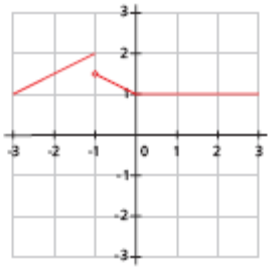
## PÁGINA 98

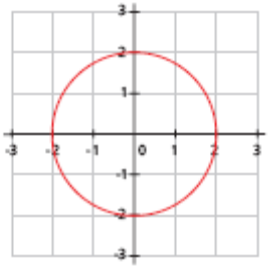
**ACTIVIDADES**

**1.** Dadas las siguientes gráficas, determina si corresponden a la gráfica de una función o no. Razona tu respuesta:

a)



b)



**2.** ¿La siguiente tabla puede representar una función? Razona tu respuesta.

| $x$ | –3 | –2 | –1 | 0 | 2 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | –16 | 12 | 12 | –4 | 5 | 8 |

SOLUCIONES

**1.**a) Sí corresponden a una función, definida a trozos.

b) No corresponde a la gráfica de una función porque existen valores de la variable independiente "x" que tienen asignados dos valores de la dependiente "y"

**2.** No puede porque para el valor de la variable independiente 2 hay varios valores de la dependiente.

## PÁGINA 99

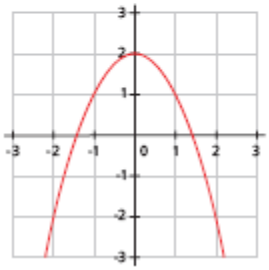
### ACTIVIDADES

**3.** Determina los puntos de corte con los ejes y elabora una tabla con siete valores para las siguientes funciones:

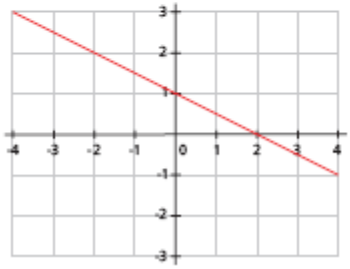
a) $f(x) = -2x + 3$ b) $g(x) = x^2 - 2x + 1$ c) $h(x) = x^2 - 2x$

**4.** Elabora una tabla para cada una de las siguientes gráficas:

a)



b)



SOLUCIONES

**3.** a) $f(x) = -2x + 3$

| x | y |
|---|---|
| 0 | 3 |
| $\frac{3}{2}$ | 0 |
| 1 | 1 |
| -1 | 5 |
| 2 | -1 |
| -2 | 7 |
| 3 | -3 |

b) $g(x) = x^2 - 2x + 1$

| x | y |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |
| -3 | 16 |
| -1 | 5 |
| 2 | 1 |
| -2 | 9 |
| 3 | 4 |

c) $h(x) = x^2 - 2x$

| x | y |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0, 2 | 0 |
| 1 | -1 |
| -1 | 3 |
| 2 | 0 |
| -2 | 8 |
| 3 | 3 |

Puntos de corte OX:

$0 = -2x + 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ $\quad 0 - (x-1)^2 \rightarrow x - 1$ $\quad 0 = x(x-2) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ $\quad (1,0)$ $\quad (0,0)$ $(2,0)$

Puntos de corte OY

$f(0) - 3$ $\quad g(0) - 1$ $\quad h(0) = 0$

OY: $(0,3)$ $\quad$ OY: $(0,1)$ $\quad$ OY: $(0,0)$

**4.** a) La gráfica representa una parábola con ecuación $y = -x^2 + 2$

| x | y |
|---|---|
| 0 | 2 |
| -2 | -2 |
| 2 | 2 |

b) Es una recta cuya ecuación es $y = -\frac{1}{2}x + 1$

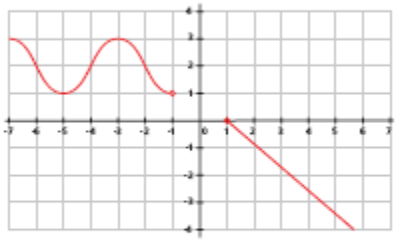
| x | y |
|---|---|
| 0 | 1 |
| -2 | 0 |
| 1 | 1/2 |

## PÁGINA 100

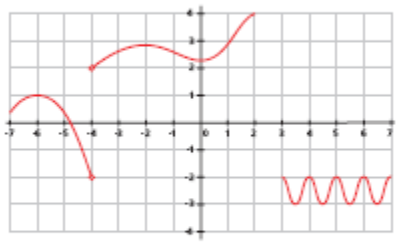
**ACTIVIDADES**

**5.** Determina el dominio y la imagen de las siguientes funciones:

a)



b)



**6.** Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ b) $g(x) = \dfrac{2x}{x-3}$ c) $h(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x-8}$

SOLUCIONES

**5.** a) $Dom(f) = [-7,-1) \cup (1,6]$ $Im(f) = [-4,-1) \cup [1,3]$

b) $Dom(f) = [-7,-4) \cup (-4,2] \cup [3,7]$ $Im(f) = [-3,1] \cup (2,4]$

**6.** a) Dado que "0" es el único valor de x que anula el denominador, el dominio es:

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

b) En este caso el denominador se anula para 3, luego el dominio es:

$Dom(g) = \mathbb{R} - \{3\}$

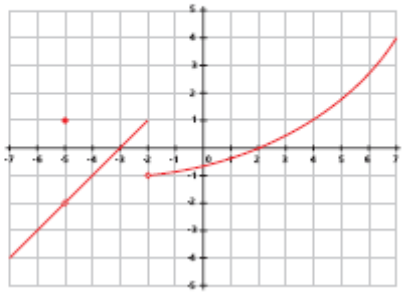
c) $x^2 - 2x - 8 = (x-4)\cdot(x-2) \Rightarrow$ El denominador se anula para 2 valores, luego el dominio es: $Dom(h) = \mathbb{R} - \{4,2\}$

## PÁGINA 101

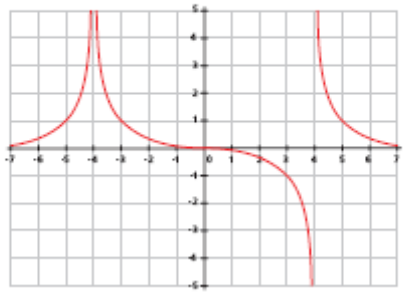
### ACTIVIDADES

**7.** Clasifica los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

a)



b)



SOLUCIONES

**7.** a) Hay dos valores para analizar, $x = -5$ y $x = -2$. En el primer caso es claramente una discontinuidad evitable, pues con tan sólo cambiar la imagen de $x - -5$ para que sea $y = -2$ la función sería continua. En el caso de $x = -2$ es una discontinuidad de salto finito .

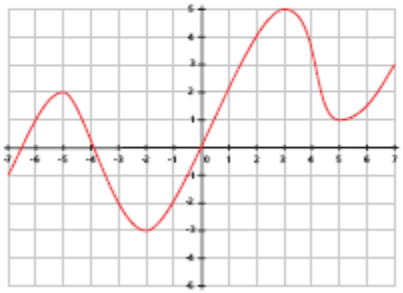
b) En $x = -4$ y de $x = 4$la función parece no estar definida por lo que en ambos casos hay una discontinuidad de salto infinito.

## PÁGINA 102

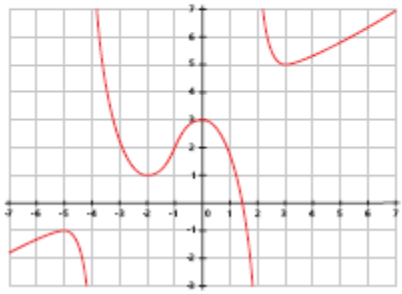
**ACTIVIDADES**

**8.** Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de las siguientes funciones:

a)



b)



SOLUCIONES

**8.** a) La función es creciente en $(-\infty, -5) \cup (-2,3) \cup (5, \infty)$

Máximos relativos: $(-5,2), (3,5)$

La función es decreciente en $(-5, -2) \cup (3,5)$

Mínimos relativos: $(-2, -3), (5,1)$

b) La función es creciente en $(-\infty, -5) \cup (-2,0) \cup (2,3)$

Máximos relativos: $(-5, -1), (0,3)$

La función es decreciente en $(-5, -2) \cup (0,3)$

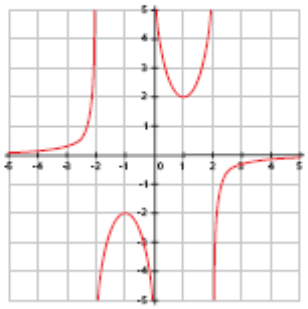
Mínimos relativos: $(-2,1), (3,5)$

## PÁGINA 103

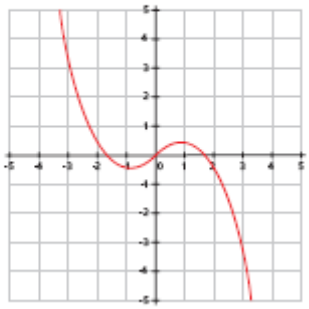
### ACTIVIDADES

**9.** Determina los intervalos de concavidad y convexidad de estas funciones:

a)



b)



SOLUCIONES

**9.** Para analizar la concavidad o convexidad sígase el criterio expuesto en la página 103 del libro de texto.

a) La función es convexa en: $(-\infty,-2)\cup(0,2)$

La función es cóncava en: $(-2,0)\cup(-2,\infty)$

b) La función es convexa en: $(-\infty,0)$

La función es cóncava en: $(0,\infty)$

## PÁGINA 104

**ACTIVIDADES**

**10.** Determina si las siguientes funciones son pares o impares:

a) $f(x) = x - 3$ c) $h(x) = \frac{1}{x}$ e) $j(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$

b) $g(x) = -x^3 + 3x$ d) $i(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$ f) $k(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

SOLUCIONES

**10.** a) $f(x) = x - 3 \Rightarrow f(-x) = -x - 3 \Rightarrow$ La función no tiene simetría par ni impar respecto al origen. Tiene simetría impar respecto al punto $(0, -3)$ , que puede comprobarse haciendo el cambio de variable $x \to x = t + 3$

b) $g(x) = -x^3 + 3x \Rightarrow g(-x) = +x^3 - 3x = -g(x) \Rightarrow$ La función tiene simetría impar respecto al origen

c) $h(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow h(-x) = -\frac{1}{x} = -h(x) \Rightarrow$ La función tiene simetría impar respecto al origen

d) $i(x) = \frac{2x}{x^2-4} \Rightarrow i(-x) = -\frac{2x}{x^2-4} = -i(x) \Rightarrow$ La función tiene simetría impar respecto al origen

e) $j(x) = \frac{2}{x^2-4} \Rightarrow j(-x) = \frac{2}{x^2-4} = j(x) \Rightarrow$ La función tiene simetría par respecto al origen

f) $k(x) = \frac{x^2+1}{x} \Rightarrow k(-x) = -\frac{x^2+1}{x} = -k(x) \Rightarrow$ La función tiene simetría impar respecto al origen

## PÁGINA 105

### ACTIVIDADES

**11.** Estudia la tendencia de la función $f(x) = \dfrac{2}{3x-1}$ cuando $x \to \dfrac{1}{3}^-$ y $x \to \dfrac{1}{3}^+$.

**12.** Estudia la tendencia de las siguientes funciones cuando $x \to \pm\infty$:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ b) $g(x) = \dfrac{2}{x+3}$ c) $h(x) = \dfrac{-3}{x-5}$

SOLUCIONES

**11.**

En el caso de $\frac{1}{3}^-$ aproximaremos con valores cercanos a $\frac{1}{3}$ por la izquierda, es decir, menores:

- $f(0'33) = -200$
- $f(0'333) = -2000$
- $f(0'33333) = -200000$
- …

La tendencia es hacia infinito negativo:

$$f(x) \xrightarrow[x \to \frac{1}{3}^-]{} -\infty$$

En el caso de $\frac{1}{3}$ por la derecha, aproximaremos con valores mayores:

- $f(0'34) = 100$
- $f(0'334) = 1000$
- $f(0'333334) = 1000000$
- …

La tendencia es hacia infinito positivo:

$$f(x) \xrightarrow[x \to \frac{1}{3}^+]{} +\infty$$

**12.** Para comprobar las tendencias se tomarán los valores $\pm 10^{10}$:

a) $f(10^{10}) = 10^{-10}$ luego $f \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

$f(-10^{10}) = -10^{-10}$ luego $f \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

b) $g(10^{10}) = \frac{2}{10^{10}+3} \approx \frac{2}{10^{10}} = 2 \cdot 10^{-10}$ luego $g \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

$g(-10^{10}) = \frac{2}{-10^{10}+3} \approx -2 \cdot 10^{-10}$ luego $g \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

c) $h(10^{10}) = \frac{-3}{10^{10}-5} \approx \frac{-3}{10^{10}} = -3 \cdot 10^{-10}$ luego $h \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

$h(-10^{10}) = \frac{-3}{-10^{10}-5} \approx \frac{-3}{-10^{10}} = 3 \cdot 10^{-10}$ luego $h \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

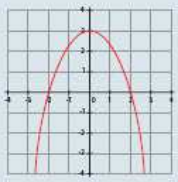
# PÁGINA 108

## → EJERCICIOS

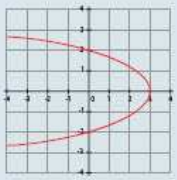
### Concepto de función

☐ **13.** Determina si las siguientes gráficas se corresponden con una función. Razona tu respuesta:

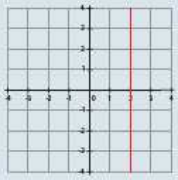
a)



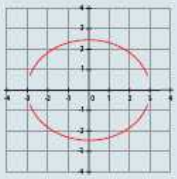
c)



b)



d)



☐ **14.** Calcula la imagen de los valores –2, –1, 0 y 3 de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -x^2 + 3x - 1$

b) $g(x) = \dfrac{x}{2x-1}$

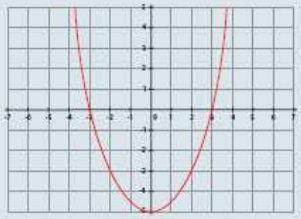
c) $h(x) = \sqrt{x+3}$

d) $i(x) = \dfrac{6}{1+\sqrt{x+1}}$

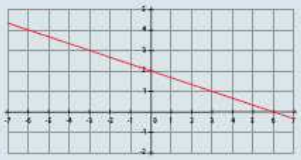
### Gráfica de una función

☐ **15.** Realiza una tabla con, al menos, cinco puntos de las siguientes gráficas:

a)



b)



☐ **16.** Realiza una tabla de valores para las siguientes funciones:

a) $f(x) = -2x + 1$

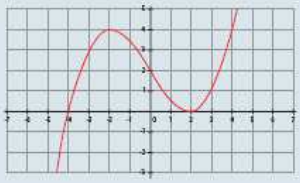
b) $g(x) = x^2 - x - 6$

c) $h(x) = x^3 - 2$

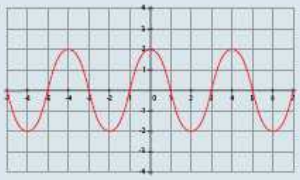
d) $i(x) = \dfrac{-2}{3x+1}$

☐ **17.** Realiza una tabla con, al menos, cinco puntos de las siguientes gráficas:

a)



b)



☐ **18.** Determina los puntos de corte con los ejes de los dos ejercicios anteriores.

☐ **19.** Determina los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -3x + 2$

b) $g(x) = x^2 - 5x - 6$

c) $h(x) = \dfrac{2}{x+3}$

d) $i(x) = \dfrac{2x-1}{x+5}$

### Dominio e imagen de una función

☐ **20.** Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x - 4$

b) $g(x) = 2x^2 - 3x$

c) $h(x) = -x^3 + 5x - 3$

d) $i(x) = 3$

◪ **21.** Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

b) $g(x) = \dfrac{-x}{2x-3}$

c) $h(x) = \dfrac{x-5}{x^2-5x+6}$

d) $i(x) = \dfrac{3-x}{2x^2-3x}$

◪ **22.** Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{2x-3}$

b) $g(x) = \sqrt{x^2+5x}$

c) $h(x) = \sqrt{x^2-9}$

d) $i(x) = 3x - \sqrt{x+1}$

**Concepto de función.**

**13.** a) Es función, pues se conserva la relación unívoca: un solo valor de la variable dependiente para cada valor de la variable independiente.

b), c), d) No son funciones pues existen valores de la variable independiente que tienen varios valores de la dependiente.

**14.**

a) $f(-2) = -11 \quad f(-1) = -5 \quad f(0) = -1 \quad f(3) = -1$

b) $g(-2) = \frac{2}{5} \quad g(-1) = \frac{1}{3} \quad g(0) = 0 \quad g(3) = \frac{3}{5}$

c) $h(-2) = 1 \quad h(-1) = \sqrt{2} \quad h(0) = \sqrt{3} \quad h(3) = \sqrt{6}$

d) $-2 \notin Dom(i) \Rightarrow i(-2) = \nexists \quad i(-1) = 6 \quad i(0) = 3 \quad i(3) = 2$

**Gráfica de una función.**

**15.**

a)

| x | y |
|---|---|
| 0 | -5 |
| 2 | -3 |
| -2 | -3 |
| -3 | 0 |
| 3 | 0 |

b)

| x | y |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 3 | 1 |
| 6 | 0 |
| -3 | 3 |
| -6 | 4 |

**16.**

a) $f(x) = -2x + 1$

| x | y |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | -1 |
| -1 | 3 |
| 2 | -3 |

b) $g(x) = x^2 - x - 6$

| x | y |
|---|---|
| 0 | -6 |
| 1 | -6 |
| 2 | -4 |
| -2 | 0 |

c) $h(x) = x^3 - 2$

| x | Y |
|---|---|
| 0 | -2 |
| 1 | -1 |
| -1 | -3 |
| 2 | 6 |

d) $i(x) = -\frac{2}{3x+1}$

| x | y |
|---|---|
| 0 | -2 |
| -1 | 1 |
| 1/3 | -1 |
| 1 | -1/2 |

**17.**

a)

| x | y |
|---|---|
| 4 | 0 |
| 0 | 2 |
| -2 | 4 |
| 2 | 0 |
| 3 | 1 |

b)

| x | y |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 3 | 0 |
| -5 | 0 |
| 4 | 2 |
| 2 | -2 |

**18.**

16a)

Eje OX: $0 = -2x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Eje OY: $f(0) = 1 \Rightarrow (0,1)$

16b)

Eje OX: $0 = x^2 - x - 6 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow (-2,0), (3,0)$

Eje OY: $g(0) = -6 \Rightarrow (0, -6)$

16c)

Eje OX: $0 = x^3 - 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} \Rightarrow \left(\sqrt[3]{2}, 0\right)$

Eje OY: $h(0) = -2 \Rightarrow (0, -2)$

16d)

Eje OX: $0 = -\frac{2}{3x+1}$ sólo corta el eje OX en el infinito

Eje OY: $i(0) - -2 \rightarrow (0, -2)$

17a)

Eje OX: $(4,0), (2,0)$

Eje OY: $(0,2)$

17b)

Eje OX: la naturaleza periódica de la gráfica hace que corte el eje OX infinitas veces:

$(1+2k,0)\ \forall k \in \mathbb{Z}$

Eje OY: $(0,2)$

**19.**

a) Eje OX: $0 = 3x - 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \Rightarrow \left(\frac{4}{3},0\right)$

Eje OY: $f(0) = -4 \Rightarrow (0,-4)$

b) Eje OX: $0 = x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x-6) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 6 \end{cases} \Rightarrow (-1,0)\ (6,0)$

Eje OY: $g(0) = -6 \Rightarrow (0,-6)$

c) Eje OX: $0 = \frac{2}{x+3} \Rightarrow$ Salvo para $x = \pm\infty$ no se corta el eje OX

Eje OY: $h(0) = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(0,\frac{2}{3}\right)$

d) Eje OX: $0 = \frac{2x-1}{x+5} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2},0\right)$

Eje OY: $i(0) = -\frac{1}{5} \Rightarrow \left(0,-\frac{1}{5}\right)$

**Dominio e imagen de una función.**

**20.** En todos los casos las funciones son polinómicas, luego su dominio de definición es el conjunto de los números reales:

$Dom(f) = Dom(g) = Dom(h) = Dom(i) = \mathbb{R}$

**21.**

a) Esta función presenta únicamente un problema para $x = -1$, pues el denominador se hace 0. Por tanto, su dominio es:

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

b) Comprobamos, igualmente, los posibles valores para los que el denominador se anula:

$2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow Dom(g) = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

c) Igualmente buscamos los valores que anulen el denominador:

$0 = x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2) \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow Dom(h) = \mathbb{R} - \{2,3\}$

d) Buscamos los valores que anulen el denominador

$$0 = 2x^2 - 3x = x(2x - 3) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \ Dom(i) = \mathbb{R} - \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$$

**22.** En este caso los valores problemáticos serán aquellos que fuercen radicandos menores que cero, luego habrá que resolver una inecuación $\text{radicando} \geq 0$ para encontrar el dominio de definición.

a) $2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2} \ \Rightarrow \ Dom(f) = \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$

b) $x^2 + 5x \ \geq 0$ En este caso el intervalo requiere analizar el comportamiento de la función $\mu(x) = x^2 + 5x$

En primer lugar buscaremos los puntos con el eje de abscisas:

$$0 = x^2 + 5x = x(x + 5) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases} \Rightarrow (0,0), (-5,0)$$

Por último comprobaremos evaluando en cuales de los tres posibles intervalos $(-\infty, -5)$ , $(-5,0)$, $(0, \infty)$ la función está por encima del eje OX, es decir, es mayor que 0:

$\mu(-6) = \ 6 > 0 \quad \mu(-3) = \ -6 < 0 \quad \mu(3) \ = 24 > 0$

Por tanto, $Dom(g) = (-\infty, -5] \cup [0, \infty)$

Nota: -5 y 0 están incluidos porque la función vale 0 en ambos casos.

c) Nos encontramos ante la misma situación del apartado b). Tenemos una ecuación cuadrática en el radicando, luego procedemos de la misma manera:

$$0 = x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

El análisis de los tres posibles intervalos revela que el radicando es mayor que cero en el caso de $(\ \infty, \ \ 3)$ y $(3, \infty)$ luego el dominio de definición es:

$Dom\ (h) = (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

d) En este caso tendremos que analizar igualmente el radicando, pues el otro sumando es un polinomio y no presenta ningún problema.

$x + 1 \ \geq 0 \Leftrightarrow x \ \geq -1$

Así pues el dominio de definición es:

$Dom(i) = [-1, \infty)$

# PÁGINA 109

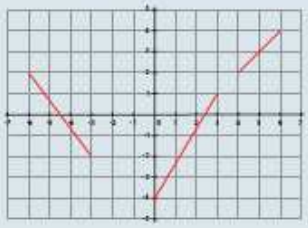
■ **23.** Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+5}}$ c) $h(x) = \sqrt{x^3 - 3x}$

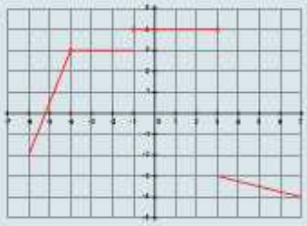
b) $g(x) = \sqrt{6x^4 + x^2 - 1}$ d) $i(x) = \dfrac{1}{x - 5\sqrt{x} + 6}$

□ **24.** Indica el conjunto dominio y el conjunto imagen de las siguientes funciones:

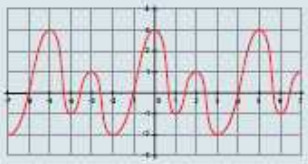
a)



b)



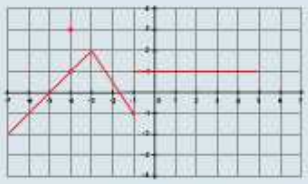
c)



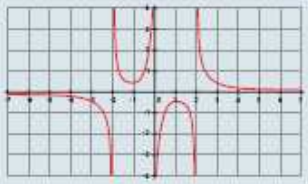
## Continuidad

□ **25.** Determina los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

a)



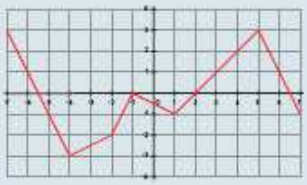
b)



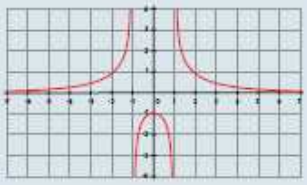
## Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos

□ **26.** Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

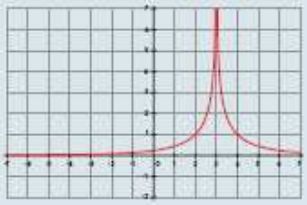
a)



b)

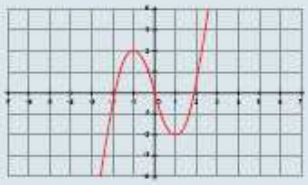


c)

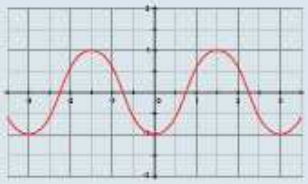


□ **27.** Indica los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes gráficas:

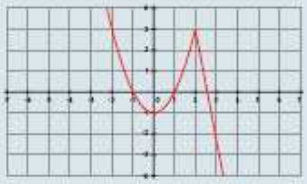
a)



b)



c)



→

**23.**

a) En este caso la función presenta una doble problemática. Por una lado, el radicando siempre tendrá que ser mayor o igual a 0 y, por otro, habrá que prestar atención a posibles valores que anulen el denominador:

$x+5=0 \Rightarrow x=-5 \Rightarrow$ excluimos el -5 del dominio.

$\frac{x-3}{x+5} \geq 0$ Para resolver esta inecuación vamos a analizar algunos intervalos en los que la función puede cambiar de signo. Los extremos de dichos intervalos serán, evidentemente, los puntos en los que la función corte al eje OX pero también aquéllos en los que la función tenga una discontinuidad:

| | $(-\infty,-5)$ | $(-5,3)$ | $(3,\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{x-3}{x+5}$ | $>0$ | $<0$ | $>0$ |

Luego el dominio de definición es:

$Dom(f)=(-\infty,-5)\cup[3,\infty)$

b) En este caso tenemos que asegurar que el radicando sea mayor o igual que 0:

$6x^4+x^2-1\geq 0$

Conviene hacer el cambio de variable $x^2 \rightarrow x^2=t$ y analizarlo como si fuera una ecuación de segundo grado:

$6t^2+t-1\geq 0$

Igualando a 0 para ver los puntos en los que cambia de signo:

$$t=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 6\cdot(-1)}}{12}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{12} \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{1}{3} \\ t=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$\begin{cases} x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \\ x=\pm\sqrt{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Descartamos las que pertenecen al conjunto de los complejos y nos quedamos con las reales, estableciendo los intervalos a evaluar:

| | $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ | $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ | $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty\right)$ |
|---|---|---|---|
| $6x^4+x^2-1$ | $>0$ | $<0$ | $>0$ |

Luego, finalmente, el dominio queda como:

$$Dom(g)=\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\infty\right)$$

c) Vamos a analizar, como en el resto de los apartados, el signo del radicando, forzándolo a que sea positivo o nulo:

$$x^3-3x\geq 0\ \Rightarrow x(x^2-3)\geq 0$$

Ahora buscaremos los intervalos a analizar, obteniendo los puntos en los que la función $\sigma(x)=x(x^2-3)$ corta el eje de abscisas:

$$x(x^2-3)=0\ \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \\ x=-3 \end{cases}$$

Analizamos los intervalos:

| | $(-\infty,-3)$ | $(-3,0)$ | $(0,3)$ | $(3,\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $6x^4+x^2-1$ | $<0$ | $>0$ | $<0$ | $>0$ |

El domino de definición es, por tanto:

$$Dom(h)=(-3,0)\cup(3,\infty)$$

d) En este caso hay que analizar que el denominador sea distinto de 0 pero también que el radicando no sea menor que 0.

En primera instancia el dominio será $x\geq 0$ pues hay una raíz cuadrada con radicando x. En segundo lugar vamos a ver para qué valores el denominador se anula:

$$x-5\sqrt{x}+6=0\ \Leftrightarrow$$

$x + 6 - 5\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow$

$(x + 6 - 5\sqrt{x})(x + 6 + 5\sqrt{x}) = 0 \Leftrightarrow$

$(x + 6)^2 - 25x = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 + 12x + 36 - 25x = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - 13x + 36 = 0 \Leftrightarrow$

$x = \frac{+13 \pm\sqrt{169-4\cdot 36}}{2} = \frac{+13 \pm\sqrt{25}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = +9 \\ x = +4 \end{cases}$

Después de comprobar que verifican la ecuación, exponemos finalmente el dominio:

$Dom(i) = \{0\} \cup (\mathbb{R}^+ - \{4,9\})$

**24.**

a) Dominio: $[-5,-3] \cup (0,3] \cup [4,6]$

Recorrido: $(-4,4]$

b) Dominio: $[-6,-4) \cup (-4,7]$

Recorrido: $[-4,-3) \cup (-2,3] \cup \{4\}$

c) Dominio: $[-7,7]$

Recorrido: $[-2,3]$

**Continuidad.**

**25.**

a) En $x = -4$ es una discontinuidad evitable

En $x = -1$ es una discontinuidad esencial de salto finito

b) Tanto en $x - -2$ ,$x - 0$ y $x - 2$ son discontinuidades esenciales de salto infinito (asíntotas verticales)

**Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos.**

**26.**

a) Crecimiento: $(-4,-1) \cup (1,5)$

Decrecimiento: $(-7,-4) \cup (-1,1) \cup (5,7)$

b) Crecimiento: $(-7,-1) \cup (-1,0)$

Decrecimiento: $(0,1) \cup (1,7)$

c) Crecimiento: $(-7,3)$
Decrecimiento: $(3,7)$

**27.**

a) Crecimiento: $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$
Decrecimiento: $(-1,1)$
Extremos relativos en: $(-1,2)$ , $(1,2)$

b) Crecimiento: $\left(3k,\frac{3}{2}+3k\right) \forall\, k \in \mathbb{Z}$
Decrecimiento: $\left(\frac{3}{2}+3k, 3(1+k)\right) \forall\, k \in \mathbb{Z}$
Extremos relativos en: $(3k,-1), \left(\frac{3}{2}+3k, 1\right) \forall\, k \in \mathbb{Z}$

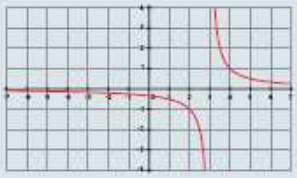
c) Crecimiento: (-1,2)
Decrecimiento: (-∞,-1)U (2,+∞)
Extremos relativos en: (0,-1) hay un mínimo relativo, y (2,3) un máximo relativo.

# PÁGINA 110

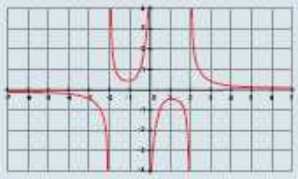
## Concavidad y convexidad

□ **28.** Determina los intervalos de convexidad y concavidad de las siguientes funciones:

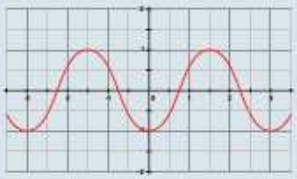
a)



b)



c)

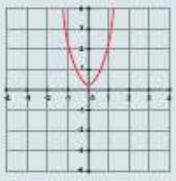


## Simetría y periodicidad

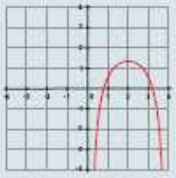
□ **29.** Indica el tipo de simetría que presenta cada una de estas funciones y, cuando se pueda, el eje de simetría:

a)

c)



b)



d)

□ **30.** Indica si son pares o impares las siguientes funciones:

a) $f(x) = x + 3$

b) $g(x) = -x^2 + 4$

c) $h(x) = -x^5 + 3x^3 - x$

d) $i(x) = 2x^4 + 3x^2 - 3$

■ **31.** Indica si las siguientes funciones son simétricas respecto del origen o respecto del eje de ordenadas:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2-3}{x^3+x}$

d) $i(x) = \dfrac{x-x^3}{x}$

## Tendencias de las funciones

□ **32.** Determina la tendencia de las siguientes funciones:

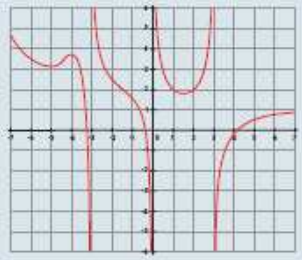
a) $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ cuando $x \to 2^+$

b) $g(x) = \dfrac{3}{x^2-2}$ cuando $x \to +\infty$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x} + 1$ cuando $x \to -\infty$

d) $i(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 1$ cuando $x \to +\infty$

□ **33.** Explica las tendencias de la siguiente función:



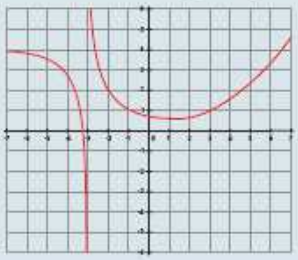
a) Cuando $x \to -3^-$ y $x \to -3^+$

b) Cuando $x \to 0^-$ y $x \to 0^+$

c) Cuando $x \to 3^-$ y $x \to 3^+$

d) Cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$

□ **34.** Determina las tendencias de la siguiente gráfica:



**Concavidad y convexidad.**

**28.**

a) Convexa: $(3,\infty)$ Cóncava: $(-\infty,3)$

b) Convexa: $(-2,0)\cup(2,\infty)$ Cóncava: $(-\infty,-2)\cup(0,2)$

c) Convexa: $\left(-\frac{3}{4}+3k,\frac{3}{4}+3k\right)$ Cóncava: $\left(\frac{3}{4}+3k,2+\frac{1}{4}+3k\right)$ $\forall k\in\mathbb{Z}$

**Simetría y periodicidad.**

**29.**

a) Presenta simetría impar respecto al origen, pues $f(-x)=-f(x)$

b) Tiene simetría par respecto al eje $x=-2$

c) Tiene simetría par respecto al eje de ordenadas

d) Presenta simetría impar respecto al origen

**30.**

a) $f(-x)=-x+3$ , por lo que, respecto al sistema de referencia inicial, no es ni par ni impar, no obstante, si se hace el cambio de variable $x\to x=t-3$ presentará simetría impar. Podría considerarse con simetría impar respecto al punto $(3,0)$

b) $g(-x)=-x^2+4=g(x)$ , es decir, presenta simetría par.

c) $h(-x)=x^5-3x^3+x=-h(x)$ luego presenta simetría impar

d) $i(-x)=2x^4+3x^2-3=i(x)$ , es decir, simetría par.

**31.**

a) $f(-x)\neq f(x)$ y $f(-x)\neq -f(x)$ luego, a priori, no presenta simetría ni par ni impar. No obstante, haciendo el cambio de variable $x\to x=t+2$ presentará simetría impar respecto al nuevo origen. En este caso, la gráfica es una hipérbola equilátera que tiene múltiples simetrías:

- Respecto a su centro $(2,0)$
- Respecto a sus asíntotas $y=0\,,x=2$
- Respecto a sus ejes $y=-x+2,\ \ y=x-2$

b) $g(-x)=-\frac{x}{x^2+1}=-g(x)$ luego presenta simetría impar respecto al origen.

c) $h(-x)=\frac{x^2-3}{-x^3-x}=-\frac{x^2-3}{x^3+x}=-h(x)$ , es decir, simetría impar respecto al origen

d) $i(-x)=\frac{-x+x^3}{-x}=\frac{x-x^3}{x}=i(x)$ $\Rightarrow$ presenta simetría par respecto al eje de ordenadas.

**Tendencias de las funciones.**

**32.**

a) $f(2'01) = \frac{3}{2'01-2} = 300$

$f(2'0001) = \frac{3}{2'0001-2} = 30000$

$f(2'00001) = \frac{3}{2'00001-2} = 300000$

…

$f(x) \xrightarrow[x\to 2^+]{} \infty$

b) $g(10^6) = \frac{3}{10^{12}-2} \approx \frac{3}{10^{12}} = 3\cdot 10^{-12}$

$g(10^{10}) - \frac{3}{10^{20}-2} \approx \frac{3}{10^{20}} - 3\cdot 10^{-20}$

…

$g(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

c) $h(-10^6) = -\frac{1}{10^{12}} + 1 = 1 + 10^{-12}$

$h(-10^{10}) = -\frac{1}{10^{20}} + 1 = 1 + 10^{-20}$

…

$h(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 1$

d) $i(10^6) = 3\cdot 10^{18} + 2\cdot 10^{12} - 10^6 + 1 \approx 3\cdot 10^{18}$

$i(10^{10}) = 3\cdot 10^{30} + 2\cdot 10^{20} - 10^6 + 1 \approx 3\cdot 10^{30}$

…

$i(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$

**33.**

En este caso, al disponer de la gráfico es mucho más sencillo obtener las tendencias, basta con interpretar la gráfica:

a) $f \xrightarrow[x\to -3^-]{} -\infty$ $\quad f \xrightarrow[x\to -3^+]{} +\infty$

b) $f \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty$ $\quad f \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$

c) $f \xrightarrow[x\to 3^-]{} +\infty$ $\quad f \xrightarrow[x\to 3^+]{} -\infty$

d) $f \xrightarrow[x\to +\infty]{} 1$ $\quad f \xrightarrow[x\to -\infty]{} +\infty$

**34.**

Se analizan las tendencias para $x \to -\infty$ ,$x \to -3^{\pm}$ ,$x \to \infty$

$$f \xrightarrow[x \to -3^{+}]{} +\infty$$

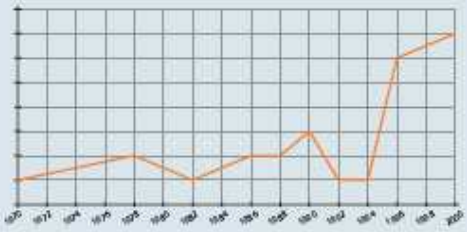
$$f \xrightarrow[x \to -3^{-}]{} -\infty$$

$$f \xrightarrow[x \to -\infty]{} 4$$

$$f \xrightarrow[x \to \infty]{} +\infty$$

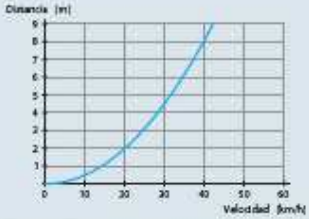
## → PROBLEMAS

☐ **35.** La siguiente gráfica muestra la evolución económica de una determinada empresa desde su fundación, en 1970, hasta el año 2000.



Indica los intervalos de crecimiento de su economía y los intervalos de tiempo en los que la economía ha sufrido un receso.

☐ **36.** La siguiente gráfica ilustra la relación existente entre la distancia de frenado de un vehículo y la velocidad a la que circula el vehículo:




a) ¿Cuántos metros son necesarios para detener un vehículo que circula a una velocidad de 23 km/h?

b) ¿A qué velocidad circula un vehículo que necesita 6'25 m para frenar?

## AUTOEVALUACIÓN

**1.** Determina el dominio de las siguientes funciones:

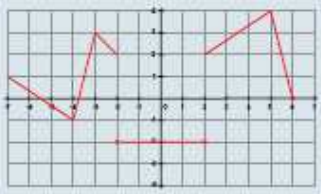
a) $f(x) = -x^2 - 2x + 4$ b) $g(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 16}$

**2.** Estudia el dominio de la función $h(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$.

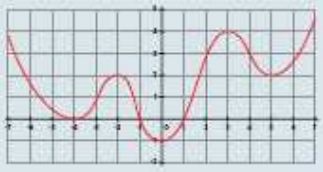
**3.** Calcula los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ b) $g(x) = \dfrac{x - 3}{x + 5}$

**4.** Determina el dominio y la imagen de la siguiente función:



**5.** Dada la siguiente gráfica:



Indica:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento

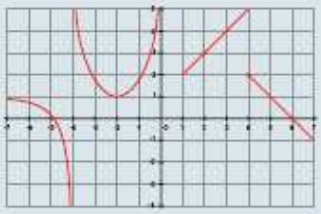
b) Los extremos relativos

c) Los puntos de corte con los ejes

**6.** Estudia si las siguientes funciones son pares o impares:

a) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 1$ b) $g(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x^3 + x}$

**7.** Encuentra los puntos de discontinuidad de la siguiente función e indica los intervalos donde la función es continua:



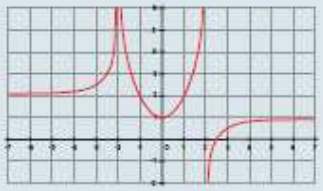
**8.** Indica la tendencia de la función $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 3}$ cuando:

a) $x \to 3^-$ b) $x \to 3^+$

**9.** Indica la tendencia de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2x - 1}$ cuando:

a) $x \to 1^-$ b) $x \to 1^+$ c) $x \to +\infty$ d) $x \to -\infty$

**10.** Determina las tendencias de la siguiente función:



→

**35.**

Crecimiento: $(1970,1978) \cup (1982,1986) \cup (1988,1990) \cup (1994,2000)$

Decrecimiento: $(1978,1982) \cup (1990,1992)$

**36.**

a) Aproximadamente 2'3 metros

b) Aproximadamente 35 km/h

## AUTOEVALUACIÓN

**1.** a) Al ser un polinomio el dominio es el conjunto de los números reales:

$Dom(f) = \mathbb{R}$

b) $x^2 - 16 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 4 \Rightarrow Dom(g) = \mathbb{R} - \{-4,4\}$

**2.** La única condición es que el radicando sea mayor o igual a 0:

$x^2 - 3x = x(x-3) \geq 0$

La función $\vartheta(x) = x(x-3)$ corta el eje de abscisas en $(0,0)$, $(3,0)$, luego los intervalos a estudiar son:

| | $(-\infty,0)$ | $(0,3)$ | $(3,\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $\vartheta(x) = x(x-3)$ | $> 0$ | $< 0$ | $> 0$ |

Así pues el dominio de la función es: $Dom(h) = (-\infty,0] \cup [3,\infty)$

**3.** a) Eje OX: $0 = -x^2 - 2x + 4 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4\cdot(-1)\cdot(4)}}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow (-3,0), (1,0)$

Eje OY: $f(0) = 4 \Rightarrow (0,4)$

b) Eje OX: $0 = \frac{x-3}{x+5} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow (3,0)$

Eje OY: $g(0) = -\frac{3}{5} \Rightarrow \left(0, -\frac{3}{5}\right)$

**4.** Dominio: $[-7,6)$

Recorrido: $\{-2\} \cup [-2,4]$

**5.** a) Crecimiento: $(-4,-2) \cup (0,3) \cup (5,\infty)$

Decrecimiento: $(-\infty,-4) \cup (-2,0) \cup (3,5)$

b) Extremos relativos en: $(-4,0)$, $(-2,2)$, $(0,-1)$, $(3,4)$, $(5,2)$

c) Eje OX: $(-4,0), (-1,0)$, $(1,0)$

Eje OY: $(0,-1)$

**6.** a) $f(-x) = -x^4 + 3x^2 - 1 = f(x) \Rightarrow$ función par

b) $g(-x) = \frac{2x^2-1}{-x^3-x} = -\frac{2x^2-1}{+-x} = -g(x) \Rightarrow$ función impar

**7.** Discontinuidades para $x = -4$, $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$

Función continua en: $(-\infty,-4) \cup (-4,0) \cup (1,2) \cup (2,4) \cup (4,\infty)$

**8.** a) $f(2'99) = \frac{4'98}{5'99} \approx 0'83138 \ldots$

$f(2'9999) = \frac{4'9998}{5'9999} \approx 0'833318 \ldots$

$f(2'999999) = \frac{4'999998}{5'999999} \approx 0'8333331 \ldots$

b) $f(3'01) = \frac{5'01}{6'01} \approx 0'83361 \ldots$

$f(3'0001) = \frac{5'0001}{6'0001} \approx 0'833336 \ldots$

$f(3'000001) = \frac{5'000001}{6'000001} \approx 0'8333333 \ldots$

$f(x) \xrightarrow[x \to 3^+]{} 0'8\hat{3} = \frac{5}{6}$

**9.** a) $f(0'99) = \frac{0'9801}{0'98} \approx 1'000102 \ldots$

$f(0'9999) = \frac{0'99980001}{0'9998} \approx 1'00000001 \ldots$

$\ldots$

$f(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} 1$

b) $f(1'01) = \frac{1'0201}{1'02} \approx 1'0000980 \ldots$

$f(1'0001) = \frac{1'00020001}{1'0002} \approx 1'00000001 \ldots$

$\ldots$

$f(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} 1$

c) $f(10^6) = \frac{10^{12}}{2 \cdot 10^6 - 1} \approx \frac{1}{2} \cdot 10^6$

$f(10^{10}) = \frac{10^{20}}{2 \cdot 10^{10} - 1} \approx \frac{1}{2} \cdot 10^{10}$

$\ldots$

$f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$

d) $f(-10^6) = \frac{10^{12}}{-2 \cdot 10^6 - 1} \approx -\frac{1}{2} \cdot 10^6$

$f(-10^{10}) = \frac{10^{20}}{-2 \cdot 10^{10} - 1} \approx -\frac{1}{2} \cdot 10^{10}$

$\ldots$

$f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$

**10.** Se analizan las tendencias para $x \to -\infty$ ,$x \to -2^{\pm}$, $x \to 2^{\pm}$, $x \to \infty$

$f \xrightarrow[x \to -2^+]{} +\infty$

$f \xrightarrow[x \to -2^-]{} +\infty$

$f \xrightarrow[x \to 2^+]{} -\infty$

$f \xrightarrow[x \to +2^-]{} +\infty$

$f \xrightarrow[x \to -\infty]{} 2$

$f \xrightarrow[x \to \infty]{} 1$

## PÁGINA 112

**OLIMPIADA MATEMÁTICA**

■ Escuela del Califa, Córdoba, 355 de la Hégira:

Un ladrón un cesto de naranjas del mercado robó y por entre los huertos escapó. Al saltar una valla, la mitad más media perdió. Perseguido por un perro, la mitad menos media abandonó. Tropezó en una cuerda y la mitad más media desparramó. En su guarida, dos docenas guardó. Vosotros, los que buscáis sabiduría, decidnos, ¿cuántas naranjas el ladrón robó?

SOLUCIONES

Llamamos "x" al total de las naranjas:

Primera pérdida:

$$x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x$$

Segunda pérdida

$$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x\right) = \frac{3}{16}x$$

Tercera pérdida

$$\frac{3}{16}x - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{16}x\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{3}{16}x\right) = \frac{3}{64}x$$

Luego igualando y despejando:

$\frac{3}{64}x = 24 \Rightarrow x = 192$ es el total de naranjas que robó

# Unidad 7 – Funciones algebraicas y exponenciales

## PÁGINA 114

### ¿QUÉ NECESITAS SABER?

**Evaluar polinomios**

Dado el polinomio $P(x) = x^2 + 3x - 12$, calcula:

a) $P(0)$ b) $P(-1)$ c) $P(1)$ d) $P(-2)$

**Raíces de un polinomio**

Escribe dos polinomios de grado 2 que tengan raíces en –1 y 5.

**Resolver ecuaciones de segundo grado**

Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 3x = 0$ b) $(x - 2)(x + 3) = x$ c) $2x^2 + 5x - 12 = 0$

SOLUCIONES

**Evaluar polinomios.**

a) $P(0) = 0 + 0 - 12 = -12$

b) $P(-1) = (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 12 = -14$

c) $P(1) = 1 + 3 \cdot 1 - 12 = -8$

d) $P(-2) = (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 12 = -14$

**Raíces de un polinomio.**

Usando el teorema del factor: $P_1(x) = (x+1)(x-5)$ $P_2(x) = (x+1)(x-5)x$

**Resolver ecuaciones de segundo grado.**

a) $x^2 - 3x = x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

b) $(x-2)(x+3) = x \Leftrightarrow$

$x^2 + x - 6 - x = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$

c) $2x^2 + 5x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-5 \pm 11}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = 3 \end{cases}$

## PÁGINA 116

**ACTIVIDADES**

**1.** Representa las siguientes funciones lineales:

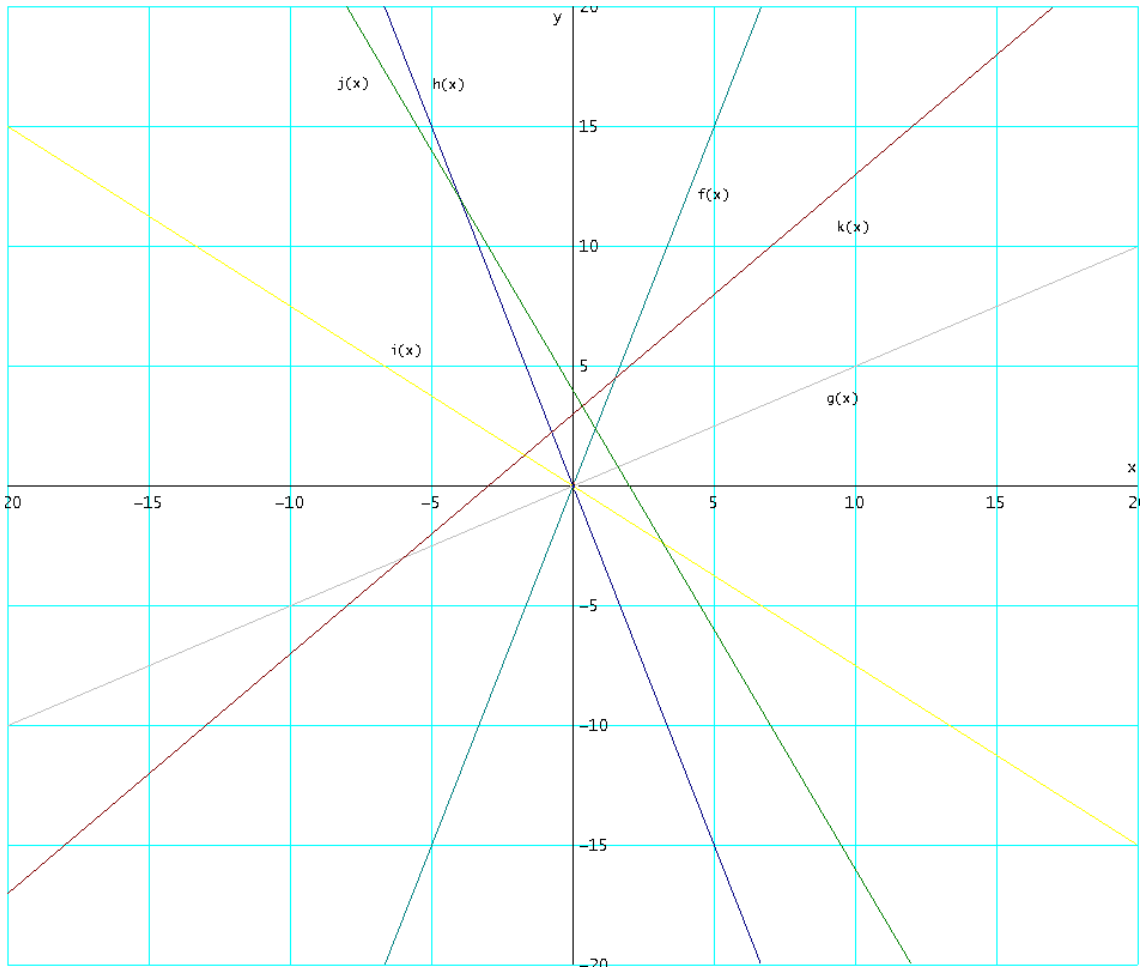
a) $f(x) = 3x$ c) $h(x) = -3x$ e) $j(x) = -2x + 4$

b) $g(x) = \frac{1}{2}x$ d) $i(x) = -\frac{3}{4}x$ f) $k(x) = x + 3$

**2.** Determina la función lineal de pendiente $m = 3$ que pasa por el punto (2, –2).

SOLUCIONES

**1.**




**2.** Sustituyendo en la ecuación "punto-pendiente": $y - y_0 = m(x - x_0)$ obtenemos que la ecuación es $y + 2 = 3(x - 2) \Leftrightarrow y = 3x - 8$

## PÁGINA 117

### ACTIVIDADES

**3.** Representa las siguientes funciones y estúdialas gráficamente:

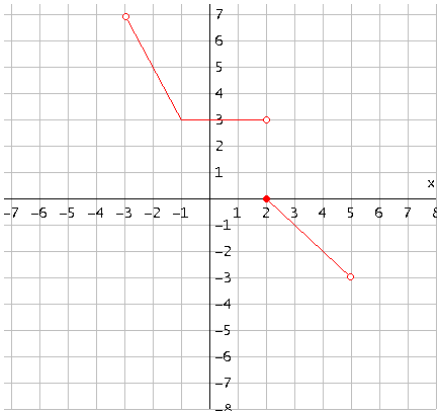
a) $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } -3 < x < -1 \\ 3 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ -x+2 & \text{si } 2 < x < 5 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 11-x & \text{si } 2 \le x < 5 \\ x+1 & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$

SOLUCIONES

**3.**

a)



$Dom(f) = (-2,5)$

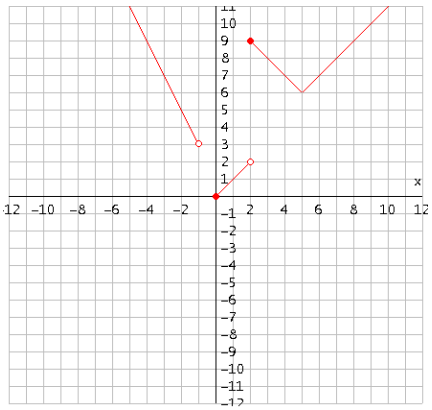
$Im(f) = (-3,0] \cup [3,7)$

Decreciente en $(-3,-1) \cup [2,5)$

Continua en $Dom(f) - \{2\}$

Discontinuidad de salto infinito en $x = 2$

b)



$Dom(f) = (-\infty,-1) \cup [0,\infty)$

$Im(f) = [0,2) \cup (3,\infty)$

Decreciente en $(-\infty,-2) \cup [2,5)$

Creciente en $[0,2) \cup (5,\infty)$

Continua en $Dom(f) - \{2\}$

Discontinuidad de salto infinito en $x = 2$

## PÁGINA 118

### ACTIVIDADES

**4.** Representa las siguientes parábolas y estudia el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y su concavidad y convexidad:

a) $f(x) = -x^2$

b) $g(x) = x^2 + 1$

c) $h(x) = \frac{1}{4}x^2$

d) $i(x) = -x^2 + 7$

e) $j(x) = 2x^2 - 8$

f) $k(x) = -x^2 + 3$

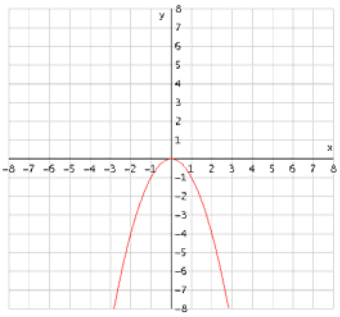
**5.** Determina el punto de corte con los ejes de las parábolas del ejercicio anterior.

SOLUCIONES

**4.** El dominio en todos los casos es $\mathbb{R}$, pues son polinomios. Igualmente todas las parábolas tendrán un extremo relativo, pues son parábolas no degeneradas. Finalmente, serán cóncavas o convexas en todo su dominio, pues al ser polinomios de grado dos o menor: $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = cte$.

Para un eficaz análisis de la concavidad conviene prestar atención en el signo del término al cuadrado. En caso de ser menor que cero, la parábola será cóncava y viceversa.

a)



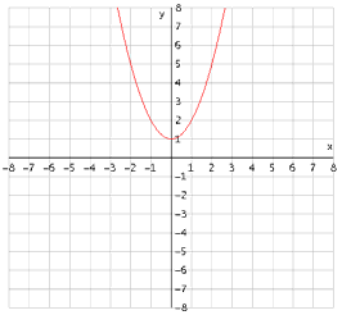
Creciente en $(-\infty, 0)$

Decreciente en $(0, \infty)$

Cóncava en todo su dominio

Máximo en $(0,0)$

b)



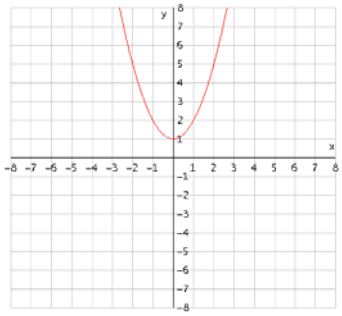
Creciente en $(0, \infty)$

Decreciente en $(-\infty, 0)$

Convexa en todo su dominio

Mínimo en $(0,1)$

c)



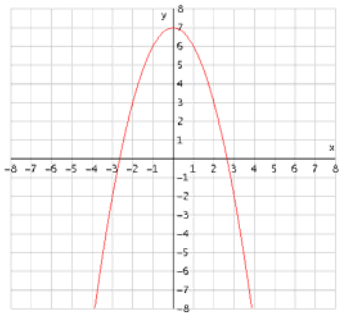
Creciente en $(0, \infty)$

Decreciente en $(-\infty, 0)$

Cóncava en todo su dominio

Mínimo en $(0,0)$

d)



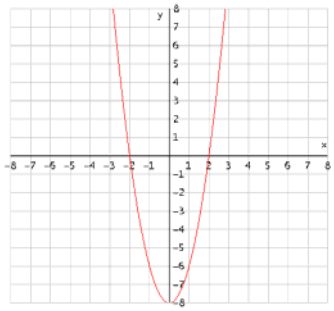
Creciente en $(-\infty, 0)$

Decreciente en $(0, \infty)$

Cóncava en todo su dominio

Máximo en $(0,7)$

e)



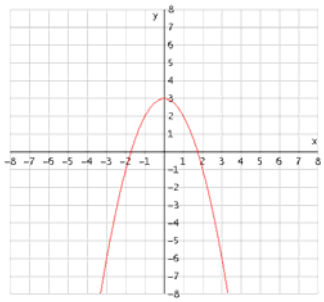
Creciente en $(0, \infty)$

Decreciente en $(-\infty, 0)$

Convexa en todo su dominio

Mínimo en $(0, -8)$

f)



Creciente en $(-\infty, 0)$

Decreciente en $(0, \infty)$

Cóncava en todo su dominio

Máximo en $(0,3)$

**5.**

a) OX: $0 = -x^2 \Rightarrow (0,0)$

OY: $f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$

b) OX: $0 = x^2 + 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow$ No corta el eje OX

OY: $f(0) = 1 \Rightarrow (0,1)$

c) OX: $0 = \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$

OY: $f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$

d) OX: $0 = -x^2 + 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7} \Rightarrow (-\sqrt{7},0),(\sqrt{7},0)$

OY: $f(0) = 7 \Rightarrow (0,7)$

e) OX: $0 = 2x^2 - 8 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow (-2,0),(2,0)$

OY: $f(0) = -8 \Rightarrow (0,-8)$

f) OX: $0 = -x^2 + 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{73} \Rightarrow (-\sqrt{3},0),(\sqrt{3},0)$

OY: $f(0) = 3 \Rightarrow (0,3)$

## PÁGINA 119

### ACTIVIDADES

**6.** Representa gráficamente y estudia las siguientes parábolas:

a) $f(x) = x^2 - x - 2$

b) $g(x) = -x^2 + x$

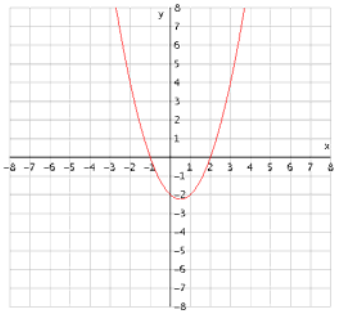
c) $h(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3x - 9$

d) $i(x) = 4x^2 - 4x + 1$

SOLUCIONES

**6.** Todas las parábolas tienen dominio de definición $\mathbb{R}$ y concavidad / convexidad constante (ver ejercicio 4). El vértice se calcula con $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

a)



Vértice (mínimo): $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

Creciente en: $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

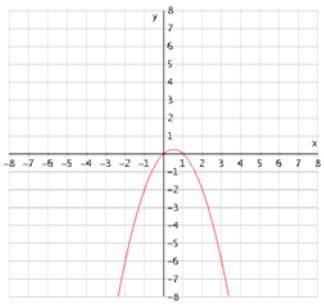
Decreciente en: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

Convexa en todo su dominio

Corte OX: $0 = x^2 - x - 2 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow (-2,0), (2,0)$

Corte OY: $f(0) = -2 \Rightarrow (0, -2)$

b)



Vértice (máximo): $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

Creciente en: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

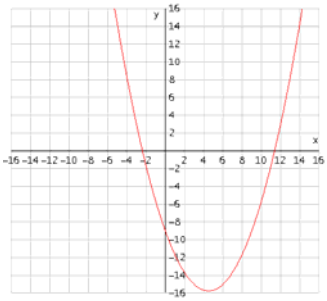
Decreciente en: $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

Cóncava en todo su dominio

Corte OX: $0 = -x^2 + x = x(-x+1) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0), (1,0)$

Corte OY: $g(0) - 0 \rightarrow (0, 0)$

c)



Vértice (mínimo): $\left(\frac{9}{2}, -\frac{63}{4}\right)$

Creciente en: $\left(\frac{9}{2}, \infty\right)$

Decreciente en: $\left(-\infty, \frac{9}{2}\right)$

Convexa en todo su dominio

Corte OX:

$$0 = \frac{1}{3}x^2 - 3x - 9 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - \frac{4}{3}\cdot(-9)}}{\frac{2}{3}} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{\frac{2}{3}} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9+3\sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{9-3\sqrt{21}}{2} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{9+3\sqrt{21}}{2}, 0\right), \left(\frac{9-3\sqrt{21}}{2}, 0\right)$$

Corte OY: $h(0) = -9 \Rightarrow (0, -9)$

d)

Vértice (mínimo): $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Creciente en: $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

Decreciente en: $\left(-\infty, \frac{31}{2}\right)$

Convexa en todo su dominio

Corte OX: $0 = 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Corte OY: $i(0) = 1 \Rightarrow \quad (0, 1)$

## PÁGINA 120

**ACTIVIDADES**

**7.** Haz una tabla de valores y representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa:

a) $f(x) = \frac{2}{x}$ c) $h(x) = \frac{3}{x}$ e) $j(x) = \frac{1}{2x}$

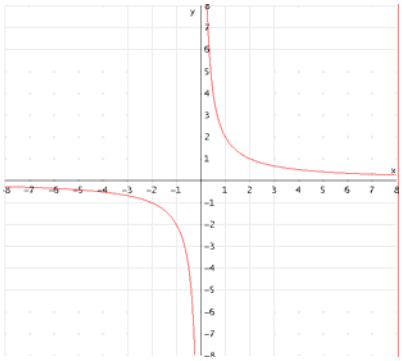
b) $g(x) = \frac{-1}{x}$ d) $i(x) = -\frac{2}{x}$ f) $k(x) = \frac{10}{x}$

SOLUCIONES

**7.**

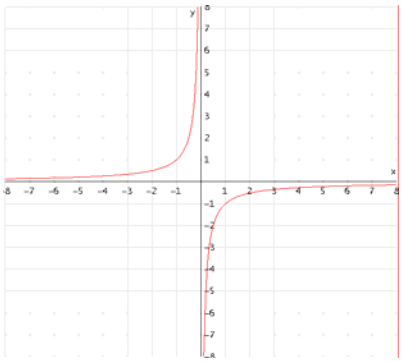
a) $f(x) = \frac{2}{x}$

| x | 1 | 2 | -1 | -2 | 4 | -4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 2 | 1 | -2 | -1 | 1/2 | -1/2 |



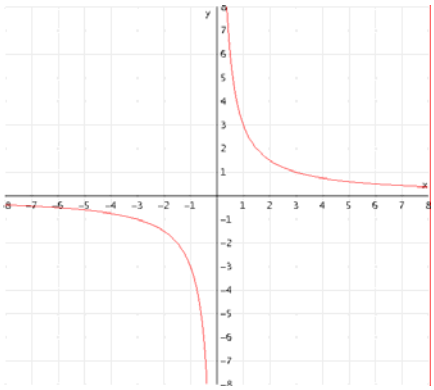
b) $g(x) = -\frac{1}{x}$

| x | 1 | 2 | -1 | -2 | 4 | -4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | -1 | -1/2 | 1 | 1/2 | -1/4 | 1/4 |



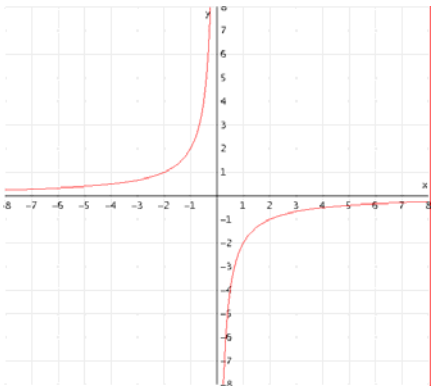
c) $h(x) = \frac{3}{x}$

| x | 1 | 2 | -1 | -2 | 3 | -3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 3 | 3/2 | -3 | -3/2 | 1 | -1 |



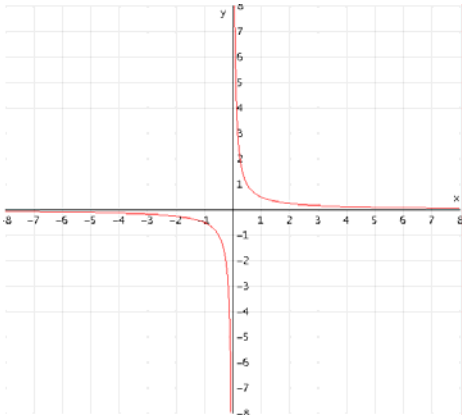
d) $i(x) = -\frac{2}{x}$

| x | 1 | 2 | -1 | -2 | 4 | -4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | -2 | -1 | 2 | 1 | -1/2 | 1/2 |



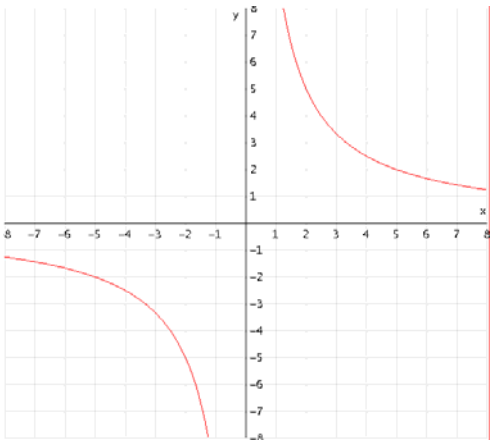
e) $j(x) = \frac{1}{2x}$

| x | 1 | 2 | -1 | -2 | 1/2 | -1/2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 1/2 | 1/4 | -1/2 | -1/4 | 1 | -1 |



f) $k(x) = \frac{10}{x}$

| x | 1 | 2 | -1 | -2 | 5 | -5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 10 | 5 | -10 | -5 | 2 | -2 |



## PÁGINA 121

**ACTIVIDADES**

**8.** Determina las asíntotas de las siguientes funciones y represéntalas:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ c) $h(x) = \dfrac{2}{x+4}$ e) $j(x) = \dfrac{2}{x+4} + 3$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ d) $i(x) = \dfrac{2}{x-4}$ f) $k(x) = \dfrac{2}{x-4} - 2$

SOLUCIONES

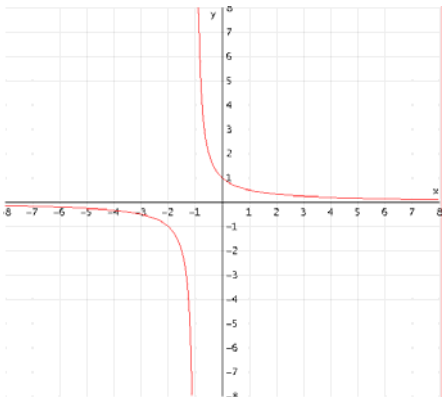
**8.** En este ejercicio se utilizará el siguiente razonamiento para determinar las asíntotas horizontales:

Sea $\varphi(x) = \frac{A}{Bx+C}$ $A, B, C \in \mathbb{R}$

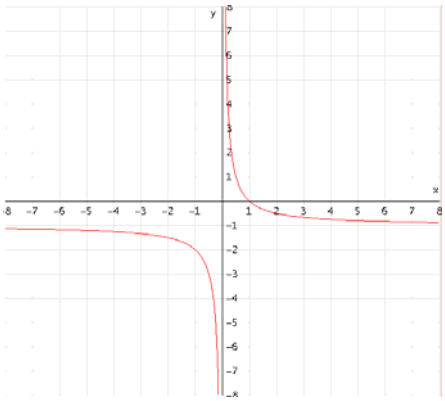
Sí $\left[|x_0| \gg 0 \Rightarrow \varphi(x_0) \approx 0\right] \Leftrightarrow \varphi(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$, es decir, la función $\varphi$ tiende a 0 para valores muy grandes (o muy pequeños) de x. Se demuestra trivialmente valorando la función con cantidades suficientemente grandes (ver página 105 del libro de texto).

Para las asíntotas verticales se buscaran valores que anulen el denominador.

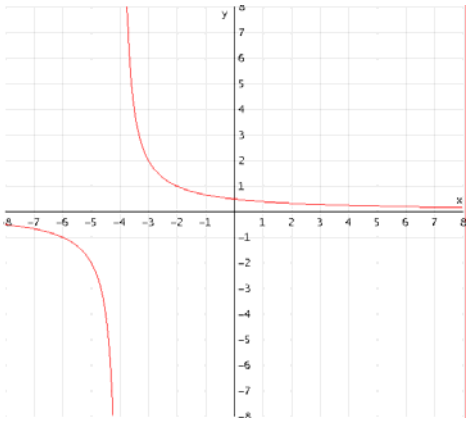
a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ Tiene asíntota horizontal en $y - 0$ y vertical en $x = -1$



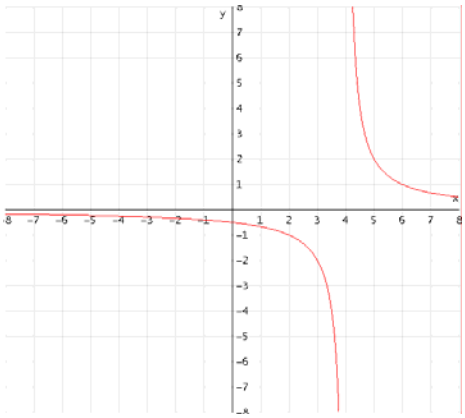
b) $g(x) = \frac{1}{x} - 1$ Tiene asíntota horizontal en $y = -1$ y vertical en $x = 0$



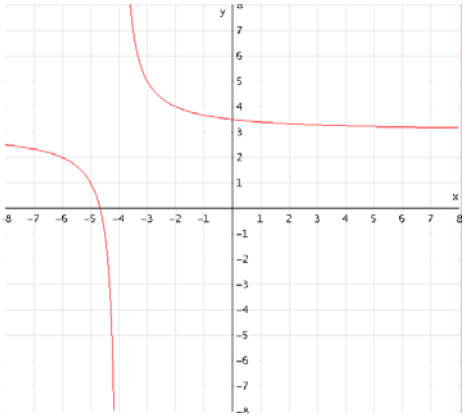
c) $h(x) = \frac{2}{x+4}$ Asíntota horizontal en $y = 0$ y vertical en $x = -4$



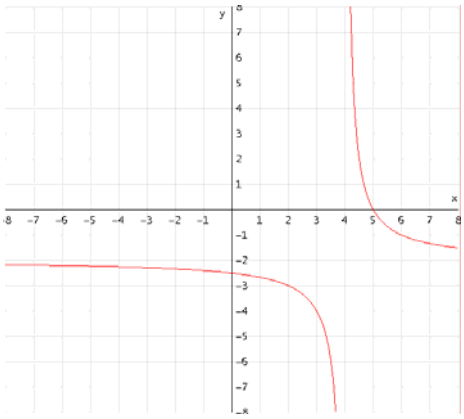
d) $i(x) = \frac{2}{x-4}$ Asíntota horizontal en $y = 0$ y vertical en $x = 4$



e) $j(x) = \frac{2}{x+4} + 3$ Asíntota horizontal en $y = 3$ y vertical en $x = -4$



f) $k(x) = \frac{2}{x-4} - 2$ Asíntota horizontal en $y = -2$ y vertical en $x = 4$



## PÁGINA 122

**ACTIVIDADES**

**9.** Representa y estudia las siguientes funciones exponenciales:

a) $f(x) = 3^x$ b) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ c) $h(x) = -2^x$

**10.** Utiliza las propiedades de las potencias para expresar como función exponencial las siguientes funciones y represéntalas:

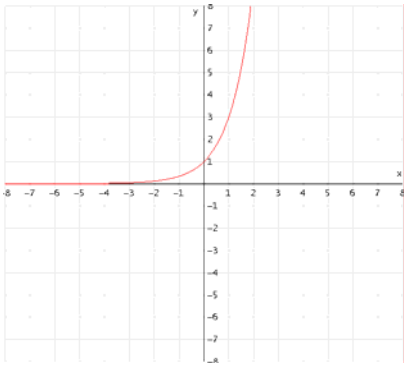
a) $f(x) = 3^{-x}$ b) $g(x) = \frac{1}{2^x}$ c) $h(x) = 2^{2x}$

SOLUCIONES

**9.**

a) $f(x) = 3^x$

| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 1/27 | 1/9 | 1/3 | 1 | 3 | 9 | 27 | 81 |



$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}^+$

$f \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$

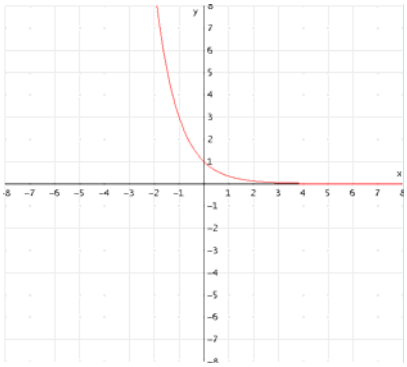
$f \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$

$f(0) = 1$

Creciente en $\mathbb{R}$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 27 | 9 | 3 | 1 | 1/3 | 1/9 | 1/27 | 1/81 |



$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}^+$

$f \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

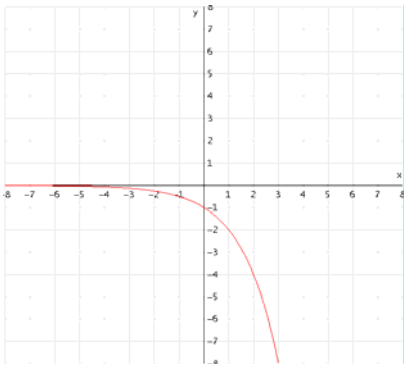
$f \xrightarrow[x \to -\infty]{} \infty$

$f(0) = 1$

Decreciente en $\mathbb{R}$

c) $f(x) = -2^x$

| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | -1/8 | -1/4 | -1/2 | -1 | -2 | -4 | -8 | -16 |



$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}^-$

$f \xrightarrow[x \to \infty]{} -\infty$

$f \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

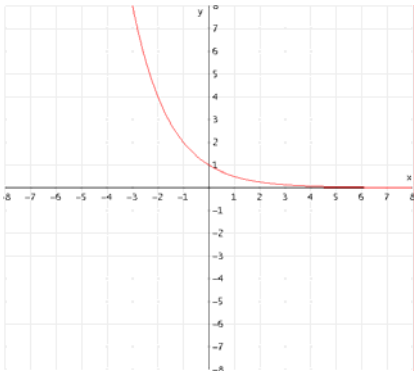
$f(0) = -1$

Decreciente en $\mathbb{R}$

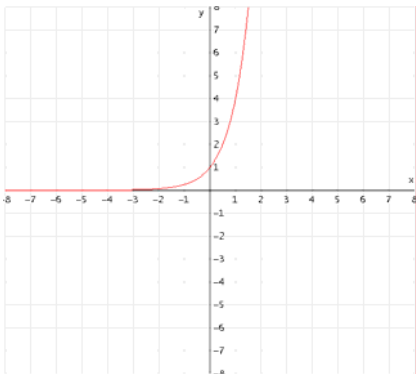
**10.**

a) $f(x) = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ver ap. b) del ejercicio 9

b) $g(x) = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



c) $h(x) = 2^{2x} = 2^x \cdot 2^x = (2^x)^2$



## PÁGINA 123

### ACTIVIDADES

**11.** Calcula el capital que obtendríamos a los 6 años de invertir un capital de 1 000 €, sin retirar los intereses, con un tipo de interés del 4%.

**12.** Realiza una gráfica con la evolución de una inversión a plazo fijo sin retirar del banco los intereses con una inversión inicial de 1 500 € y un tipo de interés del 3'4%.

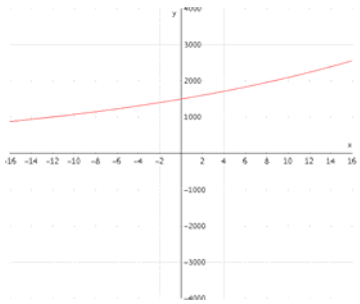
SOLUCIONES

**11.** $C = C_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^t$

$C = 3000€ \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^6 = 3795.96€$

**12.** $C(t) = 1500 \cdot \left(1 + \frac{3'4}{100}\right)^t$ es la función a representar. Construimos una tabla de valores:

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C(t)$ | 1500 | 1551 | 1603 | 1658 | 1714 | 1772 | 1833 | 1895 | 1959 |



## → EJERCICIOS

### Funciones lineales

**13.** Representa las siguientes funciones lineales:

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $g(x) = 2x + 1$

c) $h(x) = \frac{1}{3}x + 2$

d) $i(x) = \frac{2}{3}x - 2$

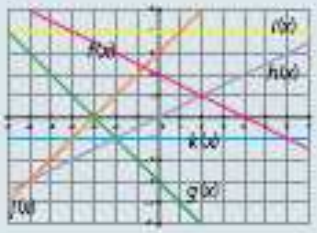
**14.** Determina las ecuaciones de las rectas que verifican lo siguiente:

a) Pendiente –3 y pasa por el punto (2, 3).

b) Pendiente 2 y pasa por el punto (–1, 3).

c) Pendiente –1 y pasa por el punto (0, 0).

**15.** Indica las rectas de la siguiente gráfica que tienen pendiente negativa, las que tienen pendiente positiva y las que tienen pendiente 0:




**16.** Dibuja una recta con pendiente positiva que pase por el punto (–2, –1).

**17.** Determina la función lineal que pasa por los puntos (–2, 3) y (1, –1).

**18.** Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos:

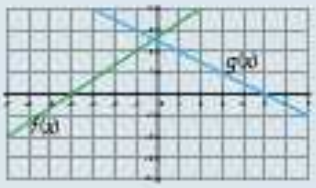
a) (2, 1) y (–1, 7)

b) (1, –1) y (2, –1)

c) (5, –1) y (–2, 3)

d) (–3, 2) y (–1, –3)

**19.** Dada la gráfica:




Determina la ecuación de las rectas.

### Funciones lineales definidas a trozos

**20.** Representa las siguientes funciones y estúdialas:

a) $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x < -1 \\ -3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } -3 < x \leq 2 \\ -x - 1 & \text{si } 2 < x \leq 5 \end{cases}$

**21.** Representa las siguientes funciones y estúdialas:

a) $f(x) = \begin{cases} x - 5 & \text{si } x \leq -1 \\ -6 & \text{si } -1 < x < 2 \\ 2x - 7 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } -5 \leq x < -1 \\ -x + 3 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ x - 5 & \text{si } 2 \leq x < 5 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{si } x < -2 \\ 2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ -x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

**22.** Representa la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x + 7 & \text{si } x < -5 \\ 2x + 4 & \text{si } -5 \leq x < 3 \\ -3x + 19 & \text{si } 3 \leq x < 7 \\ x & \text{si } 7 \leq x < 12 \end{cases}$$

### Funciones parabólicas

**23.** Representa las siguientes funciones parabólicas:

a) $f(x) = -x^2 + 2x$

b) $g(x) = -x^2 + 3x$

c) $h(x) = x^2 + 3x$

d) $i(x) = 2x^2 - 5x$

e) $j(x) = 2x^2 - 3x$

f) $k(x) = -2x^2 + 8x$

**24.** Representa las siguientes funciones parabólicas:

a) $f(x) = x^2 + x - 1$

b) $g(x) = x^2 + x - 6$

c) $h(x) = -4x^2 + 4x - 1$

d) $i(x) = -x^2 + 4x - 1$

e) $j(x) = -2x^2 - 5x + 3$

f) $k(x) = x^2 + 2x + 3$

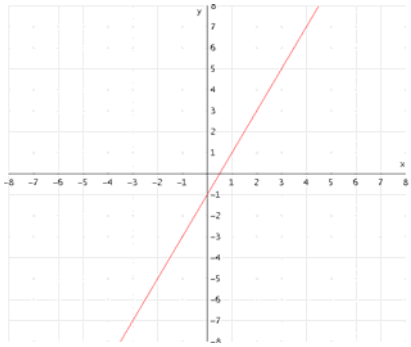
**Funciones lineales.**

**13.** Al ser funciones afines la representación gráfica es una recta, por lo que es suficiente utilizar dos valores para su representación. Se tomarán los puntos que cortan los ejes.

a) $f(x) = 2x - 1$

Eje OY: $(0, -1)$

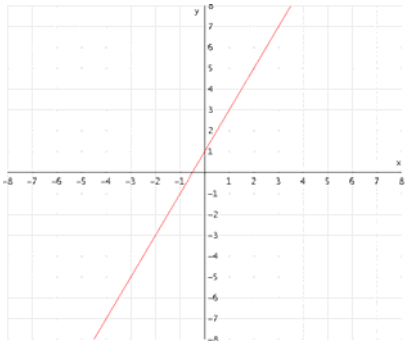
Eje OX: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$



b) $g(x) = 2x + 1$

Eje OY: $(0,1)$

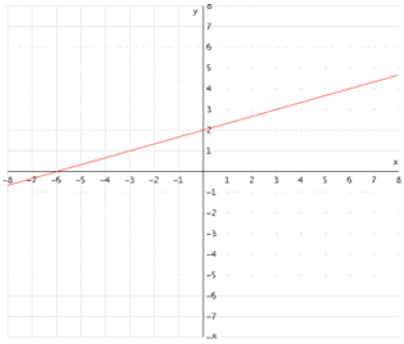
Eje OX: $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$



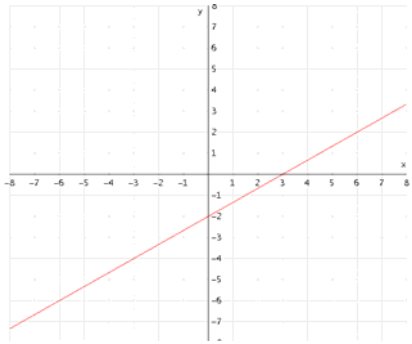
c) $h(x) = \frac{1}{3}x + 2$

Eje OY: $(0,2)$

Eje OX: $(-6,0)$



d) $i(x) = \frac{2}{3}x - 2$



Eje OY: $(0,-2)$

Eje OX: $(3,0)$

**14.** Utilizaremos la forma "punto-pendiente" de la recta para encontrar la ecuación:

$y - y_0 = m\,(x - x_0)$

Siendo $(x_0, y_0)$ las coordenadas del punto y $m$ la pendiente de la recta.

a) $y - 3 = -3(x-2) \Rightarrow y = -3x + 9$

b) $y - 3 = 2(x+1) \Rightarrow y = 2x + 5$

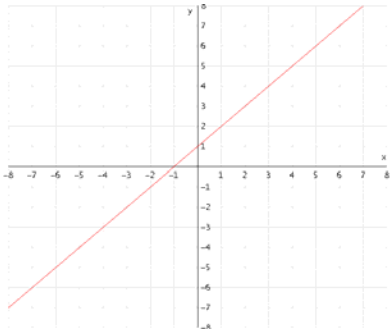
c) $y = -x$

**15.** Positiva (crecientes) : $h, i$

Negativa (decrecientes) : $f, g$

Nula (constantes) : $k, i$

**16.** Tomaremos pendiente $m = 1 > 0$ por lo que la recta en forma "punto-pendiente" quedará como $y + 1 = 1 \cdot (x+2) \Rightarrow y = x + 1$



**17.** La pendiente de la recta será la del vector que va desde un punto a otro:

$\vec{v} = (-2,3) - (1,-1) = (-3,4)$

La pendiente de dicho vector es $m = \frac{v_y}{v_x} = \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$ luego ecuación de la recta es la siguiente:

$y + 1 = -\frac{4}{3}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$

**18.** Consiste en aplicar para cada ejemplo lo propuesto en el ejercicio 17. Así pues, en primer lugar calcularemos la pendiente asociada a esa recta y posteriormente utilizando uno de los puntos obtendremos una ecuación de la recta.

a) $m = \frac{7-1}{-1-2} = -2 \Rightarrow y - 1 = -2(x-2) \Rightarrow y = -2x + 5$

b) $m = \frac{-1-(-1)}{2-1} = 0 \Rightarrow y+1 = 0(x-1) \Rightarrow y = -1$

c) $m = \frac{3-(-1)}{2-5} = -\frac{4}{3} \Rightarrow y-3 = -\frac{4}{3}(x+2) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$

d) $m = \frac{-3-2}{-1-(-3)} = -\frac{5}{2} \Rightarrow y+3 = -\frac{5}{2}(x+1) \Rightarrow y = -\frac{5}{2}x - \frac{11}{2}$

**19.** $f(x)$ : Sobre esta función conocemos dos puntos: $(-4,0)$ y $(-1,2)$ por lo que aplicamos el mismo procedimiento que en el ejercicio anterior.

$m = \frac{2-0}{-1-(-4)} = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}(x+4) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

$g(x)$ : Procederemos de la misma manera, pues conocemos $(1,2)$ y $(5,0)$

$m = \frac{0-2}{5-1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y-2 = -\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{2}$

**Funciones lineales definidas a trozos.**

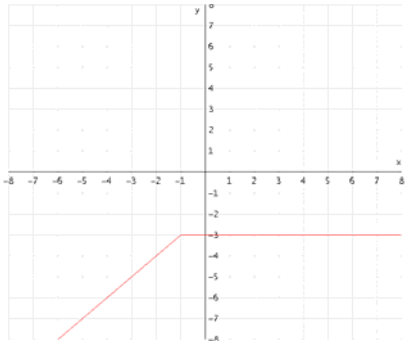
**20.** a)

$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = (-\infty, -3]$

Creciente en $(-3,-1) \cup [2,5)$

Continua en $Dom(f)$



b) $Dom(f) = (-3,5]$

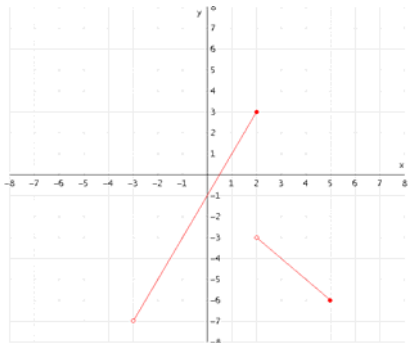
$Im(f) = (-7,3]$

Creciente en $(-3,2)$

Decreciente en $(2,5)$

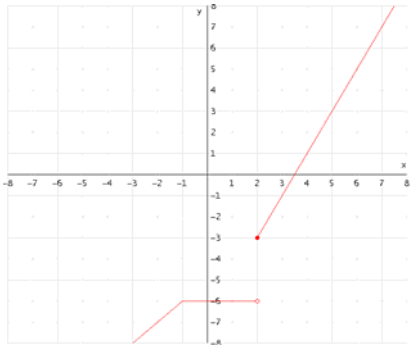
Continua en $Dom(f) - \{2\}$

Discontinuidad de salto finito en $x = 2$



**21.**

a)



$Dom(f) = \mathbb{R}$

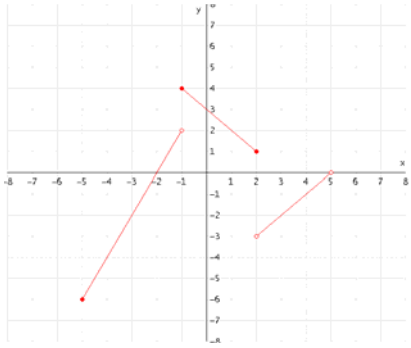
$Im(f) = \mathbb{R} - \{[-6,-3)\}$

Creciente en $Dom(f) - \{[-1,2]\}$

Continua en $Dom(f) - \{2\}$

Discontinuidad de salto finito en $x = 2$

b)



$Dom(f) = [-5,5)$

$Im(f) = [-6,4]$

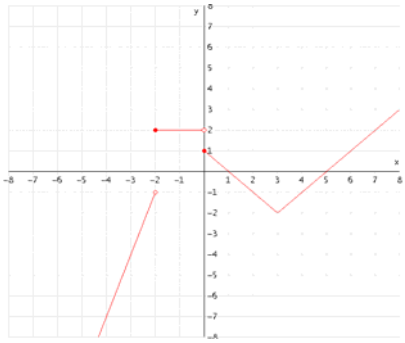
Creciente en $[-5,-1) \cup (2,5)$

Decreciente en $(-1,2)$

Continua en $Dom(f) - \{-1,2\}$

Discontinuidad de salto finito en $x = -1, x = 2$

c)



$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R} - (1,2]$

Creciente en $(-\infty,-2) \cup (3,\infty)$

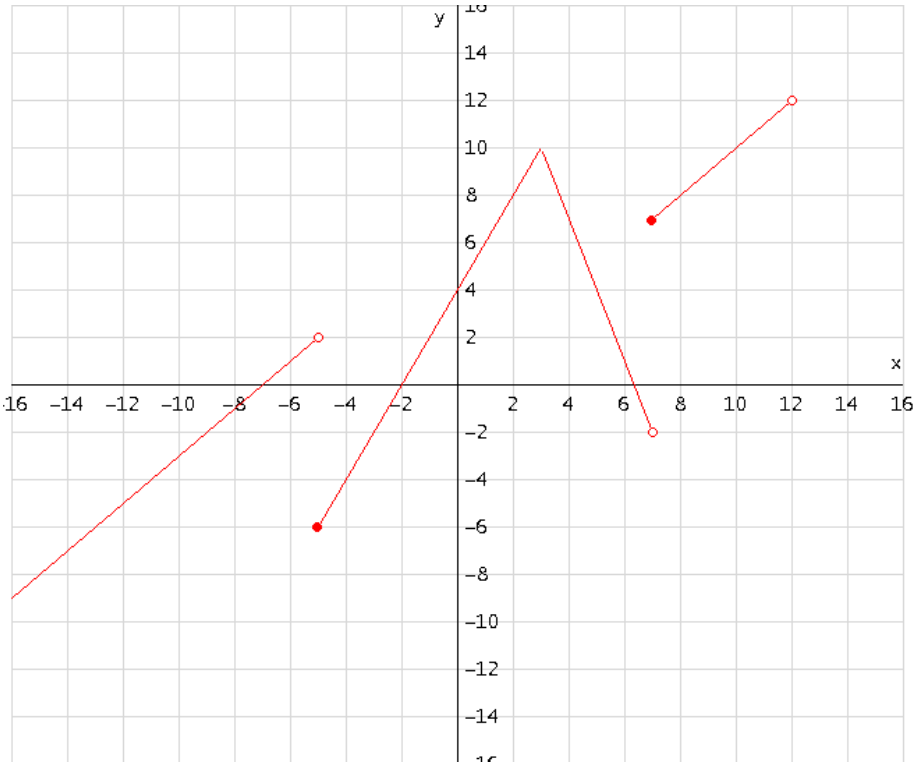
Decreciente en $(0,3)$

Continua en $Dom(f) - \{-2,0\}$

Discontinuidad de salto finito en $x = -2, x = 0$

**22.**

| $f(x) = x + 7$ $(-\infty,-5)$ | | $f(x) = 2x + 4$ $[-5,3)$ | | $f(x) = -3x + 19$ $[3,7)$ | | $f(x) = x$ $[7,12)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | y | x | y | x | y | x | y |
| -5 | 2 | -5 | -6 | 3 | 10 | 7 | 7 |
| -8 | -1 | 3 | 10 | 7 | -2 | 12 | 12 |

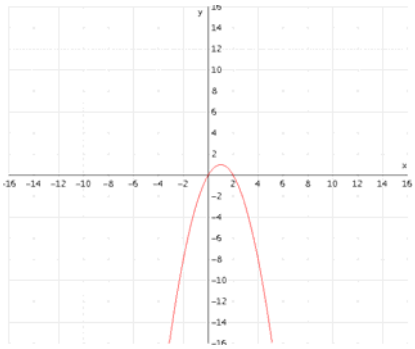



**Funciones parabólicas.**

**23.**

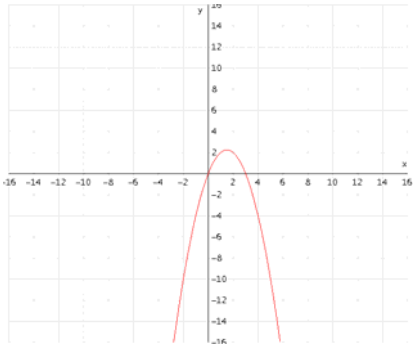
a) $f(x) = -x^2 + 2x$

| x | 0 | 1 | -1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| y | 0 | 1 | -3 | 0 |



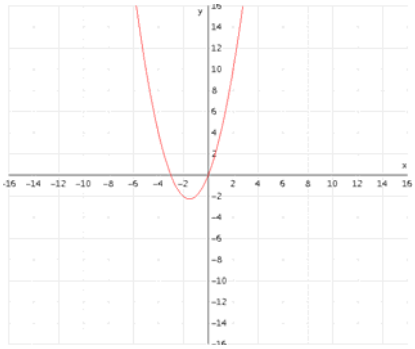
b) $g(x) = -x^2 + 3x$

| x | 0 | 1 | -1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| y | 0 | 2 | -4 | 2 |



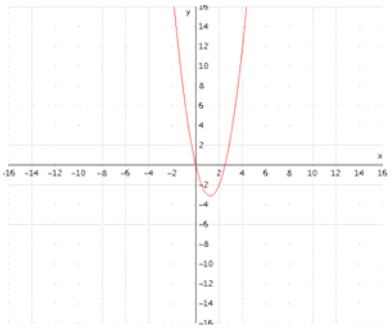
c) $h(x) = x^2 + 3x$

| x | 0 | 1 | -1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| y | 0 | 4 | -2 | 10 |



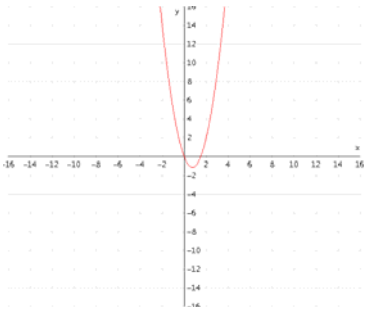
d) $i(x) = 2x^2 - 5x$

| x | 0 | 1 | -1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| y | 0 | -3 | 7 | -2 |



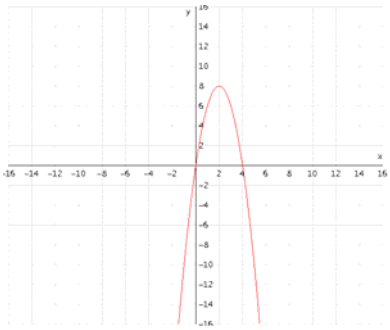
e) $j(x) = 2x^2 - 3x$

| x | 0 | 1 | -1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| y | 0 | -1 | 5 | 2 |



f) $k(x) = -2x^2 + 8x$

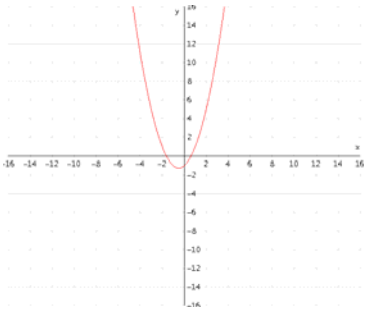
| x | 0 | 1 | -1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| y | 0 | 6 | -10 | 0 |



**24.**

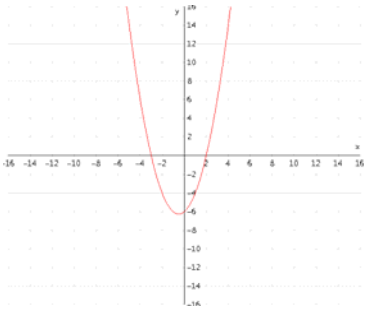
a) $f(x) = x^2 + x - 1$

| x | 0 | 1 | -1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| y | -1 | 1 | -1 | 5 |



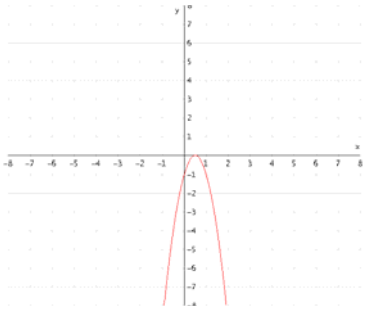
b) $g(x) = x^2 + x - 6$

| x | 0 | 1 | -1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| y | -6 | -4 | -6 | 0 |



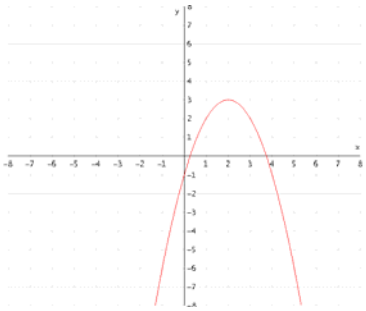
c) $h(x) = -4x^2 + 4x - 1$

| x | 0 | 1 | -1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| y | -1 | 0 | -9 | -9 |



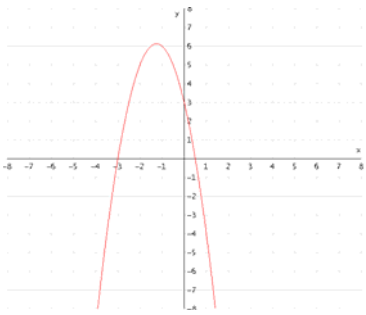
d) $i(x) = -x^2 + 4x - 1$

| x | 0 | 1 | -1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| y | -1 | 2 | -6 | 6 |



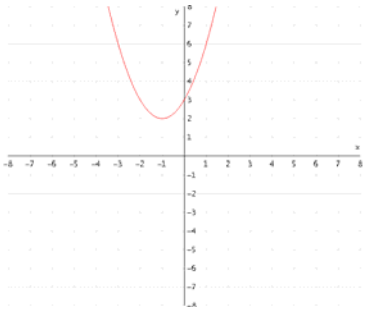
e) $j(x) = -2x^2 - 5x + 3$

| x | 0 | 1 | -1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| y | 3 | -4 | 6 | -15 |



f) $k(x) = x^2 + 2x + 3$

| x | 0 | 1 | -1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| y | 3 | 6 | 2 | 11 |



## PÁGINA 127

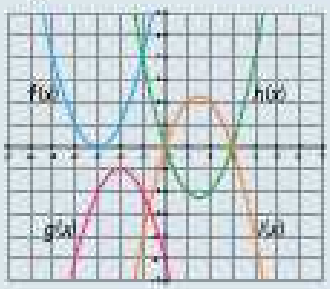
25. Representa las siguientes funciones parabólicas:

a) $f(x) = x^2 - 1$ c) $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$

b) $g(x) = 2x^2 + 3$ d) $i(x) = -2x^2 + 3$

26. Calcula los puntos de corte con los ejes de las funciones parabólicas del ejercicio anterior.

27. Asocia cada gráfica con su función:




a) $x^2 - 3x$ d) $x^2 - 4x + 5$

b) $x^2 - 3x + 1$ e) $-x^2 - 4x - 5$

c) $-x^2 + 3x$ f) $x^2 + 6x + 9$

### Funciones de proporcionalidad inversa

28. Representa y estudia las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{-3}{x}$ d) $i(x) = \frac{1}{4x}$

b) $g(x) = \frac{4}{x}$ e) $j(x) = \frac{-3}{2x}$

c) $h(x) = \frac{-1}{2x}$ f) $k(x) = \frac{5}{2x}$

29. Representa y estudia las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{-1}{x+1}$ d) $i(x) = \frac{1}{2x-1}$

b) $g(x) = \frac{2}{x-3}$ e) $j(x) = \frac{-2}{3x+1}$

c) $k(x) = \frac{1}{2x+5}$ f) $k(x) = \frac{-3}{1-2x}$

30. Representa y estudia las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{2x} - 1$ d) $i(x) = \frac{1}{2x-1} - 1$

b) $g(x) = \frac{-1}{x} + 3$ e) $j(x) = \frac{-1}{2x+5} - \frac{1}{3}$

c) $h(x) = \frac{-2}{x-3} + 1$ f) $k(x) = \frac{3}{1-3x} - \frac{1}{5}$

### Función exponencial

31. Dada la función exponencial $f(x) = 0'2^x$, calcula:

a) $f(-1)$ e) $f(1)$

b) $f(-2)$ f) $f(2)$

c) $f(-3)$ g) $f(3)$

d) $f(-4)$ h) $f(4)$

32. Realiza una tabla de valores y representa las siguientes funciones exponenciales:

a) $f(x) = 4^x$ c) $h(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

b) $g(x) = -4^x$ d) $i(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

33. Representa la función $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ y estúdiala.

34. Representa las siguientes funciones exponenciales:

a) $f(x) = -\frac{1}{2^x}$ c) $h(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$

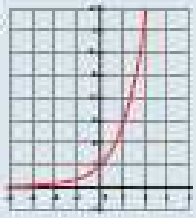
b) $g(x) = \frac{2}{3^x}$ d) $i(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2x}$

35. Asocia cada gráfica con la función que representa:

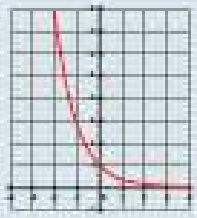
$f(x) = -e^x$ $h(x) = e^{-x}$

$g(x) = e^x$ $i(x) = -e^{-x}$

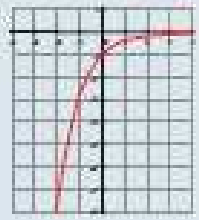
a)



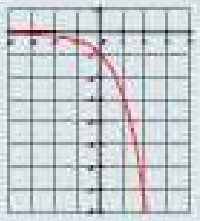
c)



b)



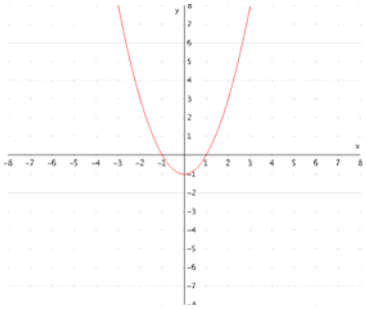
d)



**25.**

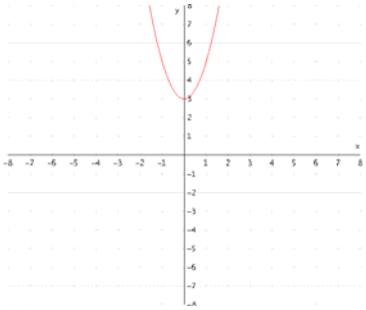
a) $f(x) = x^2 - 1$

| x | 0 | 1 | -1 | 2 | -2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | -1 | 0 | 0 | 3 | 3 |



b) $g(x) = 2x^2 + 3$

| x | 0 | 1 | -1 | 2 | -2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 3 | 5 | 5 | 11 | 11 |



c) $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$

| x | 0 | 1 | -1 | 2 | -2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 4 | 7/2 | 7/2 | 2 | 2 |

d) $i(x) = -2x^2 + 3$

| x | 0 | 1 | -1 | 2 | -2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 3 | 1 | 1 | -5 | -5 |

**26.** a) Eje OX: $0 = x^2 - 1 \Rightarrow x = +1 \Rightarrow (1,0), (-1,0)$

Eje OY: $f(0) = -1 \Rightarrow (0, -1)$

b) Eje OX: $0 = 2x^2 + 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{3}{2}} \notin \mathbb{R} \Rightarrow$ No corta el eje OX

Eje OY: $g(0) = +3 \Rightarrow (0,3)$

c) Eje OX: $0 = -\frac{1}{2}x^2 + 4 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow (2\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0)$

Eje OY: $h(0) = 4 \Rightarrow (0,4)$

d) Eje OX: $0 = -2x^2 + 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right), \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$

Eje OY: $i(0) = 3 \Rightarrow (0,3)$

**27.** $f(x) = x^2 + 6x + 9$

$g(x) = -x^2 - 4x - 5$

$h(x) = x^2 + 3x$

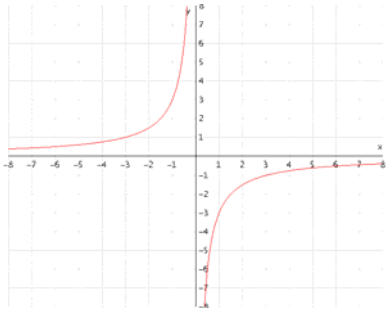
$i(x) = -x^2 + 3x$

**Funciones de proporcionalidad inversa.**

**28.** Todas las funciones de este apartado tienen asíntota horizontal en $y = 0$ (ver ejercicio 8 de este mismo tema) y asíntota vertical en $x = 0$, pues el denominador se anula en $x = 0$

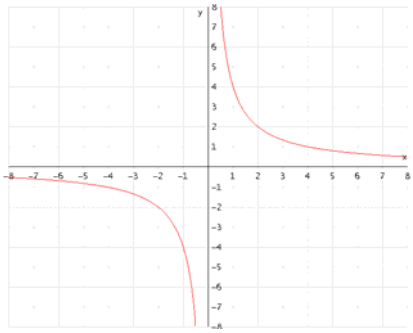
a) $f(x) - -\frac{3}{x}$

| x | 1 | -1 | 2 | -2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | -3 | 3 | -3/2 | 3/2 | -1 |



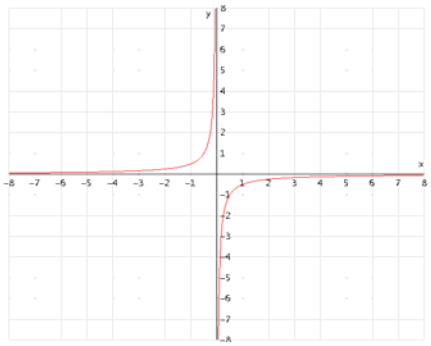
b) $g(x) = \frac{4}{x}$

| x | 1 | -1 | 2 | -2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 4 | -4 | 2 | -2 | 4/3 |



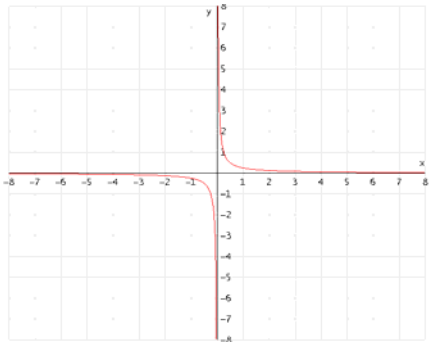
c) $h(x) = -\frac{1}{2x}$

| x | 1 | -1 | 2 | -2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | -1/2 | 1/” | -1/4 | 1/4 | -1/6 |



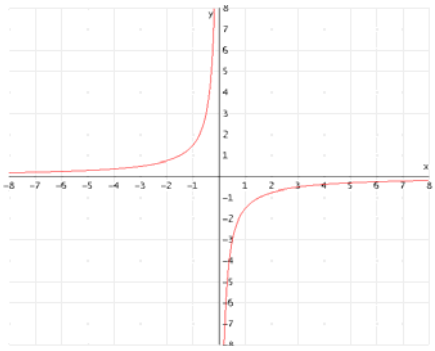
d) $i(x) = \frac{1}{4x}$

| x | 1 | -1 | 2 | -2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 1/4 | -1/4 | 1/8 | -1/8 | -1/12 |



e) $j(x) = -\frac{3}{2x}$

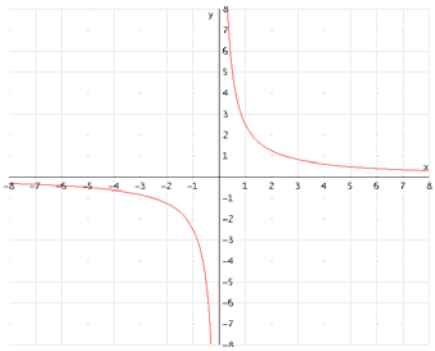
| x | 1 | -1 | 2 | -2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | -3/2 | 3/2 | -3/4 | 3/4 | -1/2 |



f) $k(x) = \frac{5}{2x}$

| x | 1 | -1 | 2 | -2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 5/2 | -5/2 | 5/4 | -5/4 | 5/6 |

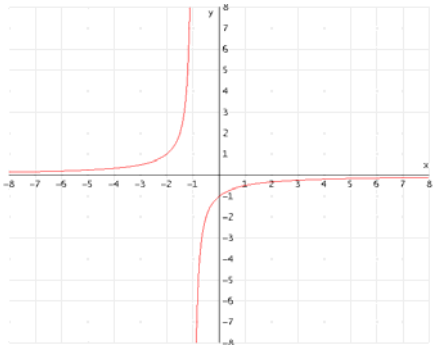


**29.** Todas las funciones de este apartado tienen asíntota horizontal en $y = 0$ (ver ejercicio 8 de este mismo tema). Para encontrar la asíntota vertical habrá que ver para qué valores de $x$ el denominador se anula.

a) $f(x) = -\frac{1}{x+1}$

Asíntota vertical en $x = -1$

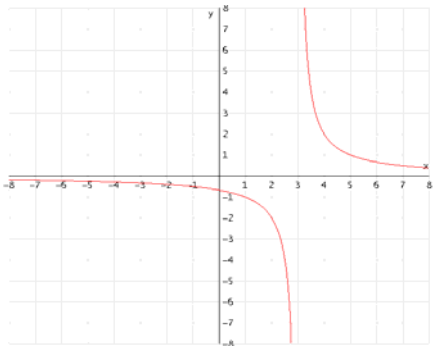
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 | -2 | 3 |
| y | -1 | -1/2 | -1/3 | 1 | -1/4 |



b) $g(x) = \frac{2}{x-3}$

Asíntota vertical en $x = 3$

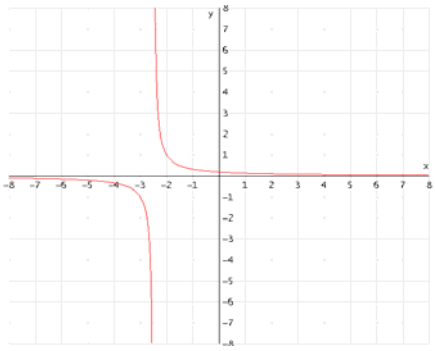
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 | -2 | -3 |
| y | -3 | -1 | -2 | -2/5 | -1/3 |



c) $h(x) = \frac{1}{2x+5}$

Asíntota vertical en $x = -\frac{5}{2}$

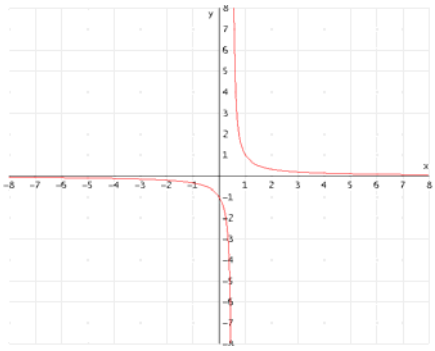
| x | 0 | 1 | 2 | -2 | -3 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 1/5 | 1/7 | 1/9 | 1 | -1 |



d) $i(x) = \frac{1}{2x-1}$

Asíntota vertical en $x = \frac{1}{2}$

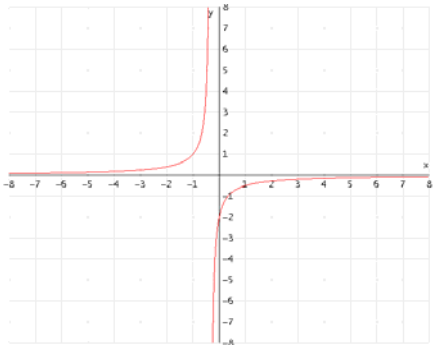
| x | 0 | 1 | 2 | -2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | -1 | 1 | 1/3 | -1/5 | 1/5 |



e) $j(x) = -\frac{2}{3x+1}$

Asíntota vertical en $x = -\frac{1}{3}$

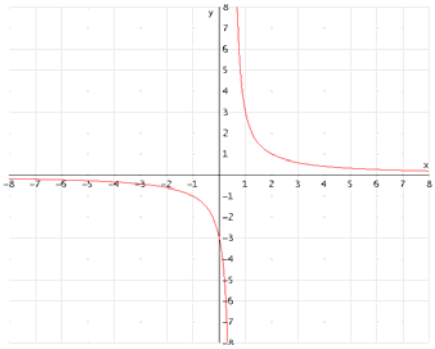
| x | 0 | 1 | 2 | -2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | -2 | -1/2 | -2/7 | 2/5 | -1/5 |



f) $k(x) = -\frac{3}{1-2x}$

Asíntota vertical en $x = \frac{1}{2}$

| x | 0 | 1 | 2 | -2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | -3 | 3 | 1 | -3/5 | 3/5 |



**30.** En este caso la determinación de asíntotas horizontales requiere un estudio individualizado para cada caso, pero siempre teniendo en cuenta que

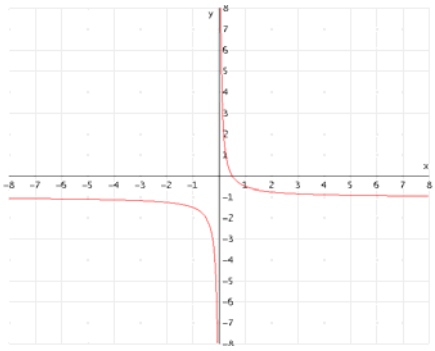
$\left[|x_0| \gg 0 \Rightarrow \varphi(x_0) \approx 0\right] \Leftrightarrow \varphi(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$ siendo $\varphi(x) = \frac{A}{Bx+C}$ $A, B, C \in \mathbb{R}$ (ver ejercicio 8 de este tema).

Las asíntotas verticales se hallarán, igualmente, buscando valores que anulen los denominadores.

a) $f(x) = \frac{1}{2x} - 1$

Asíntota horizontal en $y = -1$

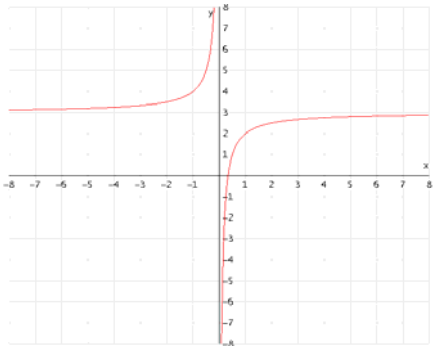
Asíntota vertical en $x = 0$



b) $g(x) = \frac{1}{x} + 3$

Asíntota horizontal en $y = 3$

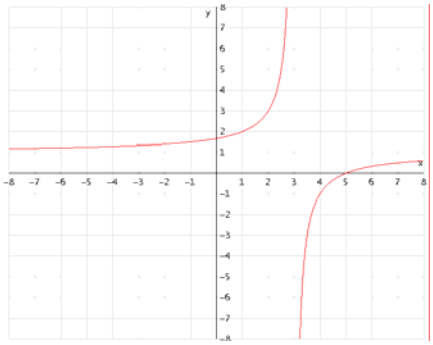
Asíntota vertical en $x = 0$



c) $h(x) = -\frac{2}{x-3} + 1$

Asíntota horizontal en $y = 1$

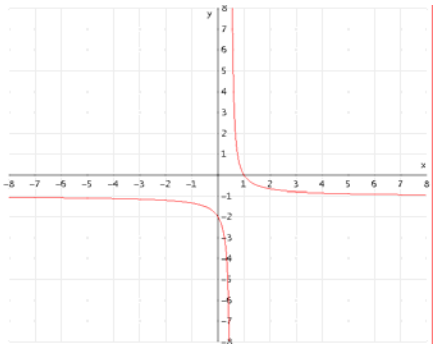
Asíntota vertical en $x = 3$



d) $i(x) = \frac{1}{2x-1} - 1$

Asíntota horizontal en $y = -1$

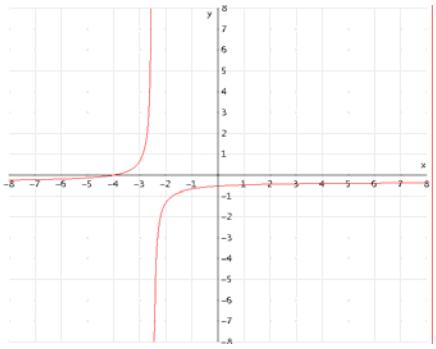
Asíntota vertical en $x = \frac{1}{2}$



e) $j(x) = \frac{1}{2x+5} \quad \frac{1}{3}$

Asíntota horizontal en $y = -\frac{1}{3}$

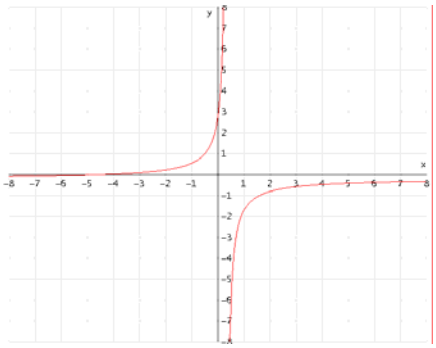
Asíntota vertical en $x = -\frac{5}{2}$



f) $k(x) = \frac{3}{1-3x} - \frac{1}{5}$

Asíntota horizontal en $y = -1/5$

Asíntota vertical en $x = \frac{1}{3}$



**Función exponencial.**

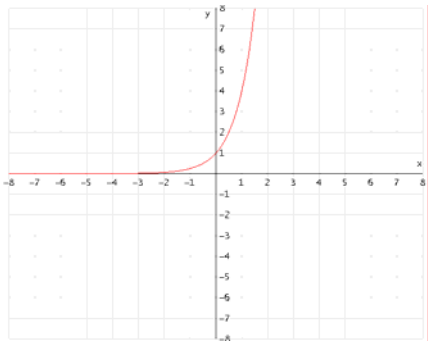
**31.** $f(x) = 0'2^x = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

a) $f(-1) = 5$ b) $f(-2) = 25$ c) $f(-3) = 125$ d) $f(-4) = 625$

e) $f(1) = \frac{1}{5}$ f) $f(2) = \frac{1}{25}$ g) $f(3) = \frac{1}{125}$ h) $f(4) = \frac{1}{625}$

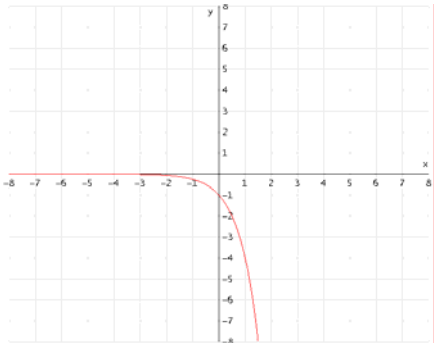
**32.** a) $f(x) = 4^x$

| x | 0 | 1 | -1 | 2 | -2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 1 | 4 | 1/4 | 16 | 1/16 |



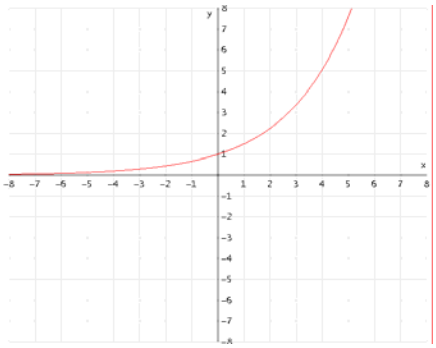
b) $g(x) = -4^x$

| x | 0 | 1 | -1 | 2 | -2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | -1 | -4 | -1/4 | -16 | -1/16 |



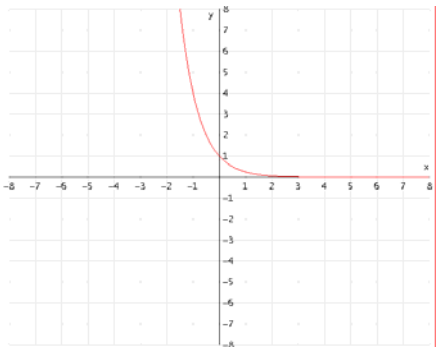
c) $h(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

| x | 0 | 1 | -1 | 2 | -2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 1 | 3/2 | 2/3 | 9/4 | 4/9 |

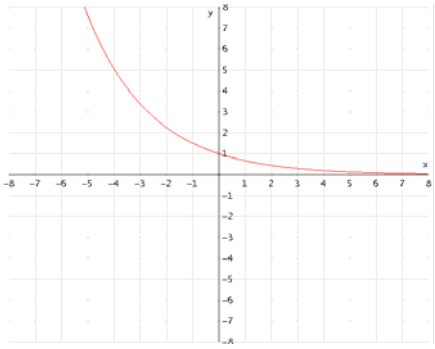


d) $i(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

| x | 0 | 1 | -1 | 2 | -2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 1 | 1/4 | 4 | 1/16 | 16 |

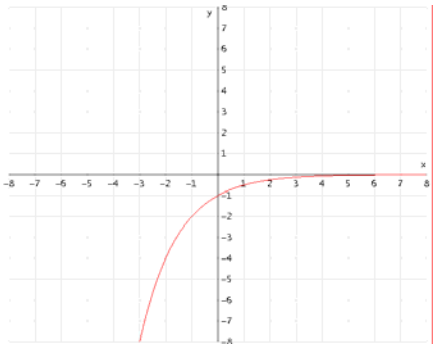


**33.** $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad \frac{2}{3} < 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} f \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \\ f \xrightarrow[x\to-\infty]{} \infty \end{cases}$



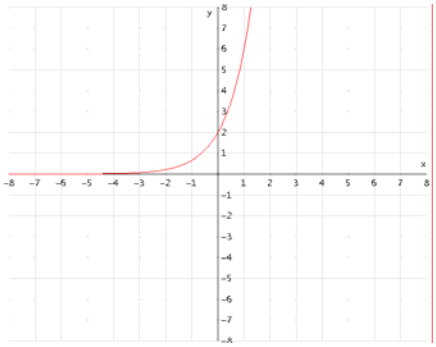
**34.** a) $f(x) = -\frac{1}{2^x} = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$

$\frac{1}{2} < 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} f \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \\ f \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty \end{cases}$



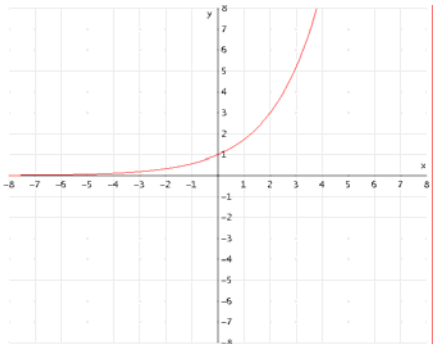
b) $g(x) = \frac{2}{3^{-x}} = 2 \cdot 3^{x}$

$$3 > 1 \;\Rightarrow \begin{cases} f \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty \\ f \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0 \end{cases}$$



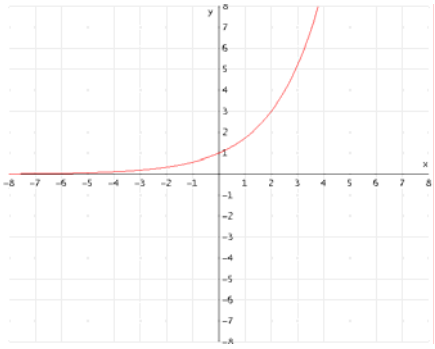
c) $h(x) = \left(\sqrt{3}\right)^{x} = 3^{\frac{x}{2}}$

$$\sqrt{3} > 1 \;\Rightarrow \begin{cases} f \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty \\ f \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0 \end{cases}$$



d) $i(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x}$

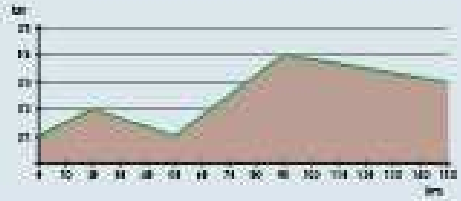
$$\frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow \begin{cases} f \xrightarrow[x \to \infty]{} 0 \\ f \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty \end{cases}$$



**35.** a) $g(x)$ b) $i(x)$ c) $h(x)$ d) $f(x)$

## → PROBLEMAS

36. La siguiente figura representa una etapa de la Vuelta ciclista. Determina la pendiente media de cada tramo de la etapa.



37. Para poder arreglar 3 persianas, un operario necesita 30 min:

a) Construye una tabla con el número de persianas y el tiempo en horas.

b) Representa una gráfica utilizando la tabla del apartado anterior.

38. Dos grifos iguales tardan un total de 3 h en llenar un depósito de agua:

a) Construye una tabla con 5 valores donde se relacione el número de grifos iguales y el tiempo que tardan en llenar el depósito.

b) Realiza una representación gráfica utilizando la tabla del apartado a). ¿De qué función se trata?

39. Una cuesta tiene una pendiente del 12 % y avanzamos por ella hasta ascender 4 m. ¿Qué distancia hemos recorrido?

Nota: para realizar el problema escribe la pendiente en tanto por uno y representa la recta asociada a dicha pendiente.

40. Un jugador de fútbol golpea un balón que describe una trayectoria expresada en metros determinada por la función:

$$f(x) = -x^2 + 7x$$

Calcula:

a) la distancia que alcanzará el balón cuando bote en el suelo.

b) la altura máxima que alcanzará el balón.

41. Un proyectil sigue una trayectoria determinada por la función:

$$f(x) = -6x^2 - 30x - 36$$

Calcula:

a) el punto donde el proyectil alcanza la altura máxima.

b) la altura máxima que alcanza el proyectil.

c) el punto de partida y de llegada del proyectil.

42. En una probeta de laboratorio tenemos una célula. Si se reproduce por bipartición cada minuto, calcula:

a) el número de células pasados 2 min.

b) el número de células pasados 3 min, 4 min y 5 min.

c) el número de células pasada 1 h.

43. Si tenemos 3 500 € invertidos, con un interés del 3% mensual:

a) ¿Qué capital tendremos pasados 2 años?

b) Escribe la función que representa la inversión realizada.

44. Si realizamos una inversión de 250 €, con un interés del 5% anual sin retirar los intereses, ¿cuántos años pasarán hasta tener un capital de 289'41 €?

45. Realizamos una inversión de 3 000 € sin retirar los intereses. Si al cabo de 5 años tenemos un capital de 4 207'66 €, ¿a qué interés hemos realizado la inversión?

**36.**

Tramo 1: $m = \frac{0'2-0'1}{20-0} = \frac{5}{1000}$

Tramo 2: $m = \frac{0'1-0'2}{50-20} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1000}$

Tramo 3: $m = \frac{0'4-0'1}{90-50} = \frac{7'5}{1000}$

Tramo 4: $m = \frac{0'3-0'4}{150-100} = -\frac{2}{1000}$

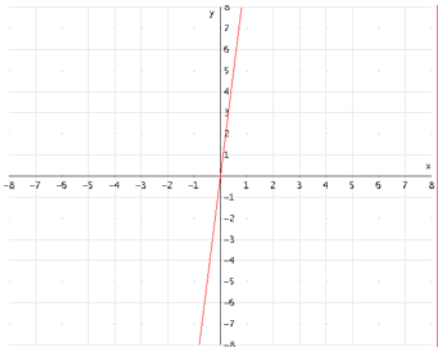
**37.** Existe una relación de proporcionalidad directa entre el número de persianas y el tiempo que el operario necesita, luego:

$\frac{y}{x} = k$ siendo $y$ el tiempo y $x$ el número de persianas. En este caso $k = \frac{30}{3} min/persiana$

a)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | 3 | 4 | 1 | 2 | 5 |
| y | 30 | 40 | 10 | 20 | 50 |

b) El resultado es una recta:



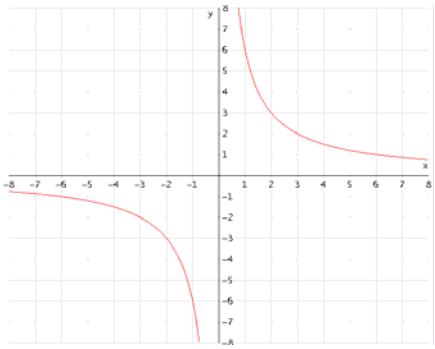
**38.** Existe una relación de proporcionalidad indirecta entre el número de grifos y el tiempo que se tarda:

$y \cdot x = k$ donde $y$ es el tiempo, $x$ es el número de grifos y $k$ es la constante de proporcionalidad que vale $k = 2 \cdot 3 = 6$

a)

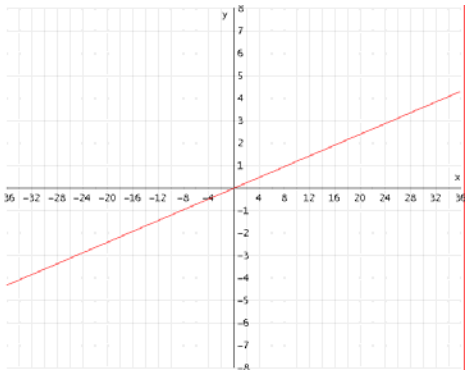
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | 2 | 3 | 1 | 6 | 4 |
| y | 3 | 2 | 6 | 1 | 1‘5 |

b) La gráfica es una hipérbola en la cuál sólo hay que considerar la rama de valores positivos:



**39.** $12\% = \frac{12}{100} = 0'12$

Representando una recta con pendiente 12/100 podemos calcular la abscisa correspondiente a la ordenada 4:



El valor exacto se consigue analíticamente con la ecuación de la recta:

$$y - \frac{12}{100}x$$

$$4 = \frac{12}{100}x \Rightarrow x = \frac{100}{3}m$$

**40.** a) Los botes en el suelo corresponden con los puntos de corte con el eje OX de la función $f(x) = -x^2 + 7x$:

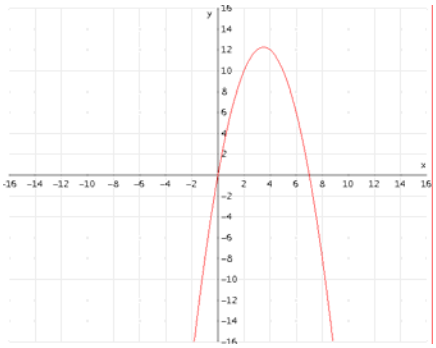
$$0 = -x^2 + 7x \Rightarrow x(-x+7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 7 \end{cases}$$

Luego el balón golpea el suelo a los 7 metros.

b) La altura máxima corresponde a la ordenada del vértice de la parábola, que es $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$, luego la altura máxima es:

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = -\frac{49}{4} + \frac{49}{2} = \frac{49}{4}m$$

Gráfica de la función:



**41.** a) El punto coincide con la abscisa del vértice de la parábola, es decir:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow \; x_v = -\frac{30}{12} = -\frac{5}{2}$$

b) La altura máxima es $f\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}$

c) El punto de partida y llegada son los cortes con el eje OX:

$$0 = -6x^2 - 30x - 36 \;\rightarrow\; x = \frac{30 \pm \sqrt{900-864}}{-12} = \frac{30 \pm 6}{-12} = \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \end{cases} \rightarrow (-3,0)(-2,0)$$

**42.** El número de células en función del tiempo (discretizado en minutos) es:

$y(t) = 2^t$

a) $y(2) = 2^2 = 4$

b) $y(3) = 8, \quad y(4) = 16, \quad y(5) = 32$

c) $y(60) \cong 1'153 \cdot 10^{18}$

**43.** a) Siguiendo la fórmula del interés:

$$C = 3500€ \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^{24} = 7114'78€$$

b) $C = 3500 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^t$

**44.** De fórmula de interés:

$$C = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{C}{C_0}\right)}{\ln\left(1 + \frac{r}{100}\right)}$$

Sustituyendo:

$$t = \frac{\ln\left(\frac{389'41}{280}\right)}{\ln\left(1+\frac{5}{100}\right)} \cong 3\ años$$

**45.** De la fórmula de interés:

$$C = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \Leftrightarrow r = 100 \cdot \left(\left(\frac{C}{C_0}\right)^{\frac{1}{t}} - 1\right)$$

Sustituyendo:

$$r - 100 \cdot \left(\left(\frac{4207'66}{3000}\right)^{\frac{1}{5}} - 1\right) \cong 7$$