \text{ N}$$

4. Calcula la componente tangencial (paralela al plano) y normal (perpendicular) del peso de un cuerpo de 25 kg en un plano inclinado cuando la inclinación vale: a) 30°. b) 45°. c) 60°.

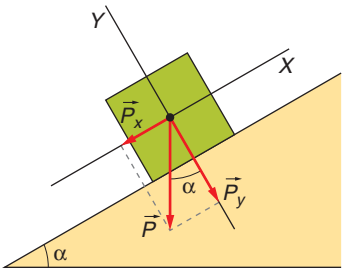
La componente tangencial del peso vale:

$$P_t = P_x = P \cdot sen\ \alpha = m \cdot g \cdot sen\ \alpha$$

Y la componente normal:

$$P_n = P_y = P \cdot cos\ \alpha = m \cdot g \cdot cos\ \alpha$$

Analicemos los casos propuestos:



a) Si la inclinación es de 30°:

$$P_t = P_x = m \cdot g \cdot sen\ 30° = 25 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 = 122{,}5 \text{ N}$$

$$P_n = P_y = m \cdot g \cdot cos\ 30° = 25 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}866 = 212{,}17 \text{ N}$$

b) Si la inclinación es de 45°:

$$P_t = P_x = m \cdot g \cdot sen\ 45° = 25 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}71 = 173{,}95 \text{ N}$$

$$P_n = P_y = m \cdot g \cdot cos\ 45° = 25 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}71 = 173{,}95 \text{ N}$$

c) Si la inclinación es de 60º:

$$P_t = P_x = m \cdot g \cdot sen\ 60º = 25 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}866 = 212{,}17 \text{ N}$$

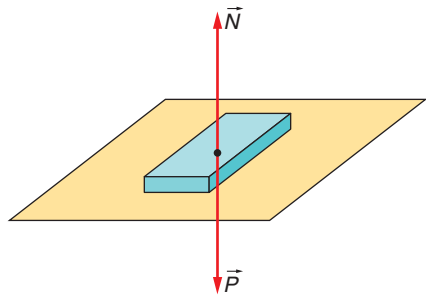
$$P_n = P_y = m \cdot g \cdot cos\ 60º = 25 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 = 122{,}5 \text{ N}$$

5. Si el campo gravitatorio en un punto vale 25 N/kg, calcula la fuerza gravitatoria que actúa sobre una masa de 12 kg colocada en ese punto.

La fuerza gravitatoria es igual al producto de la masa colocada por el valor del campo gravitatorio en ese punto:

$$P = m \cdot g = 12 \cdot 25 = 300 \text{ N}$$

6. Un libro de 0,5 kg de masa está encima de la mesa. Calcula el módulo, la dirección y el sentido de cada una de las fuerzas que actúan sobre el libro.



El libro interacciona con la Tierra a distancia, y con la mesa, por contacto. La fuerza que hace la Tierra sobre él es su peso, $\vec{P}$, y la fuerza que hace la mesa sobre él es la reacción normal o simplemente la normal, $\vec{N}$.

Como el libro está en equilibrio:

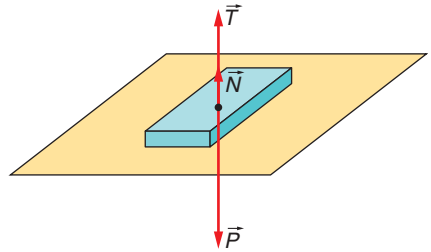
$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} = 0 \rightarrow \vec{N} = -\vec{P}$$

El peso está dirigido verticalmente hacia abajo, y su módulo es:

$$P = m \cdot g = 0{,}5 \cdot 9{,}8 = 4{,}9 \text{ N}$$

La normal, al ser la opuesta del peso, tiene dirección vertical y sentido hacia arriba, y su módulo es $N = P = 4{,}9$ N.

7. Calcula el valor de la normal si tiramos del libro de la actividad anterior verticalmente hacia arriba con una cuerda cuya tensión es de 3 N. ¿Cuál es el valor máximo de la tensión que mantiene al libro encima de la mesa?



Sobre el libro, que está en reposo encima de la mesa, actúan el peso, $\vec{P}$, la normal, $\vec{N}$, y la tensión, $\vec{T}$, de la cuerda.

Como está en reposo, la fuerza resultante vale cero:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} = 0$$

Tomando el semieje Y positivo hacia arriba, tenemos:

$$T + N - P = 0 \rightarrow N = P - T = 4{,}9 - 3 = 1{,}9 \text{ N}$$

Si la tensión aumenta, el valor de la normal disminuye, pero si la tensión es mayor que el peso, el cuerpo se eleva, deja de estar en contacto con la mesa y no existe normal; por tanto, el máximo valor de la tensión que hace que el libro esté encima de la mesa es $T = P$, con lo cual la normal es nula:

$$T_{máx} = 4{,}9 \text{ N}$$

8. La longitud normal de un muelle que cuelga del techo es 10 cm. Cuando colgamos de él una masa de 10 kg, su longitud es de 12 cm. ¿Cuál será su longitud si colgamos una masa de 8 kg?

Sobre el cuerpo actúan su peso, $\vec{P}$, verticalmente hacia abajo, y la fuerza elástica o recuperadora del muelle, $\vec{F}$, verticalmente hacia arriba, y como está en reposo:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_e = 0$$

Tomando el semieje Y positivo vertical hacia arriba, tenemos:

$$F_e - P = 0 \rightarrow k \cdot x - m \cdot g = 0 \rightarrow k = \frac{m \cdot g}{x}$$

Al colgar la masa de 10 kg, el muelle está estirado:

$$x = l - l_0 = 12 - 10 = 2 \text{ cm} = 0{,}02 \text{ m}$$

Luego:

$$k = \frac{m \cdot g}{x} = \frac{10 \cdot 9{,}8}{0{,}02} = 4900 \text{ N/m}$$

Cuando colgamos el cuerpo de 8 kg, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son las mismas que en el caso anterior, pero con otros valores. Por tanto:

$$k \cdot x = m \cdot g \rightarrow x = \frac{m \cdot g}{k} = \frac{8 \cdot 9{,}8}{4900} = 0{,}016 \text{ m} = 1{,}6 \text{ cm}$$

Luego, cuando colgamos el cuerpo de 8 kg, la longitud del muelle es:

$$l = l_0 + x = 11{,}6 \text{ cm}$$

9. Si tiramos horizontalmente con una cuerda de un bloque de madera de 3 kg, este se desliza sobre una mesa horizontal con velocidad constante. Si el coeficiente de rozamiento vale 0,2, calcula el valor de la fuerza de rozamiento, el de la normal y el de la tensión de la cuerda.

Sobre el bloque actúan el peso, la normal, la tensión de la cuerda y la fuerza de rozamiento; luego:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_R$$

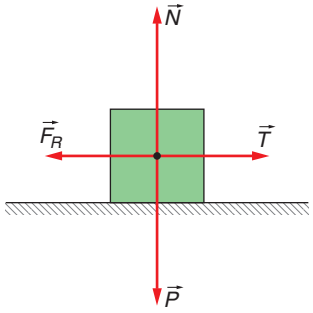
Como el bloque se mueve con velocidad constante:

$$\vec{v} = \text{cte} \rightarrow \Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_R = 0$$

Tomando el semieje X positivo en el sentido de la velocidad y el semieje Y positivo vertical hacia arriba, tenemos:

En el eje X:

$$T - F_R = 0 \rightarrow T = F_R = \mu \cdot N$$



En el eje Y:

$$N - P = 0 \rightarrow N = P = m \cdot g$$

El peso vale:

$$P = m \cdot g = 3 \cdot 9{,}8 = 29{,}4 \text{ N}$$

Luego, la normal es:

$$N = P = 29{,}4 \text{ N}$$

Y la fuerza de rozamiento vale:

$$F_R = \mu \cdot N = 0{,}2 \cdot 29{,}4 = 5{,}88 \text{ N}$$

La tensión de la cuerda es, por tanto:

$$T = F_R = 5{,}88 \text{ N}$$

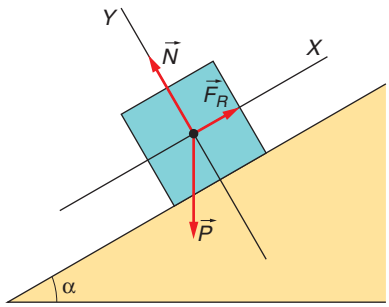
10. Un cuerpo de 1,5 kg situado en un plano que vamos inclinando progresivamente permanece en reposo hasta que el plano forma un ángulo de 35° con la horizontal. Calcula: a) El coeficiente de rozamiento estático. b) La fuerza de rozamiento cuando la inclinación es de 30°.

Sobre el cuerpo actúan el peso, $\vec{P}$, la normal, $\vec{N}$, y la fuerza de rozamiento, $\vec{F}_R$; luego:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R$$

Tomando el semieje X positivo paralelo al plano inclinado y hacia abajo, las componentes de cada fuerza son:

$$\vec{P} = (m \cdot g \cdot sen\ \alpha, -m \cdot g \cdot cos\ \alpha) \quad ; \quad \vec{N} = (0, N) \quad ; \quad \vec{F}_R = (-F_R, 0)$$



Como el cuerpo permanece en reposo, tenemos que: $\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R = 0$. Al descomponer esta expresión para los ejes X e Y, tenemos, respectivamente:

$$P_t - F_R = 0 \rightarrow F_R = P_t = m \cdot g \cdot sen\ \alpha$$

$$N - P_n = 0 \rightarrow N = P_n = m \cdot g \cdot cos\ \alpha$$

Mientras el cuerpo permanece en reposo, la fuerza de rozamiento, F_R, coincide con la componente tangencial del peso, P_t, y cuando empieza a moverse alcanza su valor máximo, $F_R = \mu \cdot N$; luego, cuando la inclinación es de 35°, tenemos:

$$F_R = P_t = m \cdot g \cdot sen\ \alpha \quad ; \quad F_R = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g \cdot cos\ \alpha$$

$$P_t = \mu \cdot N = m \cdot g \cdot sen\ \alpha = \mu \cdot m \cdot g \cdot cos\ \alpha \rightarrow \mu = tg\ \alpha$$

El coeficiente de rozamiento vale $\mu = tg\ 35° = 0{,}7$.

Cuando el ángulo de inclinación es de 30°, la fuerza de rozamiento no alcanza aún su máximo valor y coincide con la componente tangencial del peso:

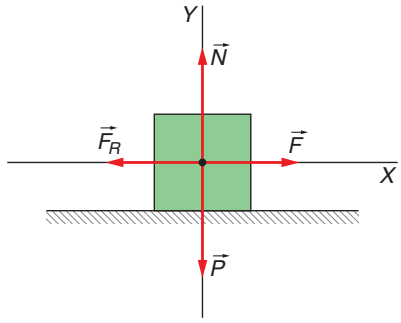
$$F_R = P_t = m \cdot g \cdot sen\ 30° = 1{,}5 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 = 7{,}35\ \text{N}$$

11. Para empezar a mover un cuerpo de 5 kg sobre una superficie horizontal, es necesario aplicarle una fuerza horizontal de 24,5 N, y para moverlo con velocidad constante se necesitan 19,6 N. Calcula los coeficientes de rozamiento estático y dinámico.

Sobre el cuerpo actúan el peso, la normal, la fuerza de rozamiento y la fuerza horizontal que hacemos sobre él; luego:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R + \vec{F}$$

Tomando el semieje X positivo en el sentido de la fuerza aplicada y el semieje Y vertical hacia arriba, tenemos las siguientes ecuaciones:



$$F - F_R = 0 \rightarrow F = F_R$$

$$N - P = 0 \rightarrow N = P = m \cdot g = 5 \cdot 9{,}8 = 49 \text{ N}$$

El cuerpo está en reposo y para empezar a moverlo es necesario vencer la fuerza de rozamiento estático, que es igual al coeficiente de rozamiento estático multiplicado por la normal; luego:

$$F = F_{R,e} = \mu_e \cdot N \rightarrow \mu_e = \frac{F}{N} = \frac{24{,}5}{49} = 0{,}5$$

El coeficiente de rozamiento estático vale 0,5.

Cuando el cuerpo se mueve con velocidad constante:

$$F = F_{R,d} = \mu_d \cdot N \rightarrow \mu_d = \frac{F}{N} = \frac{19{,}6}{49} = 0{,}4$$

El coeficiente de rozamiento dinámico vale 0,4.

12. La fuerza resultante sobre un cuerpo de 4 kg, inicialmente en reposo, es constante y de valor 20 N. Describe el movimiento del cuerpo y calcula: a) Su aceleración. b) Su velocidad cuando ha recorrido 10 m.

Si la fuerza resultante es constante, en módulo, dirección y sentido, y el cuerpo está inicialmente en reposo, entonces realiza un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, en la dirección de la fuerza aplicada. De acuerdo con la segunda ley de Newton, tenemos:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \rightarrow F = m \cdot a \rightarrow 20 = 4 \cdot a \rightarrow a = 5 \text{ m/s}^2$$

De las ecuaciones del m.r.u.a. deducimos:

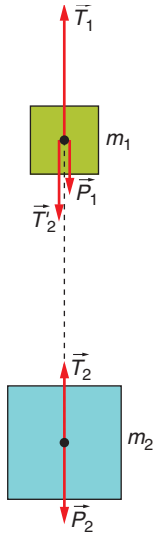
$$\left.\begin{array}{l} v = a \cdot t \\ s = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{array}\right\} v^2 = 2 \cdot a \cdot s \rightarrow v = \sqrt{2 \cdot a \cdot s} \rightarrow v = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 10} = 10 \text{ m/s}$$

13. Si, para el ejercicio resuelto 4, m_1 = 8 kg y m_2 = 12 kg, calcula las tensiones de las cuerdas para que ambos cuerpos: a) Suban con velocidad constante. b) Suban con una aceleración de 2 m/s². c) Bajen con una aceleración de 2 m/s².

El diagrama de fuerzas para ambos cuerpos es el de la figura de la página siguiente.

Por tanto, tenemos, para los cuerpos 1 (izda.) y 2:

$$T_1 - T_2' - m_1 \cdot g = m_1 \cdot a \quad ; \quad T_2 - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a$$



Sumando ambas ecuaciones miembro a miembro y teniendo en cuenta que $T_2 = T_2'$, tenemos:

$$T_1 - m_1 \cdot g - m_2 \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a$$

a) Si los cuerpos suben con velocidad constante, $a = 0$; por tanto:

$$T_1 = (m_1 + m_2) \cdot g = (8 + 12) \cdot 9{,}8 = 196 \text{ N}$$

$$T_2 = m_2 \cdot g = 12 \cdot 9{,}8 = 117{,}6 \text{ N}$$

b) Si los cuerpos suben con una aceleración, $a = 2$ m/s²; entonces:

$$T_1 = (m_1 + m_2) \cdot g + (m_1 + m_2) \cdot a$$

$$T_1 = 20 \cdot 9{,}8 + 20 \cdot 2 = 196 + 40 = 236 \text{ N}$$

$$T_2 = m_2 \cdot g + m_2 \cdot a$$

$$T_2 = 12 \cdot 9{,}8 + 12 \cdot 2 = 117{,}6 + 24 = 141{,}6 \text{ N}$$

c) Si los cuerpos bajan con una aceleración de 2 m/s², entonces, tomando el semieje Y positivo hacia abajo, tenemos:

Para el cuerpo 1:

$$m_1 \cdot g + T_2' - T_1 = m_1 \cdot a$$

Para el cuerpo 2:

$$m_2 \cdot g - T_2 = m_2 \cdot a$$

Luego:

$$(m_1 + m_2) \cdot g - T_1 = (m_1 + m_2) \cdot a$$

Por tanto:

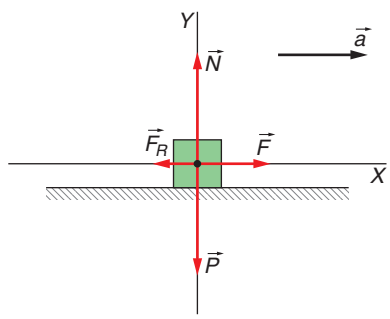
$$T_1 = (m_1 + m_2) \cdot g - (m_1 + m_2) \cdot a = 196 - 40 = 156 \text{ N}$$

$$T_2 = m_2 \cdot g - m_2 \cdot a = 117{,}6 - 24 = 93{,}6 \text{ N}$$

14. Tiramos horizontalmente de un cuerpo de 5 kg situado encima de una mesa con una fuerza de 32 N. Si μ = 0,4, calcula: a) El módulo de cada una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. b) La aceleración del cuerpo.

Sobre el cuerpo actúan el peso, la normal, la fuerza de rozamiento y la fuerza con que tiramos de él:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$



Al descomponer para los ejes X e Y:

$$F - F_R = m \cdot a$$

$$N - P = 0$$

Por tanto:

$$N = P = m \cdot g = 5 \cdot 9{,}8 = 49 \text{ N}$$

$$F_R = \mu \cdot N = 0{,}4 \cdot 49 = 19{,}6 \text{ N}$$

a) Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo valen:

$$P = 49 \text{ N} \quad ; \quad N = 49 \text{ N} \quad ; \quad F_R = 19{,}6 \text{ N} \quad ; \quad F = 32 \text{ N}$$

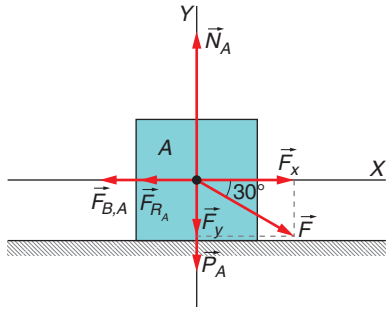
b) La aceleración del cuerpo vale:

$$32 - 19{,}6 = 5 \cdot a \rightarrow a = 2{,}48 \text{ m/s}^2$$

15. Si en el ejercicio resuelto 5 tenemos: $\alpha = 30°$, $m_A = 20$ kg, $m_B = 30$ kg, $\mu_A = 0{,}4$, $\mu_B = 0{,}5$ y $F = 402$ N, calcula: a) La aceleración de ambos cuerpos. b) La fuerza de rozamiento de cada uno. c) La fuerza que hace un cuerpo sobre el otro.

Los cuerpos se mueven juntos, luego llevan la misma velocidad y la misma aceleración:

$$a_A = a_B = a$$



Sobre el **cuerpo *A*** actúan las siguientes fuerzas: el peso, la normal, la fuerza de rozamiento, la fuerza que aplicamos sobre él y la fuerza que hace *B* sobre *A;* luego:

$$\Sigma\vec{F}_A = \vec{P}_A + \vec{N}_A + \vec{F}_{R_A} + \vec{F} + \vec{F}_{B,A} = m_A \cdot \vec{a}$$

En el eje *X*: $F \cdot \cos\alpha - F_{R_A} - F_{B,A} = m_A \cdot a$.

En el eje *Y*: $N_A - P_A - F \cdot \operatorname{sen}\alpha = 0$.

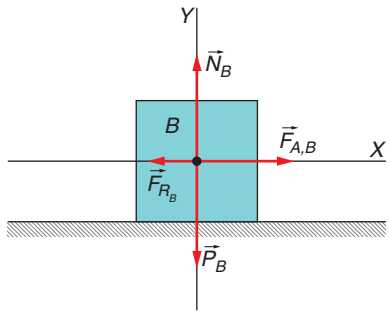
Luego:

$$N_A = m_A \cdot g + F \cdot \operatorname{sen}\alpha = 20 \cdot 9{,}8 + 402 \cdot 0{,}5 = 196 + 201 = 397 \text{ N}$$

$$F_{R_A} = \mu_A \cdot N_A = 0{,}4 \cdot 397 = 158{,}8 \text{ N}$$

$$F \cdot \cos\alpha - F_{R_A} - F_{B,A} = 348{,}1 - 158{,}8 - F_{B,A} = 20 \cdot a \rightarrow 189{,}3 - F_{B,A} = 20\,a \quad [1]$$

Sobre el **cuerpo *B*** actúan el peso, la normal, la fuerza de rozamiento y la fuerza que ejerce *A* sobre *B,* pero no actúa la fuerza $\vec{F}$ aplicada a *A,* luego:



$$\Sigma\vec{F}_B = \vec{P}_B + \vec{N}_B + \vec{F}_{R_B} + \vec{F}_{A,B} = m_B \cdot \vec{a}$$

En el eje *X*: $F_{A,B} - F_{R_B} = m_B \cdot a$.

En el eje *Y*: $N_B - P_B = 0$.

Luego:

$$N_B = P_B = m_B \cdot g = 30 \cdot 9{,}8 = 294 \text{ N}$$

$$F_{R_B} = \mu_B \cdot N_B = 0{,}5 \cdot 294 = 147 \text{ N}$$

Por tanto:

$$F_{A,B} - F_{R_B} = F_{A,B} - 147 = 30 \cdot a \qquad [2]$$

Sumando las ecuaciones [1] y [2] y teniendo en cuenta que $F_{B,A} = F_{A,B}$, por ser los módulos de las fuerzas de la interacción entre *A* y *B,* tenemos:

$$189{,}3 - 147 = (20 + 30) \cdot a \rightarrow a = 0{,}846 \text{ m/s}^2$$

En resumen:

a) La aceleración de ambos cuerpos vale 0,846 m/s².

b) La fuerza de rozamiento del cuerpo *A* vale 158,8 N y la de *B* vale 147 N.

c) La fuerza que ejerce *A* sobre *B* vale:

$$\vec{F}_{A,B} = \vec{F}_{R_B} + m_B \cdot \vec{a} = 147 + 30 \cdot 0{,}846 = 172{,}38 \text{ N}$$

Y la fuerza que hace *B* sobre *A*:

$$F_{B,A} = 189{,}3 - 20 \cdot 0{,}846 = 172{,}38 \text{ N}$$

Ambos valores coinciden, como era de esperar.

16. Un cuerpo de 8 kg se desliza por un plano inclinado 53° con una aceleración de 2,5 m/s². Calcula: a) El coeficiente de rozamiento. b) La altura que desciende en 2 s si parte del reposo. c) La variación del momento lineal del cuerpo en ese intervalo de tiempo.

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso, la normal y la fuerza de rozamiento; luego:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R = m_B \cdot \vec{a}$$

Como el cuerpo desciende, tomamos el eje *X* paralelo al plano inclinado y orientamos el semieje positivo hacia abajo, y el eje *Y,* perpendicular a él con el semieje positivo hacia el exterior del plano; luego, tenemos, para los ejes *X* e *Y*:

$$P_x - F_R = m \cdot a \rightarrow m \cdot g \cdot sen\,\alpha - \mu \cdot N = m \cdot a$$

$$N - P_y = 0 \rightarrow N = m \cdot g \cdot cos\,\alpha$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera, obtenemos:

$$m \cdot g \cdot sen\,\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot cos\,\alpha = m \cdot a \rightarrow a = g \cdot sen\,\alpha - \mu \cdot g \cdot cos\,\alpha$$

a) El coeficiente de rozamiento vale:

$$\mu = \frac{g \cdot sen\,\alpha - a}{g \cdot cos\,\alpha} = \frac{9{,}8 \cdot 0{,}8 - 2{,}5}{9{,}8 \cdot 0{,}6} = 0{,}9$$

b) El cuerpo desciende con un m.r.u.a.; luego:

$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 0{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 2^2 = 5 \text{ m}$$

y como $h = x \cdot sen\,\alpha$, entonces $h = 5 \cdot 0{,}8 = 4$ m; es decir, el cuerpo ha descendido una altura de 4 m.

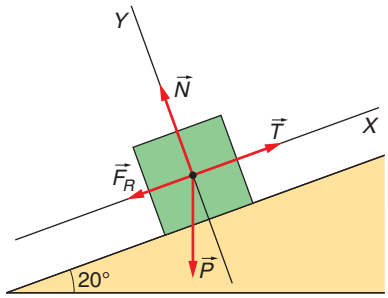
c) La velocidad del cuerpo a los 2 s y la variación del momento lineal son:

$$v = a \cdot t = 2{,}5 \cdot 2 = 5 \text{ m/s} \rightarrow \Delta p = p - p_0 = p \rightarrow \Delta p = m \cdot v = 8 \cdot 5 = 40 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

17. Calcula la tensión del cable de un coche-grúa cuando sube un automóvil averiado de 1 500 kg por una rampa inclinada 20° con velocidad constante, si el coeficiente de rozamiento vale 0,8.

Las fuerzas que actúan sobre el automóvil son el peso, la normal, la tensión del cable y la fuerza de rozamiento, y como sube con velocidad constante, su aceleración es nula; luego:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_R = 0$$



Tomando el semieje X positivo paralelo a la rampa y hacia arriba, y el semieje Y positivo perpendicular a la rampa y hacia fuera, de acuerdo con el diagrama de fuerzas de la figura, tenemos, para los ejes X e Y:

$$T - P_x - F_R = 0 \rightarrow T - m \cdot g \cdot sen\ \alpha - \mu \cdot N = 0 \rightarrow T = m \cdot g \cdot sen\ \alpha + \mu \cdot N$$

$$N - P_y = 0 \rightarrow N - m \cdot g \cdot cos\ \alpha = 0 \rightarrow N = m \cdot g \cdot cos\ \alpha$$

Luego, la tensión del cable grúa vale:

$$T = m \cdot g \cdot sen\ \alpha + \mu \cdot m \cdot g \cdot cos\ \alpha$$

$$T = 1\,500 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}34 + 0{,}8 \cdot 1\,500 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}94 = 16\,052{,}4\ \text{N}$$

18. Se lanza un cuerpo de 1 kg con una velocidad inicial de 14,7 m/s y sube deslizándose por un plano inclinado 37°. Si el coeficiente de rozamiento vale 0,2, calcula: a) La aceleración de subida y la de bajada. b) La máxima altura que alcanza. c) El tiempo que tarda en volver al punto de partida. d) La velocidad que llevará cuando llegue al punto de partida.

Tanto en la subida como en la bajada, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso, la normal y la fuerza de rozamiento. La normal y el peso no cambian en ambos trayectos, pero como la fuerza de rozamiento siempre se opone al movimiento, tiene distinto sentido en la subida que en la bajada.

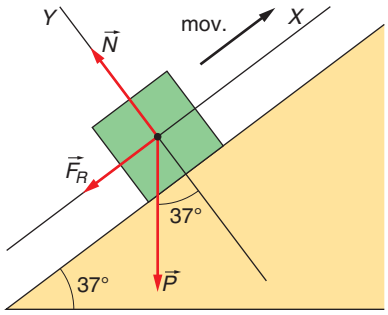
En ambas etapas se cumple que:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R = m \cdot \vec{a}$$

a) En la subida tomamos el eje X paralelo al plano inclinado con el semieje X positivo hacia arriba; luego, el diagrama de fuerzas es el de la figura adjunta, y las ecuaciones de las componentes de las fuerzas que actúan en los ejes X e Y son:

$$-P_x - F_R = m \cdot a \rightarrow -m \cdot g \cdot sen\ \alpha - \mu \cdot N = m \cdot a$$

$$Y\text{: } N - P_y = 0 \rightarrow N = m \cdot g \cdot cos\ \alpha$$



Luego:

$$-m \cdot g \cdot sen\ \alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot cos\ \alpha = m \cdot a$$

$$a = -g \cdot (sen\ \alpha + \mu \cdot cos\ \alpha) = -9{,}8 \cdot (0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}8) = -7{,}45\ \text{m/s}^2$$

El movimiento de subida es decelerado, pues la aceleración vale $a = -7{,}45$ m/s².

b) Cuando el cuerpo se detiene, $v = 0$; luego:

$$v = 0 = v_0 + a \cdot t \rightarrow t = \frac{-v_0}{a} = \frac{-14{,}7}{-7{,}45} = 1{,}97\ \text{s}$$

La distancia recorrida en ese tiempo es:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot x \rightarrow x = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot a}$$

$$x = \frac{-14{,}7^2}{2 \cdot (-7{,}45)} = 14{,}5\ \text{m}$$

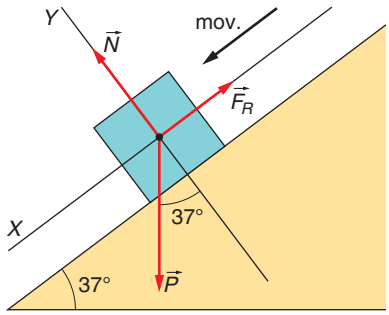
Y la altura a la que ha ascendido resulta:

$$h = x \cdot sen\ \alpha = 14{,}5 \cdot sen\ 37° = 8{,}7\ \text{m}$$

c) En la bajada tomamos el semieje X positivo hacia abajo y podemos escribir, entonces, las siguientes expresiones:

$$P_x - F_R = m \cdot a \rightarrow m \cdot g \cdot sen\ \alpha - \mu \cdot N = m \cdot a$$

$$N - P_y = 0 \rightarrow N = m \cdot g \cdot cos\ \alpha$$



Luego:

$$m \cdot g \cdot sen\ \alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot cos\ \alpha = m \cdot a$$

$$a = g \cdot (sen\ \alpha - \mu \cdot cos\ \alpha) = 9{,}8 \cdot (0{,}6 - 0{,}2 \cdot 0{,}8) = 4{,}31\ \text{m/s}^2$$

El movimiento de bajada es acelerado, y la aceleración vale $a = 4{,}31$ m/s².

Con esta aceleración, el cuerpo realiza el trayecto de regreso en un tiempo:

$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot x}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 14{,}5}{4{,}31}} = 2{,}6\ \text{s}$$

Luego, el tiempo que tarda en volver al punto de partida es:

$$t = t_{subida} + t_{bajada} = 1{,}97 + 2{,}6 = 4{,}57\ \text{s}$$

d) Su velocidad cuando vuelve al punto de partida es:

$$v = a \cdot t = 4{,}31 \cdot 2{,}6 = 11{,}2\ \text{m/s}$$

19. Si el cuerpo del ejercicio resuelto 7 está inicialmente en reposo y no aplicamos la fuerza $\vec{F}$, ¿se mueve el cuerpo? Justifica la respuesta. ¿Cuánto vale la fuerza de rozamiento?

Si no aplicamos la fuerza $\vec{F}$, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso, la normal y la fuerza de rozamiento. La fuerza resultante vale, en este caso:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R = m_B \cdot \vec{a}$$

Dicha expresión, descompuesta en los ejes X e Y, es:

$$P_x - F_R = m \cdot a \quad ; \quad N - P_y = 0$$

Para que el cuerpo se mueva, la componente tangencial del peso, P_x, ha de ser mayor que la fuerza de rozamiento, F_R, cuando esta alcanza su valor máximo: $\mu \cdot N$.

Calculemos el valor de los componentes de cada una de las fuerzas:

$$P_x = m \cdot g \cdot sen\ \alpha = 25 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}31 = 75{,}95 \text{ N}$$

$$N = P_y = m \cdot g \cdot cos\ \alpha = 25 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}95 = 232{,}75 \text{ N}$$

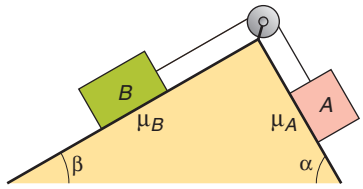
Luego, el valor de F_R para que el cuerpo inicie el movimiento vale:

$$F_R = \mu \cdot N = 0{,}5 \cdot 232{,}75 = 116{,}38 \text{ N}$$

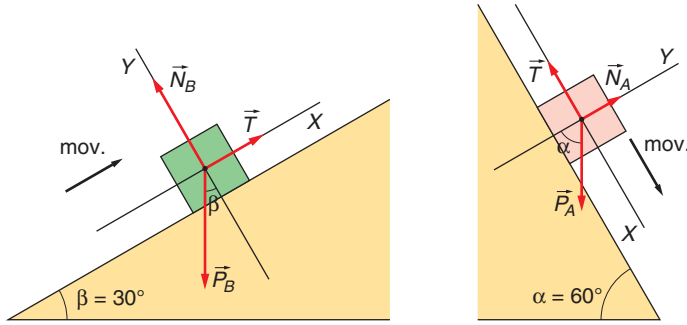
Como P_x es menor que el máximo valor de F_R, el cuerpo no se mueve.

20. Con los datos numéricos que se indican, calcula hacia dónde se moverán, y con qué aceleración, dos cuerpos situados como los del ejercicio resuelto 8 si: a) No existe rozamiento. b) El coeficiente de rozamiento para ambos cuerpos es 0,2.
Datos: m_A = 12 kg, m_B = 14 kg, α = 60°, β = 30°.

La siguiente figura representa la situación de los dos cuerpos:



a) Si no existe rozamiento, el diagrama de fuerzas de cada cuerpo es el que se muestra a continuación:



donde hemos situado los ejes suponiendo que el cuerpo A desciende (ya que se encuentra sobre el plano de mayor inclinación), y el B asciende. Si el movimiento fuese en sentido contrario, las fuerzas serían las mismas, pero orientaríamos los ejes X en sentido opuesto.

Aplicando la segunda ley de Newton a cada cuerpo y descomponiendo las fuerzas en sus componentes tangencial y normal al plano, obtenemos, para cada cuerpo:

– Cuerpo A:

$$P_{A,x} - T = m_A \cdot a \rightarrow m_A \cdot g \cdot sen\ \alpha - T = m_A \cdot a$$

$$N_A - P_{A,y} = 0 \rightarrow N_A = m_A \cdot g \cdot cos\ \alpha$$

– Cuerpo B:

$$T - P_{B,x} = m_B \cdot a \rightarrow T - m_B \cdot g \cdot sen\ \beta = m_B \cdot a$$

$$N_B - P_{B,y} = 0 \rightarrow N_B = m_B \cdot g \cdot cos\ \beta$$

Sumando las ecuaciones correspondientes al eje X de ambos cuerpos:

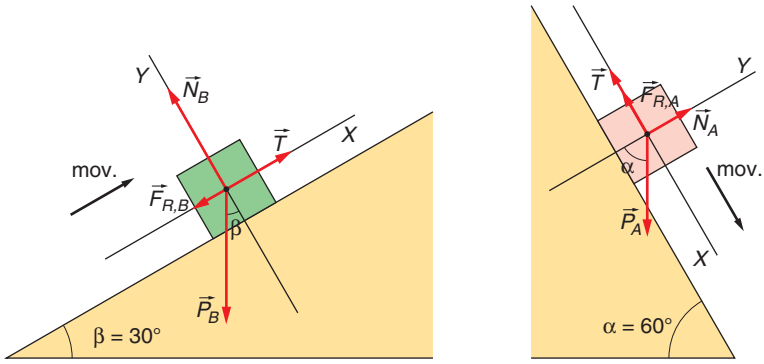
$$m_A \cdot g \cdot sen\ \alpha - m_B \cdot g \cdot sen\ \beta = (m_A + m_B) \cdot a$$

Sustituyendo los datos de que disponemos:

$$12 \cdot 9{,}8 \cdot sen\ 60° - 14 \cdot 9{,}8 \cdot sen\ 30° = (12 + 14) \cdot a$$

$$101{,}8 - 68{,}6 = 26 \cdot a \rightarrow a = 1{,}28\ \text{m/s}^2$$

b) Si consideramos el rozamiento entre las superficies en contacto, el diagrama de fuerzas depende del sentido del movimiento, ya que la fuerza de rozamiento siempre se opone a este. Si suponemos que A desciende tenemos, para cada cuerpo:



– Cuerpo A:

$$P_{A,x} - T - F_{R,A} = m_A \cdot a$$

$$N_A - P_{A,y} = 0 \rightarrow N_A = m_A \cdot g \cdot cos\ \alpha$$

Por tanto:

$$m_A \cdot g \cdot sen\ \alpha - T - \mu \cdot m_A \cdot g \cdot cos\ \alpha = m_A \cdot a \qquad [1]$$

– Cuerpo B:

$$T - P_{B,x} - F_{R,B} = m_B \cdot a$$

$$N_B - P_{B,y} = 0 \rightarrow N_B = m_B \cdot g \cdot cos\ \beta$$

Luego:

$$T - m_B \cdot g \cdot sen\ \beta - \mu \cdot m_B \cdot g \cdot cos\ \beta = m_B \cdot a \qquad [2]$$

Sumando [1] y [2], resulta:

$$g \cdot [m_A \cdot (sen\ \alpha - \mu \cdot cos\ \alpha) - m_B \cdot (sen\ \beta + \mu \cdot cos\ \beta)] = (m_A + m_B) \cdot a$$

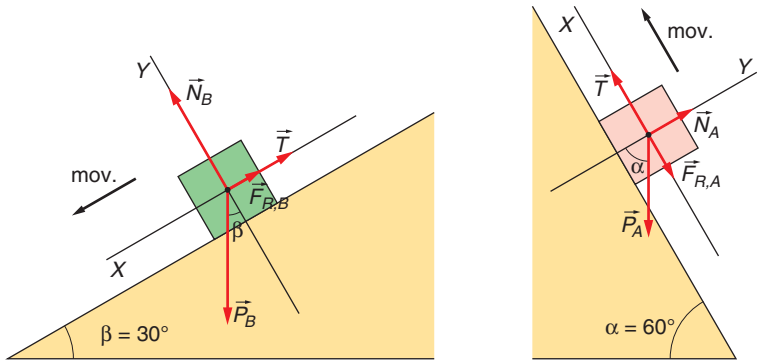
Y sustituyendo los datos:

$$9{,}8 \cdot [12 \cdot (sen\ 60° - 0{,}2 \cdot cos\ 60°) - 14 \cdot (sen\ 30° + 0{,}2 \cdot cos\ 30°)] = (12 + 14) \cdot a$$

$$-2{,}28 = 26 \cdot a \rightarrow a = -0{,}09\ \text{m/s}^2$$

Como los cuerpos parten del reposo, no tiene sentido físico que adquieran una aceleración negativa (de frenado). Por tanto, los cuerpos no se mueven en el sentido que habíamos supuesto; veamos si lo hacen en el opuesto.

Si suponemos que es *B* el que desciende, el diagrama de fuerzas es el siguiente:



Para el cuerpo *A* deducimos la siguiente expresión:

$$T - m_A \cdot g \cdot sen\ \alpha - \mu \cdot m_A \cdot g \cdot cos\ \alpha = m_A \cdot a$$

Y para el cuerpo *B*:

$$m_B \cdot g \cdot sen\ \beta - T - \mu \cdot m_B \cdot g \cdot cos\ \beta = m_B \cdot a$$

Por tanto:

$$g \cdot [-m_A \cdot (sen\ \alpha + \mu \cdot cos\ \alpha) + m_B \cdot (sen\ \beta - \mu \cdot cos\ \beta)] = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$9{,}8 \cdot [-12 \cdot (sen\ 60° + 0{,}2 \cdot cos\ 60°) + 14 \cdot (sen\ 30° - 0{,}2 \cdot cos\ 30°)] = (12 + 14) \cdot a$$

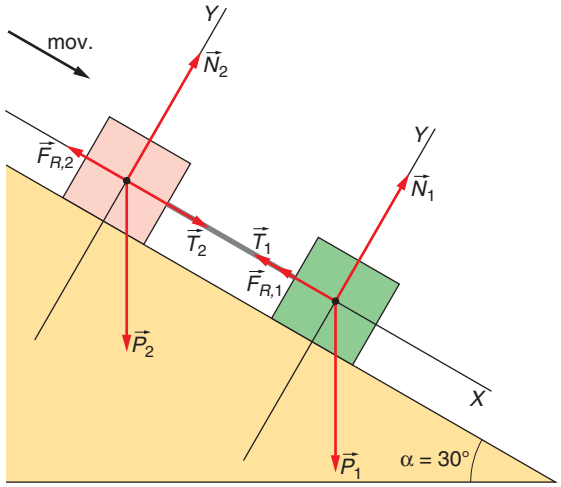
$$-68{,}8 = 26 \cdot a \rightarrow a = -2{,}65\ \text{m/s}^2$$

Como vemos, la aceleración es de nuevo negativa, lo que indica que este no es, tampoco, el sentido del movimiento. **Los cuerpos están, por tanto, en reposo.**

21. Dos bloques de 5 kg cada uno, unidos por una cuerda de masa despreciable e inextensible, se deslizan hacia abajo por un plano inclinado 30° respecto a la horizontal. El coeficiente de rozamiento con el plano del bloque que va delante es 0,4, y el del otro, 0,7. La cuerda se mantiene tensa durante el descenso. Calcula: a) La aceleración de cada bloque. b) La tensión de la cuerda.

El diagrama de fuerzas de los cuerpos es el representado en la figura adjunta, donde hemos situado el semieje *X* positivo paralelo al plano inclinado y hacia abajo.

Llamando 1 al que va delante y 2 al otro, y teniendo en cuenta que ambos cuerpos bajan enlazados, es decir, que tienen la misma aceleración, tenemos:



donde se cumple que $T = T_1 = T_2$.

– Para el cuerpo 1 tenemos, en los ejes X e Y:

$$P_{1,x} - T - F_{R,1} = m_1 \cdot a \rightarrow m_1 \cdot g \cdot sen\ \alpha - T - \mu_1 \cdot N_1 = m_1 \cdot a$$

$$N_1 - P_{1,y} = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = m_1 \cdot g \cdot cos\ \alpha$$

Luego:

$$m_1 \cdot g \cdot sen\ \alpha - T - \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot cos\ \alpha = m_1 \cdot a$$

– Y para el 2:

$$P_{2,x} + T - F_{R,2} = m_2 \cdot a \rightarrow m_2 \cdot g \cdot sen\ \alpha + T - \mu_2 \cdot N_2 = m_2 \cdot a$$

$$N_2 - P_{2,y} = 0 \rightarrow N_2 = m_2 \cdot g \cdot cos\ \alpha$$

Luego:

$$m_2 \cdot g \cdot sen\ \alpha + T - \mu_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot cos\ \alpha = m_2 \cdot a$$

Sumando las ecuaciones de ambos cuerpos, tenemos:

$$m_1 \cdot g \cdot sen\ \alpha - \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot cos\ \alpha + m_2 \cdot g \cdot sen\ \alpha - \mu_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot cos\ \alpha = (m_1 + m_2) \cdot a$$

$$5 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 - 0{,}4 \cdot 5 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}87 + 5 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 - 0{,}7 \cdot 5 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}87 = 2{,}1 = 10 \cdot a$$

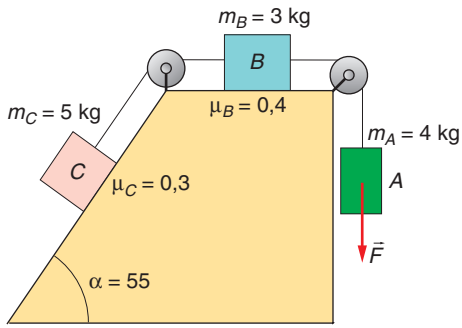
$$a = 0{,}21\ \text{m/s}^2$$

La tensión de la cuerda vale:

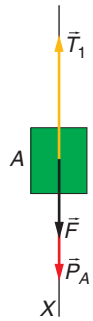
$$T = m_1 \cdot g \cdot sen\ \alpha - \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot cos\ \alpha - m_1 \cdot a = 24{,}5 - 17{,}05 - 1{,}05 = 6{,}4\ \text{N}$$

22. Calcula el valor de la fuerza $\vec{F}$ y de las tensiones de las cuerdas del ejercicio resuelto 9 para que el cuerpo *A* descienda con velocidad constante.

La siguiente figura representa la situación de los cuerpos:



Como los cuerpos están enlazados, el módulo de la velocidad es el mismo para todos los cuerpos; luego, la aceleración de cada cuerpo vale cero, y, por tanto, la resultante en cada cuerpo es nula.



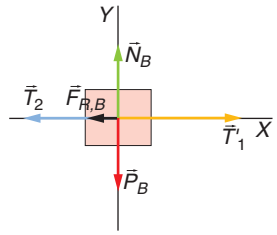
Cuerpo *A*: Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo A son su peso, P_A, la tensión de la cuerda 1, T_1, y la fuerza F aplicada a él. Como todas las fuerzas están en el eje vertical, tenemos:

$$F + P_A - T_1 = 0 \rightarrow F + m_A \cdot g - T_1 = 0 \qquad [1]$$

Cuerpo *B*: Las fuerzas que actúan sobre B son su peso, P_B, la normal, N_B, las tensiones de ambas cuerdas, T_1 y T_2, y la fuerza de rozamiento, $F_{R,B}$, como se aprecia en la figura. Al descomponerlas en los ejes X e Y, tenemos:

$$T_1 - F_{R,B} - T_2 = 0 \rightarrow T_1 - \mu_B \cdot N_B - T_2 = 0$$

$$N_B - m_B \cdot g = 0 \rightarrow N_B = m_B \cdot g$$



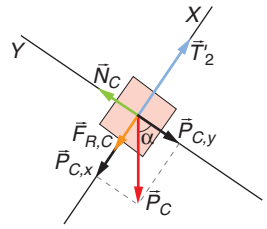
Luego:

$$T_1 - \mu_B \cdot m_B \cdot g - T_2 = 0 \qquad [2]$$

Cuerpo *C*: Las fuerzas que actúan sobre C son el peso, la normal, la fuerza de rozamiento y la tensión de la cuerda 2. Tomamos el semieje X positivo paralelo al plano y hacia arriba, con lo que tenemos las siguientes expresiones para los ejes X e Y:

$$T_2 - F_{R,C} - P_{C,x} = 0 \rightarrow T_2 - \mu_C \cdot N_C - m_C \cdot g \cdot sen\,\alpha = 0$$

$$N_C - P_{C,y} = 0 \rightarrow N_C = m_C \cdot g \cdot cos\,\alpha$$



Luego:

$$T_2 - \mu_C \cdot m_C \cdot g \cdot cos\,\alpha - m_C \cdot g \cdot sen\,\alpha = 0 \qquad [3]$$

Sumando las ecuaciones [1], [2] y [3], tenemos:

$$F + m_A \cdot g - T_1 + T_1 - \mu_B \cdot m_B \cdot g - T_2 + T_2 - \mu_C \cdot m_C \cdot g \cdot cos\,\alpha - m_C \cdot g \cdot sen\,\alpha = 0$$

De donde obtenemos:

$$F = \mu_B \cdot m_B \cdot g + \mu_C \cdot m_C \cdot g \cdot cos\,\alpha + m_C \cdot g \cdot sen\,\alpha - m_A \cdot g$$

$$F = 21{,}12 \text{ N} \quad ; \quad T_2 = 48{,}56 \text{ N} \quad ; \quad T_1 = 60{,}32 \text{ N}$$