DINÁMICA DEL PUNTO MATERIAL

1º.-Un bloque de 20Kg descansa sobre una superficie horizontal. El coeficiente estático de rozamiento es 0,4 y el cinético, 0,2.

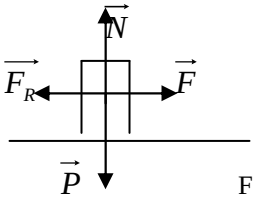
a)¿Cuánto vale la fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque?

b)¿Qué valor tomará dicha fuerza si actúa sobre el bloque una fuerza horizontal de 60 N?

c)¿Cuál es la fuerza mínima que iniciará el movimiento del bloque?

d)¿Cuál es la mínima fuerza que mantendrá el movimiento una vez iniciado éste?

e)Si la fuerza horizontal es de 100 N, ¿cuánto valdrá la fuerza de rozamiento?



a) Si el bloque está en reposo y F = 0 ⇒ $F_R = 0$

b) $F_{R_{máx.}} = \mu_e . N$; N = P ; $F_{R_{máx.}} = \mu_e m.g$ = 0'4.20 Kg. 9'8 m/s^2 = 80 N

F = 60 N, a = 0 ; $F - F_R = 0$; $F_R = F = 60$ N

c) $F_{mín} = F_{R_{máx.}}$ = 80 N

d) F = $F_{R_{mín.}}$ = μ_c.N = 0'2.20 kg.9'8 m/s^2 = 40 N

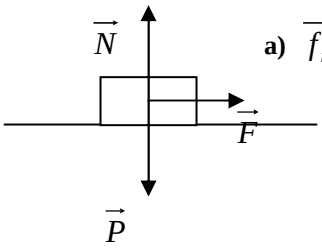
e) F = 100 N ; $F_{R_{mín.}}$ = 40 N ; $F - F_R$ = m.a a = $\dfrac{F - F_R}{m} = \dfrac{100N - 40N}{20kg}$ = 3 m/s^2

2º.-Un bloque de 10 Kg de masa al que se ha atado una cuerda ligera está en reposo sobre una superficie horizontal pulida. El bloque es arrastrado tirando de la cuerda con una fuerza horizontal constante de 1N.

a)¿Cuál es la aceleración, velocidad y posición del cuerpo en función del tiempo?

b)¿Qué valores tienen esas magnitudes al cabo de un minuto de iniciarse el movimiento?

c)¿Qué tipo de movimiento lleva el bloque?



a) $\vec{f}_n = \vec{F} + \vec{P} + \vec{N}$; $\vec{F} = m.\vec{a}$; $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$; a = $\dfrac{F}{m} = \dfrac{1N}{10kg} = 0'1 m/s^2$

$\vec{v} = \int_{t_o}^{t} \vec{a}.dt$; $\vec{v} = \int_{t_o=0}^{t} \vec{a}.dt = \int_0^t 0'1.dt$ = 0'1 $|t|_0^t$ = 0'1 t m/s

$\vec{r} = \int_0^t \vec{v}.dt$; r = $\int_0^t v.dt = \int_0^t 0'1t.dt$ = 0'1 $\left|\dfrac{t^2}{2}\right|_0^t = \dfrac{0'1}{2}t^2 = 0'05t^2$ m

b) t = 60 s, a = 0'1 m/s^2 , v = 0'1 t m/s = 0'1m/s^2.60 s = 6 m/s ; r = 0'05 .3600 m = 180 m

ó a = $\dfrac{F}{m} = \dfrac{1N}{10kg} = 0'1 m/s^2$; v = a.t = 6 m/s ; e = $\dfrac{1}{2}$ a.t^2 = 180 m

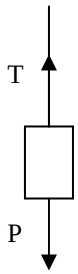
c) m.r.u.a.

3º.- Un cuerpo de 2 Kg de masa pende del extremo de un cable. Calcular la tensión del mismo, si la aceleración es :

a) 5 m/s^2, hacia arriba

b) 5 m/s^2, hacia abajo.

m = 2 Kg ; T?



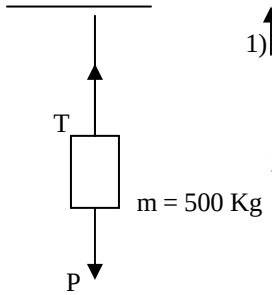
a) ↑ a = 5 m/s^2 T – P = m a T = P + m a = 2 Kg.9'8 m/s^2 + 2 Kg . 5 m/s^2 = 30 N

b) ↓ a = 5 m/s^2 P – T = m a T = P – m a = 20 N – 10 N = 10 N

4º. Un montacargas de 500 Kg arranca hacia arriba con una aceleración de 0'5 m/s^2 hasta alcanzar una velocidad uniforme de 1 m/s, y se detiene con una aceleración negativa de 0'6 m/s^2.

a) ¿Qué tensión experimenta el cable del cual está suspendido el montacargas en las tres fases del movimiento?

b) Si el cable se rompe cuando se le somete a una tracción superior a 10000 N, ¿cuál es la máxima aceleración del arranque posible?



1) ↑ a = 0'5 m/s^2 T – P = m a T = P + m a = 500 Kg.9'8 m/s^2 + 500 Kg . 5 m/s^2 = = 5250 N

2) ↑ V = 1 m/s T – P = 0 T = P = 5000 N

3) ↓ a = 5 m/s^2 P – T = m a T = P – m a = 5000 N – 300 N = 4700 N

b) T – P = m a $a_{máx.} = \dfrac{T_{máx.} - P}{m} = \dfrac{10000N - 5000N}{500kg}$ = 10 m/s^2

5º.- A un cuerpo de 30 g de masa e inicialmente en reposo se le aplica una fuerza constante e igual a 0,6 N durante 10 s; a los 4 s de haber dejado de actuar la fuerza se le aplica otra también constante de 1,8 N, en la misma dirección que la primera pero de sentido contrario. Por efecto de esta segunda fuerza el cuerpo se para. Calcular:

a) Velocidad del cuerpo en los instantes 6s, 10s, 11s y 14s

b) Tiempo que tarda en pararse el cuerpo

c) Distancia total recorrida. (Se supone nulo el rozamiento)

m = 30.10^{-3} Kg, F_1 = 0'6 N, t_1 = 10 s t_2 = 14 s F_2 = 1'8 N V? t_1 = 6 s; t_2 = 10 s; t_3 = 11 s; t_4 = 14 s

$F_1 = m\, a_1$ $a_1 = \dfrac{F_1}{m} = \dfrac{0'6N}{30.10^{-3}Kg}$ = 20 m/s^2

$V_f = V_o + a\,t$ $\begin{cases} V_6 = a\,t = 20\ m/s^2.6\ s = 120\ m/s \\ V_{10} = a\,t = 20\ m/s^2.10\ s = 200\ m/s \end{cases}$

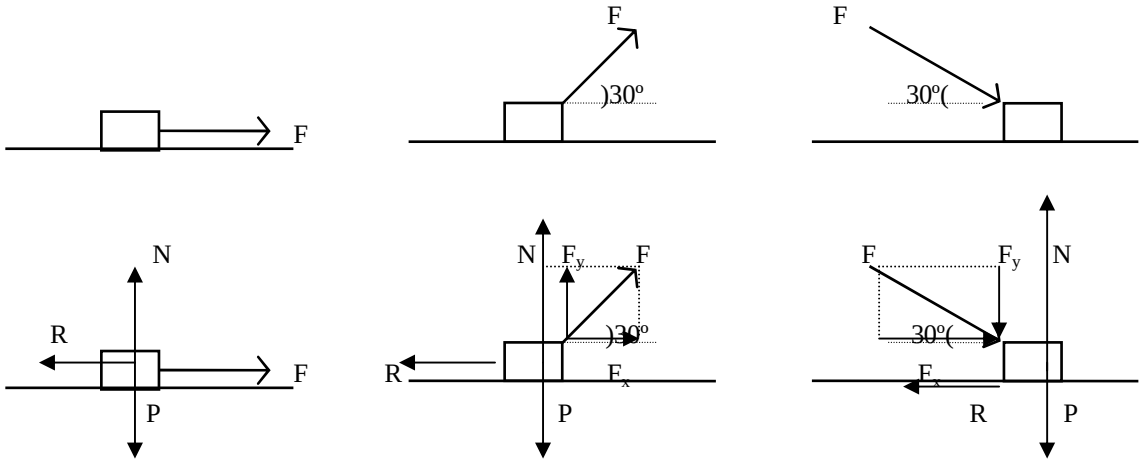
$V_{10} = V_{11} = V_{12} = V_{13} = V_{14}$ = 200 m/s

$a_2 = \dfrac{F_2}{m} = \dfrac{1'8N}{30.10^{-3}Kg}$ = 60 m/s^2 $V_f = V_o - a\,t$ $t = \dfrac{V_f - V_o}{a} = \dfrac{-200m/s}{-60m./s^2} = \dfrac{10}{3}s$

$e = e_1 + e_2 + e_3 = \dfrac{1}{2}\, a_1\, \Delta t_1^2 + V.\Delta t_2 + V_{14}\, \Delta t_3 - \dfrac{1}{2} a_2 \Delta t_3^2 = \dfrac{1}{2}$ 20 m/s^2 100 s^2 + 200 m/s 4 s + 200 m/s $\dfrac{10}{3}$ s -

- $\dfrac{1}{2}$ 60 m/s^2 $\dfrac{100}{9}s^2$ = 1000 m + 800 m + ($\dfrac{2000}{3} - \dfrac{100}{3}$) m = $\dfrac{6400}{3}m$

6º.- Sobre un bloque de 20 kg situado sobre una superficie horizontal se aplica una fuerza de 200 N. Si el coeficiente de rozamiento vale 0,2, calcular la velocidad adquirida por el cuerpo al cabo de 3 s en los siguientes casos:



a) $\Sigma F_y = 0$ N = P = m g = 20 Kg . 9'8 m/s^2 = 200 N R = μ N = 0'2.200 N = 40 N

F – R = m a a = $\frac{F-R}{m} = \frac{200N-40N}{20Kg}$ = 8 m/s^2 ; vc = a t = 8 m/s^2.3 s = 24 m/s

b) $\vec{P} + \vec{F_y} + \vec{N} = 0$ N = P - F_y = 200 N – 200 N sen 30º = 100 N ; R = μ N = 0'2.100 N = 20 N

F_x – R = m a a = $\frac{F_x - R}{m} = \frac{F\cos 30º - R}{m} = \frac{200N.0'866-20N}{20Kg}$ = 7'66 m/s^2 ;

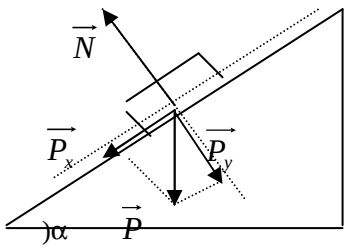
vc = a t = 7'66 m/s^2.3 s = 22'98 m/s

c)0 N = P + F_y = 200 N + 200 N sen 30º = 300 N ; R = μ N = 0'2.300 N = 60 N

F_x – R = m a a = $\frac{F_x - R}{m} = \frac{F\cos 30º - R}{m} = \frac{200N.0'866-60N}{20Kg}$ = 5'66 m/s^2 ;

vc = a t = 5'66 m/s^2.3 s = 16'98 m/s

7º.-Calcular la aceleración con que desciende un cuerpo por una superficie pulida, formando un ángulo α con la horizontal.

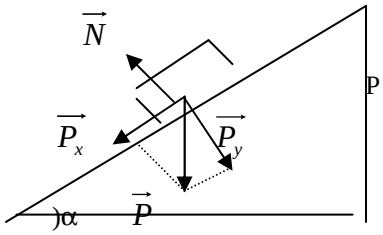


P { P_x = P sen α ; P_y = P cos α

$\vec{f_n} = \vec{P_x} + \vec{P_y} + \vec{N} = \vec{P_x}$

P_x = m a ; a = $\frac{P_x}{m} = \frac{mgsen\alpha}{m}$ = g sen α

8º.- ¿Qué relación hay entre el tiempo t que necesita un cuerpo para caer verticalmente desde lo alto de un plano inclinado α y el tiempo t´ que necesita para caer a lo largo del plano? NOTA: Suponer rozamiento nulo.



$$\begin{cases} P_x = P \text{ sen } \alpha \\ P_y = P \cos \alpha \end{cases} \qquad \vec{f_n} = \vec{P_x} + \vec{P_y} + \vec{N} = \vec{P_x}$$

$$P_x = m\,a \quad ; \quad a = \frac{P_x}{m} = \frac{mgsen\alpha}{m} = g \text{ sen } \alpha$$

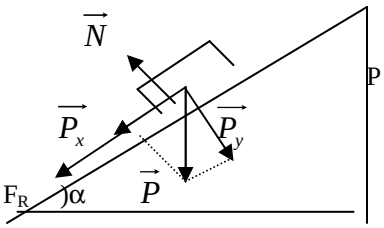
$$h = \frac{1}{2} g.t_1^2 \qquad t_1^2 = \frac{2.h}{g} = \frac{2.l.sen\alpha}{g}$$

$$h = \frac{1}{2} g.t_2^2 \qquad t_2^2 = \frac{2.l}{a} = \frac{2.l}{g.sen\alpha}$$

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{\dfrac{2-.l.sen\alpha}{g}}{\dfrac{2.l}{g.sen\alpha}} = \text{sen}^2\,\alpha$$

$$\frac{t_1}{t_2} = sen\alpha$$

9º.- Un bloque de 2 Kg descansa sobre un plano inclinado 30º respecto a la horizontal. El coeficiente estático de rozamiento es 0'6. a) ¿Qué fuerza paralela al plano hay que aplicar al bloque para que empiece a moverse hacia arriba? B) Si el coeficiente de rozamiento dinámico es 0'55, ¿con qué aceleración se moverá el bloque despuès?



$$\begin{cases} P_x = P \text{ sen } \alpha \\ P_y = P \cos \alpha; \; ; \end{cases}$$

$N = P_y$; $\quad F_R = \mu\, N = \mu\, P \cos \alpha$;

$F = P_x + F_R \qquad F = P \text{ sen } \alpha + \mu\, P \cos \alpha; = m\, g \text{ sen } \alpha + \mu\, m\, g \cos \alpha; = = m\, g\, (\text{ sen } \alpha + \mu \cos \alpha)$

$F = 2 \text{ Kg} \,.\, 9'8 \text{ m/s}^2 \,(\, 0'5 + 0'6 \,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;) =$

b) $F_R = \mu_2\, N = \mu_2\, P \cos \alpha$;

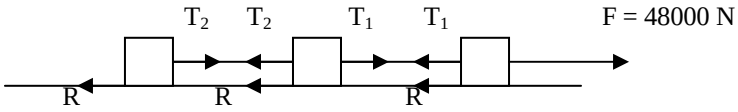
$F - P_x - F_R = m\, a$

$$a = \frac{F - P_x - F_R}{m} = \frac{mg(sen\alpha + \mu_e.\cos\alpha) - m.g.sen\alpha - \mu_d.m.g.\cos\alpha}{m} = g\,(\,\mu_e - \mu_d\,) \cos \alpha$$

10º.- Un tren suburbano está formado por tres vagones de 15 T cada uno. El primero de ellos actúa de máquina y ejerce una fuerza de tracción de 48000 N. Sabiendo que la fuerza de rozamiento en cada uno de los vagones es de 1000 N, calcular:

a) la aceleración del tren

b) la tensión en el acoplamiento entre el primero y el segundo de los vagones. Idem entre el segundo y el tercero.



$$\left.\begin{array}{l} F - T_1 - R = m\,a \\ T_1 - T_2 - R = m\,a \\ T_2 - R = m\,a \end{array}\right\} \qquad F - 3\,R = 3\,m\,a$$

a) $a = \dfrac{F - 3R}{3m} = \dfrac{48000N - 3.1000N}{3.15000kg} = \dfrac{45000N}{45000Kg} = 1\ m/s^2$

b) $T_1 = F - R - m\,a = 48000\ N - 1000\ N - 15000\ Kg.1m/s^2 = 32000\ N$

c) $T_2 = T_1 - R - m\,a = T_2 + m\,a = 1000\ N + 15000\ N = 16000\ N$

11º.- Un atleta lanza un cuerpo de 10 Kg con una fuerza de 250 N. Si el impulso dura 2 s, calcular la velocidad de salida del cuerpo.

$\vec{I} = \overrightarrow{\Delta P}$ $\quad I = \Delta P \quad F.t = m\,v_f - m\,v_o \quad v_o = 0 \quad F\,.\,t = m\,v\ ; \quad v = \dfrac{F.t}{m} = \dfrac{250N.2s}{10kg} = 50\ m/s$

13º.-Un yate de 200 T lleva una velocidad de 25 Km/h. ¿Qué fuerza media es necesaria para detenerlo en 80 s?

$\vec{I} = \overrightarrow{\Delta P}$ $\quad I = \Delta P \quad F.t = m\,v_f - m\,v_o \quad v_f = 0 \quad F\,.\,t = -\,m\,v_o$

$v_o = 25\ \dfrac{Km.1000m/km}{h.3600s/h} = \dfrac{250}{36}\ m/s \qquad F = \dfrac{-m.v_o}{t} = \dfrac{-2.10^5\,Kg.\dfrac{125}{18}\,m/s}{30s} = -\,17361\ N$

12º.- Un vagón de 65 T se mueve con una velocidad de 50 cm/s y quiere detenerlo un obrero, que hace una fuerza de 600 N en sentido contrario al del movimiento del vagón. ¿ Cuánto tiempo tardará en pararlo y qué espacio recorrerá el vagón durante ese tiempo ?

$F\,t = m\,V_f - m\,V_o \qquad F\,t = -\,m\,V_o$

$$t = \frac{-mV_o}{F} = \frac{-65.10^3\,Kg.50.10^{-2}\,m/s}{-600N} = 54'16\ s$$

$a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{600N}{65.10^3\,Kg} = 9'23.10^{-3}\ m/s^2$

$V_o^2 = 2\,a\,e \qquad e = \dfrac{V_o^2}{2a} = \dfrac{0'5^2\,m^2.s^{-2}}{2.9'23.10^{-3}\,m.s^{-2}} = 13'54\ m$

13º.- Un cuerpo de masa 8 Kg se mueve a la velocidad de 10 m/s. Si una fuerza constante y opuesta al movimiento actúa durante 3 s comunicándole una velocidad de 2 m/s en sentido contrario, calcular:

a) el impulso que actúa sobre el cuerpo

b) el valor de la fuerza

c) el momento lineal del cuerpo antes de actuar la fuerza y después.

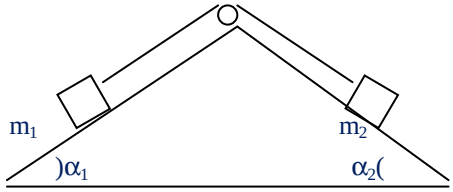
a) $I = f\,t = \Delta P = m\,V_2 - m\,V_1 = 8\ Kg\,(-2\ m/s) - 8\ Kg\ 10\ m/s = -96\ Kg.m/s$

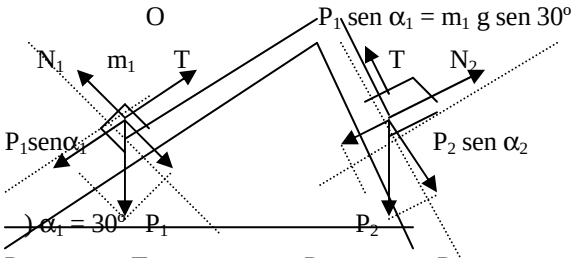
b) $F = \dfrac{I}{t} = \dfrac{\Delta P}{t} = \dfrac{-96 Kg.m/s}{3s} = -32\ N$

c) $P_1 = m\,V_1 = 80\ Kg.m/s$

$P_2 = m\,V_2 = -16\ Kg.m/s$

14º.- Dado el sistema de la figura, determinar para $m_2 = 2m_1$ y $\alpha_2 = 2\alpha_1$, la aceleración del sistema y la tensión en las cuerdas en el caso de no existir rozamiento ($\alpha_1 = 30º$)





$P_1 \text{ sen } \alpha_1 = m_1\, g \text{ sen } 30º$

$P_2 \text{ sen } \alpha_2 = m_2\, g \text{ sen } 60º = 2\, m_1 \text{ sen } 60º$

$P_2 \text{ sen } \alpha_2 > P_1 \text{ sen } \alpha_1$

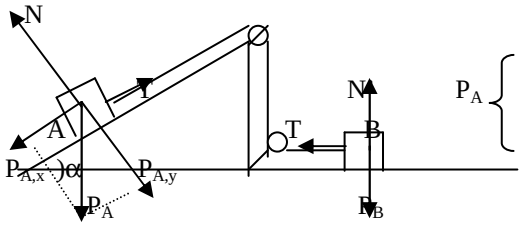
$$\left.\begin{array}{l} P_2 \text{ sen } \alpha_2 - T = m_2\, a \\ T - P_1 \text{ sen } \alpha_1 = m_1\, a \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} P_2 \text{ sen } \alpha_2 - P_1 \text{ sen } \alpha_1 = (m_1 + m_2)\, a \\ 2\, m_1\, g\, \dfrac{\sqrt{3}}{2} - m_1\, g\, \dfrac{1}{2} = 3\, m_1\, a \end{array}$$

$$a = \frac{(\sqrt{3} - 0'5)g}{3} = \frac{g(1'73 - 0'5)}{3} = 0'41\ g = 4'02\ m/s^2$$

15º.- En el sistema de la figura, los dos bloques A y B tienen la misma masa igual a 20 kg, y se suponen superficies pulidas y poleas ligeras y sin rozamiento. Calcular:

a) Aceleración del sistema.

b) Tiempo transcurrido para que el bloque A recorra 2 m descendiendo por el plano inclinado.



$m_A = m_B = m$

$$P_A \left\{ \begin{array}{l} P_{A,x} = m_A\, g \text{ sen } \alpha \\ P_{A,y} = m_A\, g \cos \alpha \end{array} \right.$$

$$\left.\begin{array}{l} T = m_B.a \\ P_{A,x} - T = m_A\, a \end{array}\right\}$$

$P_{A,x} = (m_A + m_B)\, a$; $mg \text{ sen } \alpha = 2\, m\, a$; $a = \dfrac{g sen\alpha}{2} = \dfrac{9'8 m/s^2\, 0'5}{2} = 2'45\ m/s^2$

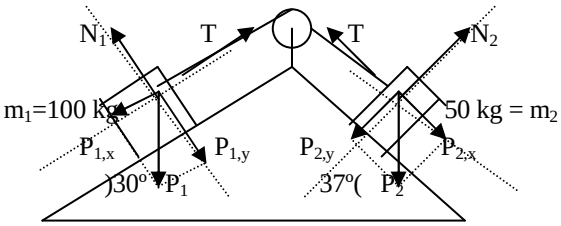
b) $s = \frac{1}{2}\, a\, t^2$ $\quad t = \sqrt{\frac{2.e}{a}} = \sqrt{\frac{2.2m}{2'45m/s^2}} = 1'28\ s$

16º.-En el esquema de la figura se suponen superficies pulidas y sin rozamiento. Calcular:

a) ¿En qué sentido se moverá?

b) ¿Con qué aceleración?

c) ¿Cuál es la tensión de la cuerda?



a) $P_{1,x} = P_1 \text{ sen } 30º = 500\ N$

$P_{2,x} = P_2 \text{sen} 37º = 50Kg.9'8\ m/s^2.0'6 = 300N$

$P_{1,x} > P_{2,x} \Rightarrow \longleftarrow$

b) $\left.\begin{array}{l} P_{1,x} - T = m_1\, a \\ T - P_{2,x} = m_2\, a \end{array}\right\}$ $P_{1,x} - P_{2,x}\ (m_1 + m_2)\ a$

$$a = \frac{P_{1,x} - P_{2,x}}{m_1 + m_2} = \frac{500N - 300N}{100Kg + 50kg} = 1'3\ m/s^2$$

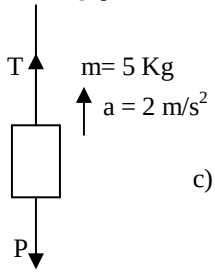
c) $T = P_{1,x} - m_1\, a = 500\ N - 100\ kg.\ 1'3\ m/s^2 = 500\ N - 130\ N = 370\ N$

17º.-Un bloque de 5 Kg está sostenido por una cuerda y es arrastrado hacia arriba con una aceleración de 2 m/s^2. Se pide:

a) la tensión de la cuerda

b) si después de iniciado el movimiento la tensión de la cuerda se reduce a 50 N, ¿ qué clase de movimiento tendrá lugar ?

c) si se afloja la cuerda por completo se observa que el bloque continúa moviéndose, recorriendo 2 m antes de pararse, ¿ qué velocidad tenía ?

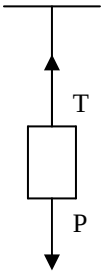


a) $T - P = m\, a$ $\quad T = m\, g + m\, a = m\,(g + a) = 5\ Kg\ .\ 11'8\ m/s^2 = 59\ N$

b) $T = 49\ N$ $\quad T - P = m\, a$ $\quad 49\ N - 49\ N = 0 = m\, a$ $\quad a = 0$ $\quad V = Cte.$ M.R.U.

c) $\left.\begin{array}{l} h = V_o\, t - \frac{1}{2}\, g\, t^2 \\ V_f = V_0 - g\, t \end{array}\right\}$ $h = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{g}$ $\quad V_0 = \sqrt{2gh} = 6'26\ m/s$

18º.- Un dinamómetro se halla suspendido del techo de una cabina de un ascensor y cuelga una masa de 10 Kg. Hallar la indicación del dinamómetro cuando el ascensor está parado y cuando sube con la aceleración constante de 2 m/s^2.



a) $V = 0$

$T = P = m\, g = 10\ Kg\ .9'8\ m/s^2 = 98\ N$

b) $\uparrow$ $a = 2\ m/s^2$ $\quad T - P = m\, a$

$T = Pap = P + m\, a = 98\ N + 20\ N = 118\ N$

$Pap = P + f_i = m\, g + m\, a$

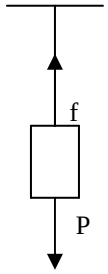
19º.- Un cuerpo pende de una balanza de resorte colgada del techo de la cabina de un ascensor. Cuando el ascensor desciende con una aceleración de 1´26 m/s^2, la balanza señala un peso de 17’5 N.

1.- ¿Cuál es el verdadero peso del cuerpo?

2.- ¿Cuándo marcará la balanza 22’5 N?

3.- ¿Cuánto indicará la balanza si se rompe el cable del ascensor?

1.-



$$\vec{f} + \vec{P} = m.\vec{a}$$

P – f = m a P = f + m a m g = 17’5 N + m .1’26 m/s^2 m (g – a) = f

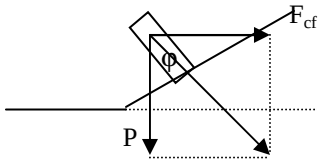
$$m = \frac{f}{g-a} = \frac{17'5N}{(9'8-1'26)m.s^{-2}} = \frac{17'5N}{8'54m.s^{-2}} = 2'05 \text{ Kg}$$

P = m g = 2’05 Kg .9’8 m/s^2 = 20’09 N = 20’1 N

2.- f = 22’5 N, P = 20’1 N f – P = m a $a = \frac{f-P}{m} = \frac{22'5N - 20'1N}{2'05Kg} = 1'17 \text{ m/s}^2$

3.- P – f = m g f = P – m g = 0

20º.-Un motorista da vueltas alrededor de una pista circular de 100 m de diámetro y que posee un peralte de 30º Calcular la velocidad de la motocicleta para que el sistema se mantenga en posición perpendicular a la pista. (16,82 m/s)



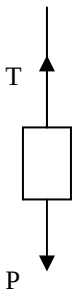
$$\text{tg } \varphi = \frac{F_{cf}}{P} = \frac{m\frac{v^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{rg}$$

v^2 = g r tg φ = 9’8 m/s^2.50 m . $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$v = \sqrt{g.r.tg.\varphi.} = 16'82 \text{ m/s}$$

$$v = 16'82 \text{ m/s} . 3600 \text{ s/h} . \frac{km}{1000m} = 60'5 \text{ km/h}$$

21º.- Un cuerpo de 25 Kg cuelga del extremo de una cuerda. Hallar la aceleración de dicho cuerpo si la tensión de la cuerda es: a) 250 N, b) 200 N, c) 400 N.



a) T = 250 N, P = 250 N Σ F = 0 ⇒ a = 0 P = m g = 25 Kg 9’8 m/s^2 = 250 N

b) P – T = m a $a = \frac{250N - 200N}{25Kg} = 2 \text{ m/s}^2$ ↓

c) T – P = m a $a = \frac{400N - 250N}{25Kg} = 6 \text{ m/s}^2$ ↑

22º.- El vector de posición de un cuerpo de 9 Kg de masa es $\vec{r} = 3t^2.\vec{i} - 2t.\vec{j}$. Calcula la velocidad, el momento lineal, el momento de la fuerza y la fuerza que actúa en función del tiempo.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(3t^2\vec{i} - 2t.\vec{j})}{dt} = 6\,t\,\vec{i} - 2\,\vec{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{P} = m.\vec{v} = 9kg(6t.\vec{i} - 2\vec{j})m/s = 54.t.\vec{i} - 18\vec{j} \text{ Kg m/s}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3t^2 & -2t & 0 \\ 54t & -18 & 0 \end{vmatrix} = 54\,t^2\,\vec{k}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d54t^2\vec{k}}{dt} = 108\,t\,\vec{k} \text{ N.m}$$

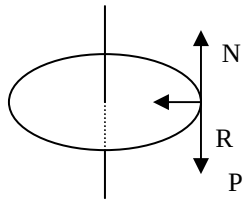
$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(54t.\vec{i} - 18.\vec{j}) = 54.\vec{i} \text{ N}$$

ó

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 6\,\vec{i} \text{ m/s}^2 \qquad \vec{F} = m.\vec{a} = 9kg.6.\vec{i}m/s^2 = 54\vec{i} \text{ N}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3t^2 & -2t & 0 \\ 54 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 108t.\vec{k} \text{ Nm}$$

23º.- Un bloque de 100 g descansa sobre una plataforma horizontal, a 25 cm del eje de rotación vertical. Si el coeficiente de rozamiento entre ambos es 0,15, hallar la máxima velocidad que el bloque puede alcanzar cuando la plataforma gire.



$$F_c = R \qquad m\frac{V^2}{R} = \mu\, m\, g \qquad V = \sqrt{\mu g R}$$

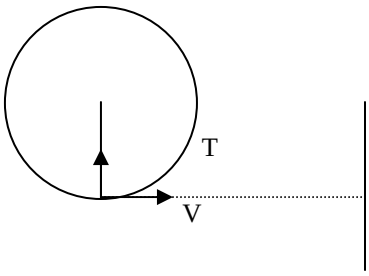
$$V = \sqrt{0'15.9'8m.s^{-2}.0'25m} = \sqrt{0'3675} \text{ m/s} = 0'60 \text{ m/s}$$

24º.- Un patinador de 60 Kg da vueltas cogido a una cuerda de 4 m. Cuando la tensión de la cuerda es de 6000 N se suelta saliendo lanzado hacia una pared situada a 40 m en su trayectoria.

a) Con qué movimiento sale y cuánto tardaría en llegar a la pared si no existiese rozamiento.

b) Qué fuerza ha de aplicar a los patines contra el suelo para llegar a la pared sin velocidad.

c) En las condiciones del apartado b), ¿ cuánto tiempo tardará en alcanzar la pared ?



$T = F_c = m \dfrac{V^2}{R}$; $V = \sqrt{\dfrac{T.R}{m}} = \sqrt{\dfrac{6000N.4m}{60Kg}} = 20$ m/s

a) $e = V.t$ $\quad t = \dfrac{e}{V} = \dfrac{40m}{20m/s} = 2$ s

b) $V_f = V_o - a\,t$ $\quad V_o = a\,t$

$e = V_o\,t - \dfrac{1}{2}\,a\,t^2$ $\Big\}$ $V^2 = 2\,a\,e$

$a = \dfrac{V^2}{2e} = \dfrac{400m^{2.}.s^{-2}}{2.40m} = 5$ m/s^2

$F_R = m\,a = 60$ Kg . 5 m/s^2 = 300 N

c) $V_f = V_o - a\,t$ $\quad 0 = V_o - a\,t$ $\quad t = \dfrac{V_o}{a} = \dfrac{20m/s}{5m/s^2} = 4$ s

25º.- Calcular la fuerza que un hombre de 90 kg ejerce sobre el piso de un ascensor cuando:

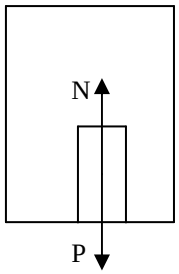
a) está en reposo

b) asciende con una velocidad constante de1 m/s

c) desciende con una velocidad constante de 1 m/s

d) asciende con una aceleración constante de 1 m/s^2

e) desciende con una aceleración constante de 1 m/s^2.



a) $V = 0$ $\quad P - N = 0$ $\quad N = P = m\,g = 90$ Kg.9'8 m/s^2 = 900 N

b) ↑ $V = 1$ m/s $\Rightarrow a = 0$ $\quad N - P = 0$ $\quad N = P = m\,g = 90$ Kg.9'8 m/s^2 = 900 N

c) ↓ $V = 1$ m/s $\Rightarrow a = 0$ $\quad P - N = 0$ $\quad N = P = m\,g = 90$ Kg.9'8 m/s^2 = 900 N

d) ↑ $a = 1$ m/s^2 $\quad N - P = m\,a$; $N = P + m\,a = 900$ N + 90 Kg.1 m/s^2 = 990 N

e) ↓ $a = 1$ m/s^2 $\quad P - N = m\,a$; $N = P - m\,a = 900$ N - 90 Kg.1 m/s^2 = 810 N

26º.- Calcular la fuerza que una señora de 60 kg ejerce sobre el piso de un ascensor cuando:

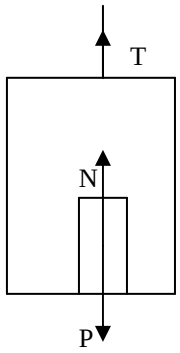
a) está en reposo

b) asciende con una velocidad constante de1 m/s

c) asciende con una aceleración constante de 1 m/s^2

d) desciende con una aceleración constante de 1 m/s^2.

e) Si el ascensor y la persona pesan juntos 560 Kg, ¿qué tensión deberá ejercer el cable del motor en el caso c)?



a) V = 0 P – N = 0 N = P = m g = 60 Kg.9'8 m/s^2 = 588 N

b) ↑ V = 1 m/s ⇒ a = 0 N – P = 0 N = P = m g = 60 Kg.9'8 m/s^2 = 588 N

c) ↑ a = 1 m/s^2 N – P = m a ; N = P + m a = 588 N + 60 Kg.1 m/s^2 = 648 N

d) ↓ a = 1 m/s^2 P – N = m a ; N = P - m a = 588 N - 60 Kg.1 m/s^2 = 528 N

e) ↑ a = 1 m/s^2 T – P = M a T = P + M a = 560 Kg . 9'8 m/s^2 + 560 Kg . 1 m/s^2 =
= 5488 N + 560 N = 6048 N

27º.- Un cohete quema 20 g de combustible por segundo, expulsándolo en forma de gas a la velocidad de 5000 m/s. ¿ Qué fuerza ejerce el gas sobre el cohete ? Rª: 100 N

F.t = m.Δv $F = \frac{m.\Delta v}{t} = \frac{20.10^{-3} kg.5000 m/s}{1s}$ = 100 N

$\overrightarrow{F_{g,c}} = -\vec{F}$ $F_{g,c}$ = 100 N

28º.- Una fuerza **F** = 3 **i** + 6 **j** empieza a actuar sobre una masa m de 3 Kg en el instante en que ésta pasa por el origen de coordenadas con una velocidad $\mathbf{v}_o$ = 2 **i** - **j**. Determinar la velocidad, el vector de posición y el momento lineal de la partícula m a los dos segundos de empezar a actuar la fuerza.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{3\vec{i} + 6\vec{j}}{3} = \vec{i} + 2\vec{j} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{V} = \vec{V_o} + \vec{a}.t = 2\vec{i} - \vec{j} + (\vec{i} + 2\vec{j}).2 = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{i} + 4\vec{j} = 4\vec{i} + 3\vec{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{r} = \vec{V}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}.t^2 = (2\vec{i} - \vec{j}).2 + \frac{1}{2}(\vec{i} + 2\vec{j}).4 = 6\vec{i} + 2\vec{j} \text{ m}$$

$$\vec{P} = m.\vec{V} = 3(4\vec{i} + 3\vec{j}) = 12\vec{i} + 9\vec{j} \text{ Kg.m/s}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & 0 \\ 12 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 54\vec{k} - 24\vec{k} = 30\vec{k}$$

29º.- Un objeto de 1 Kg de masa se mueve con velocidad constante $\vec{v} = 0'1.\vec{i}$ m/s. Cuando alcanza la posición $\vec{r} = -5.\vec{i}$ m comienza a actuar sobre el objeto una fuerza $\vec{F} = -0'1.\vec{i}$ N. Calcula:

a) La expresión de la velocidad del objeto, a partir del momento en que actúa la fuerza

b) El instante en que el objeto se detiene

c) La posición del objeto en cualquier instante.

a)

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-0'1.\vec{i}.N}{1Kg} = -0'1.\vec{i} \text{ m/s}^2 \qquad V = \int a dt = a\,t + V_o$$

$$\vec{V} = \vec{V_o} + \vec{a}.t = 0'1\vec{i} - 0'1t.\vec{i} = 0'1(1-t)\vec{i} \text{ m/s}$$

b) d r = V.dt $\vec{r} = \int \vec{V} dt = \int (0'1.\vec{i} - 0'1.t.\vec{i}) dt$ = 0’1 t $\vec{i}$ - 0’1 $\frac{t^2}{2}\vec{i} + \vec{r_o}$

$\vec{r} =$ 0’1 t $\vec{i}$ - 0’1 $0'05t^2\vec{i} - 5.\vec{i} =$ (- 0’05 t^2 + 0’1 t – 5) $\vec{i}$ m

c) $\vec{V}$ = 0 0’1 (1 – t) $\vec{i}$ = 0 1- t = 0 t = 1 s

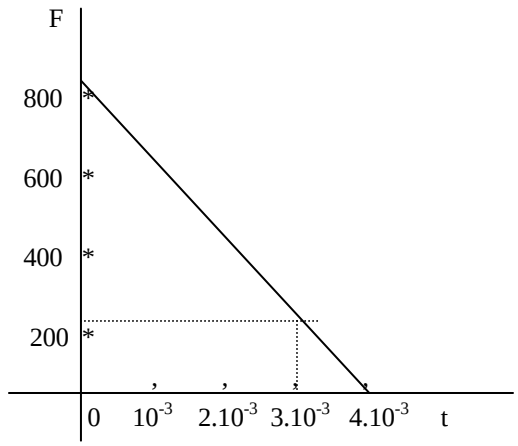
30º.- Un proyectil sale por la boca de un arma con una velocidad de 500 m/s. La fuerza resultante ejercida por los gases sobre el proyectil viene dada por: F = 800 - 2.10^5 t (F en newtons, t en segundos)

a) Construir un gráfico de F en función de t

b) Hallar el tiempo que estuvo el proyectil dentro del arma si F en la boca del arma valía solo 200 N(3.10^{-3} s)

c) Hallar el impulso ejercido sobre el mismo y su masa.(1,5 Kgm/s,3.10^{-3}Kg)

a)



b) 200 = 800 – 2.10^5 t t = $\frac{600}{2.10^5}$ = 3.10^{-3} s

c) I = $\int_{t_1}^{t_2} F.dt = \int (800 - 2.10^5 t) dt$ = 800 t – 10^5 t^2

I = $800.3.10^{-3} - 10^5.9.10^{-6}$ = 2’4 – 0’9 = 1’5 kg m/s

I = m ΔV m = $\frac{I}{\Delta v} = \frac{1'5 kgm/s}{600 m/s}$ = $0'3.10^{-2}$ kg

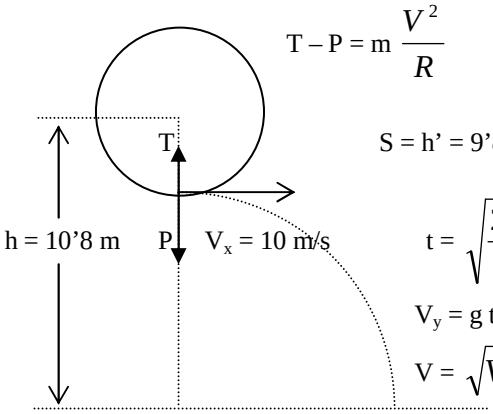
31º.- Con ayuda de una cuerda se hace girar un cuerpo de 1 Kg en una circunferencia de 1 m de radio, situada en un plano vertical, cuyo centro está situado a 10,8 m por encima de un suelo horizontal. La cuerda se rompe cuando la tensión es de 110 N, lo cual ocurre cuando el cuerpo está en el punto más bajo de su trayectoria. Se pide:

a) ¿Qué velocidad tiene el cuerpo cuando se rompe la cuerda?

b) ¿Cuánto tardará en caer al suelo?

c) ¿Cuál será su velocidad en el instante de chocar contra el suelo?

Rª: a) 10 m/s; b) 1,4 s; c) 17 m/s.



$T - P = m\dfrac{V^2}{R}$ $\quad V = \sqrt{\dfrac{(T-P)R}{m}} = \sqrt{\dfrac{(110N - 10N)1m}{1Kg}}$ = 10m/s

S = h’ = 9’8 m $\quad h' = \dfrac{1}{2} g.t^2$

$t = \sqrt{\dfrac{2h'}{g}} = \sqrt{\dfrac{2.9'8m}{9'8m/s^2}} = \sqrt{2}s$ = 1’4 s

$V_y = g\,t$ = 9’8 m/s^2 . 1’4 s = 14 s

$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{100 + 196}$ m/s = 17’20 m/s

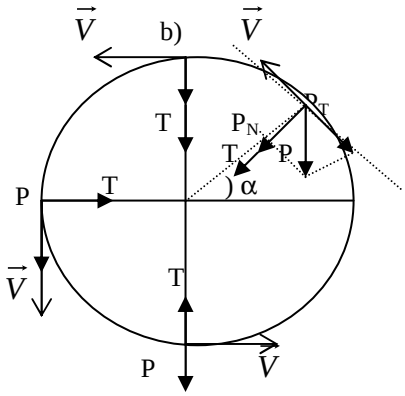
32º.- Un cuerpo de 0,5 Kg recorre una circunferencia vertical atado al extremo de una cuerda de 0'5 m de longitud, a celeridad constante de 6 m/s. Hallar la tensión de la cuerda cuando el cuerpo se encuentra :

a) En el punto más bajo de la circunferencia

b) En el más alto

c) Al mismo nivel que el centro de la circunferencia

d) Formando un ángulo de 30º con la horizontal



a) $F_c = \Sigma F_y = m \cdot a_n$

$T - P = m\dfrac{V^2}{R}$; $T = P + m\dfrac{V^2}{R}$

T = 0’5 kg.9’8 m/s^2 + 0’5 kg $\dfrac{36m^2/s^2}{0'5m}$ =50N+36N= 41N

b) $T + P = m\dfrac{V^2}{R}$; $T = m\dfrac{V^2}{R} - m\,g$ = 36 N – 5 N = 31 N

c) $T = F_c = m\dfrac{V^2}{R}$ = 36 N

a) P $\begin{cases} P_T = P\cos\alpha \\ P_N = P \text{ sen } \alpha = 5 \text{ N sen } 30º = 2'5 \text{ N} ; \end{cases}$

$T + P_N = m\dfrac{V^2}{R}$; $T = m\dfrac{V^2}{R} - P_N$ = 36 N – 2’5 N = 33’5 N

33º.- Sobre un disco de gramófano, que gira a la velocidad de 72 rpm, se coloca una moneda. Sabiendo que únicamente se queda en el sitio en donde se le deja cuando se pone a una distancia del eje de rotación menor que 8cm, hallar el coeficiente de rozamiento.

$$w = \frac{72.2\pi}{60}\frac{rad}{s} = 2'4 \text{ rad/s}$$

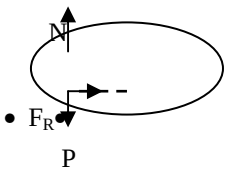
$$F_c = m\frac{V^2}{R} = m\,w^2 R$$

$F_R = \mu N = \mu\, m\, g$ $\qquad$ $F_c = F_R$

$$m\,w^2 R = \mu\, m\, g \qquad \mu = \frac{w^2 R}{g} = \frac{2'4^2\pi^2 s^{-2} 8.10^{-2} m}{9'8 m.s^{-2}} = 0'464$$

34º.- Una plataforma circular, colocada horizontalmente, gira con una frecuencia de dos vueltas por segundo alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. Sobre ella colocamos un objeto de madera, tal que el coeficiente estático de rozamiento entre el cuerpo y la plataforma es 0'4. Hallar la distancia máxima al eje de giro a la que debemos colocar el cuerpo para que éste gire con la plataforma sin ser lanzado al exterior.

Rª: 2'5 cm



$N = P = m\,g$

$\mu N = m\frac{v^2}{r}$ $\qquad$ $\mu\, mg = m\frac{v^2}{r} = m\,w^2 r$

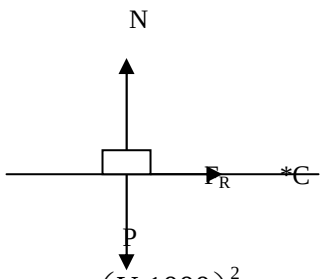
$r = \frac{v^2}{\mu g}$; $r = \frac{\mu g}{w^2} = \frac{0'9'8}{16\pi^2} = 0¡025 \text{ m} = 2'5 \text{ cm}$

35º.- a) Deducir la ecuación que nos de el valor mínimo del radio que puede tener una curva de la carretera para que un automóvil que la recorre a la velocidad v Km/h no se deslice hacia el exterior, suponiendo que el coeficiente de rozamiento $\mu = 0,5$.

b) Deducir la ecuación anterior en el supuesto de que la curva tenga un peralte de α grados.

Rª: $R = 0,015\, v^2$ m; $R = 5\, v^2/648 \cos\alpha - 0,5 \operatorname{sen}\alpha / \operatorname{sen}\alpha + 0,5 \cos\alpha$

A)

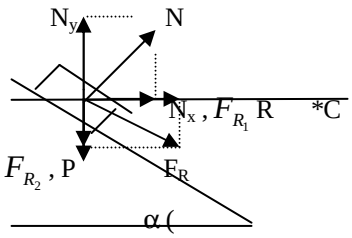


$\Sigma F_y = 0$; $P = N$

$F_R = \mu N = \mu\, m\, g$

$$F_R = m\frac{V^2}{R} \qquad \mu\, m\, g = m\frac{\left(\frac{V.1000}{3600}\right)^2}{R}$$

$$R = \frac{V^2}{\mu g} = \frac{\left(\frac{V.1000}{3600}\right)^2}{0'5.9'8} = 0'015.V^2 m$$

B) 

$$N \begin{cases} N_x = N \text{ sen } \alpha \\ Ny = N \cos \alpha \end{cases} \qquad F_R \begin{cases} F_{Rx} = F_R \cos \alpha = \mu N \cos \alpha \\ F_{R_{2y}} = F_R \text{ sen } \alpha = \mu N \text{ sen } \alpha \end{cases}$$

$P + F_{Ry} = N_y$ $\qquad$ $m\,g + \mu N \text{ sen } \alpha = N \cos \alpha$ $\qquad$ $m\,g = N\,(\cos \alpha - \mu \text{ sen } \alpha)$

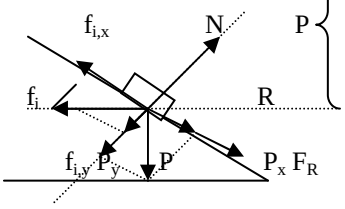
$N_x + F_{Rx} = m \dfrac{V^2}{R}$ $\qquad$ $N \text{ sen } \alpha + \mu N \cos \alpha = m \dfrac{V^2}{R}$ $\qquad$ $N = \dfrac{m.g}{\cos\alpha - \mu sen\alpha}$

$$\frac{m.g}{\cos\alpha - \mu sen\alpha}(\text{ sen } \alpha + \mu \cos \alpha) = m \frac{V^2}{R} \Rightarrow \frac{sen\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu sen\alpha}.g = \frac{V^2}{R}$$

$$R = \frac{V^2}{g}.\frac{\cos\alpha - \mu sen\alpha}{sen\alpha + \mu\cos\alpha} = \frac{\left(\frac{V.1000}{3600}\right)^2}{9'8}.\frac{\cos\alpha - 0'5 sen\varepsilon}{sen\alpha + 0'5\cos\alpha} = \frac{5.V^2}{648}\frac{\cos\alpha - 0'5 sen\alpha}{sen\alpha + 0'5\cos\alpha}$$

36º.- Encontrar la expresión que permite calcular la velocidad máxima a la que puede entrar un coche en una curva de radio R, ángulo de peralte α y coeficiente de rozamiento μ, para no derrapar.

SISTEMA NO INIERCIAL



$$P \begin{cases} P_x = mg \text{ sen } \alpha \\ Py = mg \cos \alpha \end{cases} \qquad f_i \begin{cases} f_{i,x} = f_i \cos \alpha = m \dfrac{v^2}{R} \cos \alpha \\ f_{i,y} = f_i \text{ sen } \alpha = m \dfrac{v^2}{R} \text{ sen } \alpha \end{cases}$$

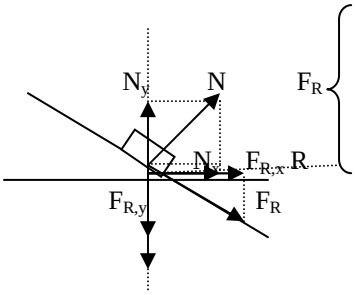
$N = P_y + f_{i,y}$ $\qquad$ $F_R = \mu N = \mu\,(mg \cos \alpha + m \dfrac{v^2}{R} \text{ sen } \alpha)$

$P_x + F_R = f_{i,x}$ $\qquad$ $mg \text{ sen } \alpha + \mu\, mg \cos \alpha + \mu\, m \dfrac{v^2}{R} \text{ sen } \alpha = m \dfrac{v^2}{R} \cos \alpha$

$$m \frac{v^2}{R} \cos \alpha - \mu\, m \frac{v^2}{R} \text{ sen } \alpha = mg \text{ sen } \alpha + \mu\, mg \cos \alpha \leftrightarrow m \frac{v^2}{R}(\cos \alpha - \mu \text{ sen } \alpha) = mg\,(\text{sen } \alpha + \mu \cos \alpha)$$

$$v = \sqrt{Rg\frac{sen\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu sen\alpha}}$$

SISTEMA INERCIAL



$$F_R \begin{cases} F_{R,\,x} = F_R \cos \alpha \\ F_{R,y} = F_R \text{ sen } \alpha \end{cases} \qquad N \begin{cases} N_{,x} = N \text{ sen } \alpha \\ N_{,y} = N \cos \alpha \end{cases}$$

$N_y = F_{R,y} + P$ $\qquad$ $N \cos\alpha = \mu N \operatorname{sen}\alpha + mg$ $\qquad$ $N\,(\cos\alpha - \mu \operatorname{sen}\alpha) = mg$

$N_x + F_{R,x} = m\dfrac{v^2}{R}$ $\qquad$ $N \operatorname{sen}\alpha + \mu N \cos\alpha = m\dfrac{v^2}{R}$ $\qquad$ $N\,(\operatorname{sen}\alpha + \mu \cos\alpha) = m\dfrac{v^2}{R}$

$$\frac{\cos\alpha - \mu sen\alpha}{sen\alpha + \mu\cos\alpha} = \frac{g}{\frac{v^2}{R}}$$

$$v = \sqrt{Rg\frac{sen\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu sen\alpha}} = \sqrt{Rg\frac{1+\mu tg\alpha}{1-\mu tg\alpha}}$$

37º.-A)¿Cuál es la velocidad a que puede ir un automóvil por una curva sin peralte, de radio R, sin derrapar, suponiendo que el coeficiente de rozamiento vale μ?

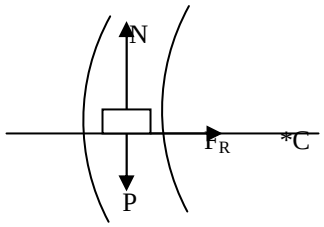
B)Resolver el apartado A) en el supuesto de que la curva tenga un peralte de α grados y

a) no hay rozamiento

b) el coeficiente de rozamiento es μ.

C) Suponiendo que μ fuera suficientemente grande para que el coche no derrapara, ¿cuál sería la velocidad máxima que podría alcanzar en la curva sin volcar, siendo la ltura del centro de gravedad sobre el suelo h y la distancia entre las ruedas d?

A)



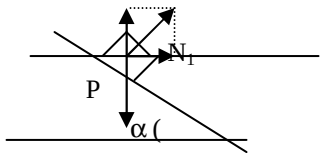
$\Sigma F_y = 0$; $P = N$

$F_R = m \cdot a_n$

$F_R = \mu N = \mu m g$ $\qquad$ $\mu m g = m\dfrac{V^2}{R}$ $\qquad$ $V = \sqrt{\mu g R}$

B)

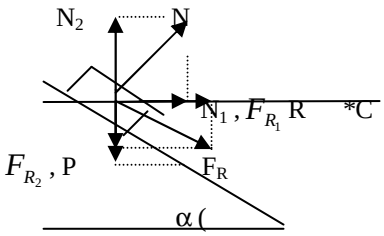
a)



$N_1 = N \operatorname{sen}\alpha$; $P = N_2$; $m g = N \cos\alpha$

$N_2 = N\cos\alpha$; $N_1 = F_N$ $\qquad$ $m\dfrac{V^2}{R} = N \operatorname{sen}\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{tag}\alpha = \dfrac{m\frac{V^2}{R}}{m}$; $\operatorname{tag}\alpha = \dfrac{V^2}{Rg}$ $\qquad$ $V = \sqrt{R.g.tag\alpha}$

b)



$$N \begin{cases} N_1 = N \operatorname{sen}\alpha \\ N_2 = N\cos\alpha \end{cases} \qquad F_R \begin{cases} F_{R_1} = F_R\cos\alpha = \mu N \cos\alpha \\ F_{R_2} = F_R \operatorname{sen}\alpha = \mu N \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

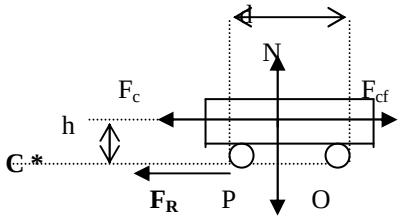
$P + F_{R_2} = N_2$ $\qquad$ $m g + \mu N \operatorname{sen}\alpha = N\cos\alpha$ $\qquad$ $m g = N\,(\cos\alpha - \mu \operatorname{sen}\alpha)$

$N_1 + F_{R_1} = F_c$ $\qquad$ N sen α + μ N cos α = m $\dfrac{V^2}{R}$ $\qquad$ N = $\dfrac{m.g}{\cos\alpha - \mu sen\alpha}$

$$\frac{m.g}{\cos\alpha - \mu sen\alpha}.\ \text{sen}\ \alpha + \frac{\mu m.g}{\cos\alpha - \mu sen\alpha}.= m\frac{V^2}{R} \Rightarrow \frac{g(sen\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha - \mu sen\alpha} = \frac{V^2}{R}$$

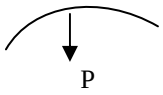
$$V^2 = R.g.\frac{\mu\cos\alpha + sen\alpha}{\cos\alpha - \mu sen\alpha} = R.g\frac{\mu\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha} - \mu\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}} = R.g.\frac{\mu + tag\alpha}{1 - \mu tag\alpha} \Rightarrow V = \sqrt{R.g\frac{\mu + tag\alpha}{1 - \mu tag\alpha}}$$

C) $\qquad \Sigma\overrightarrow{M}_o = 0 \qquad$ Fc = R = F_{cf} = m V^2 / R



P. $\dfrac{d}{2}$ - F_{cf}.h = 0 ; m g $\dfrac{d}{2}$ = m $\dfrac{V^2}{R}$ .h ; $V^2 = \dfrac{g.d.R}{2h} \Rightarrow V = \sqrt{\dfrac{gdR}{2h}}$

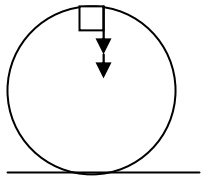
38º.- Calcula la velocidad mínima a la que un motorista puede describir el rizo de la muerte, si el radio del bucle es 10 m.



P = Fc $\qquad$ m g = m $\dfrac{V^2}{R}$

V = $\sqrt{Rg} = \sqrt{10m.9'8m/s^2}$ = 9’89 m/s = 9’9 m/s

39º.-¿Qué velocidad mínima debería llevar un ciclista para rizar el "rizo de la muerte" de radio 7 m si el ciclista con su máquina pesa 80 Kg?



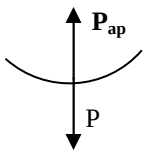
F_N = m . a_n $\qquad$ P + N = m . $\dfrac{V^2}{R}$

En el caso límite N = 0 ⇒ V = $V_{mín.}$

P = m . $\dfrac{V^2}{R}$ $\qquad$ m g = m . $\dfrac{V^2}{R}$ $\qquad$ $V_{mín.} = \sqrt{Rg}$

V = $\sqrt{7m.9'8m/s^2}$ = 8’3 m/s

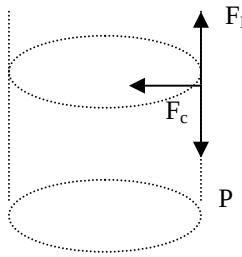
40º.- El piloto de un avión se lanza en picado a la velocidad de 400 Km/h y termina su descenso describiendo, a aquella velocidad, un arco de circunferencia situado en el plano vertical .¿Cuál será el radio mínimo de esa circunferencia para que la aceleración en el punto más bajo no exceda de 7g (g valor de la gravedad)? ¿Cuál será entonces el peso aparente del aviador en el punto más bajo de su trayectoria ? (179,9 m; $8P_r$)



a_n = 7 g $\qquad$ $\dfrac{V^2}{R}$ **= 7 g**

Pap – P = m $\dfrac{V^2}{R}$ $\qquad$ Pap = m $\dfrac{V^2}{R}$ + m g = 7 m g + m g = 8 P

41º.- Calcular la velocidad mínima que tiene que tener un motorista que trabaja en el "tubo de la muerte" para que no se caiga. Diámetro del tubo, 10 m. Coeficiente de rozamiento entre las ruedas y la pared, 0,5. Rª: 10 m/s



$r = 5$ m
$\mu = 0'5$

$F_R - P = 0$

$$F_c = m\frac{V^2}{r} = N$$

$$R = \mu N = \mu\ m\frac{V^2}{r} \qquad \mu\, m\frac{V^2}{r} = m\,g$$

$$V = \sqrt{\frac{rg}{\mu}} = \sqrt{\frac{5m.9'8m.s^{-2}}{0'5}} = 10 \text{ m/s}$$

Ó

$$\mu\, mw^2 R = m\,g \qquad w = \sqrt{\frac{g}{\mu.R}} = \sqrt{\frac{9'8m.s^{-2}}{0'5.5m}} = 2\ s^{-1}$$

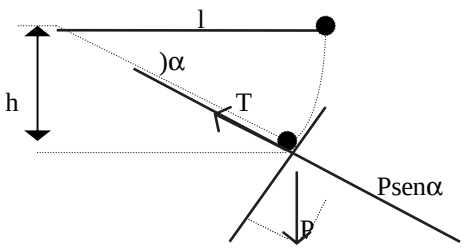
42º.- Una fuerza **F** = 6 **i** - 4 **j** actúa sobre una partícula, que se encuentra en el punto (2, -1), de masa 2 Kg y con una velocidad $\mathbf{V_o}$= 3**i**-2**j** en el instante en que empieza a actuar la fuerza. Determinar:
a) El momento lineal y el momento cinético respecto del origen de coordenadas a los 2 s,
b) El impulso que ha recibido la partícula en ese tiempo.

a) **a** = **F**/m ; **a** = d**v**/dt ℳ **v** = f**a**dt
v = f(3**i**-2**j**)dt = 3t**i** -2t**j** + $\mathbf{V_o}$ = (3t+3)**i** - (2t+2)**j** ; $\mathbf{V}_2$ = 9 **i** - 6 **j**
p = m**V** = 2Kg (9 **i** - 6 **j**) m/s = 18**i** - 2**j** Kgm/s
r = f**v**dt = (3/2t^2+3)**i** - (t^2+2t)**j** + $\mathbf{r_o}$ =(3/2t^2+3+2)**i** - (t^2+2t+1)**j**
$\mathbf{r}_2$ = 14**i** - 9**j**

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 14 & -9 & 0 \\ 18 & -12 & 0 \end{vmatrix} = (-168 + 162)\mathbf{k} = -6\mathbf{k}$$

J = f_{to}^{t} **F**dt = f (6**i** -4**j**)dt = (6t**i**-4t**j**)^2_o = 12**i**-8**j**

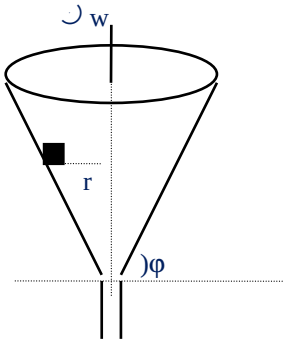
43º.- Colgamos una partícula de un hilo inextensible y de masa despreciable. Apartamos la partícula 90º de la posición de equilibrio de forma que el hilo queda horizontal y la soltamos. Determinar el ángulo que ha recorrido cuando la tensión del hilo es igual en magnitud al peso.



$T - P\,\text{sen}\alpha = m\,V^2/R$
$T = P$
$mgh = ½\, mV^2$
$h = l\,\text{sen}\alpha$
$P - P\,\text{sen}\alpha = m\,V^2/l$
$P\,(1 - \text{sen}\alpha) = m2gl\text{sen}\alpha\,/2$
$1 - \text{sen}\alpha = 2\text{sen}\alpha$;
$\text{sen}\alpha = 1/3$; $\alpha = 19º28'$

44º.- Un cubo muy pequeño de masa m se coloca en el interior de un embudo que gira alrededor de un eje vertical con una velocidad constante w rev/s.

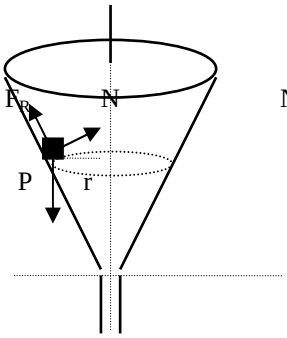
La pared el embudo forma un ángulo φ con la horizontal. Si es μ el coeficiente de rozamiento y el cubo está a una distancia r del eje de rotación, ¿ cuáles son los valores máximo y mínimo de w para los cuales el bloque no se moverá respecto al embudo.?



$W_{mín.}=1/2\pi(\ g/R\ .\ \text{sen}\ \varphi-\mu\cos\varphi/\cos\varphi+\mu\text{sen}\varphi\ )^{1/2}$

$W_{máx.} = 1/2\pi\ (\ g/R\ .\ \text{sen}\ \varphi + \mu\cos\varphi\ /\ \cos\varphi - \mu\text{sen}\varphi\ )^{1/2}$

No baja:

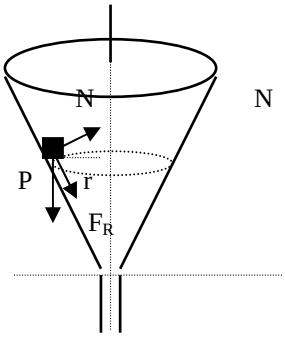


$$N \begin{cases} N_x = N\ \text{sen}\ \varphi \\ N_y = N\cos\varphi \end{cases} \qquad F_R \begin{cases} F_{R,x} = F_R\cos\varphi \\ F_{R,y} = F_R\ \text{sen}\ \varphi \end{cases}$$

$$\begin{matrix} N_x - F_{R,x} = m\,w^2\,r \\ N_y + F_{R,y} = P \end{matrix} \quad \begin{cases} N\ \text{sen}\ \varphi - \mu\,N\cos\varphi = m\,w^2\,r \\ N\cos\varphi + \mu\,N\ \text{sen}\ \varphi = m\,g \end{cases}$$

$$\frac{sen\varphi-\mu.\cos\varphi}{\cos\varphi+\mu.sen\varphi}=\frac{w^2r}{g} \quad \Rightarrow \quad w = \sqrt{\frac{g}{r}\frac{sen\varphi-\mu.\cos\varphi}{\cos\varphi+\mu.sen\varphi}}\ \text{rad/s} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}\frac{sen\varphi-\mu.\cos\varphi}{\cos\varphi+\mu.sen\varphi}}\ \text{rev/s}$$

No sube:

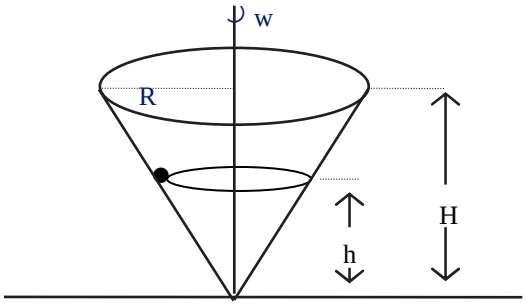


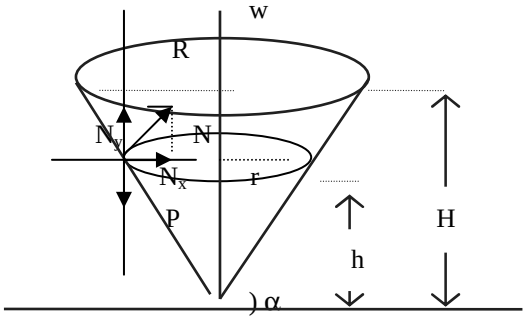
$$N \begin{cases} N_x = N\ \text{sen}\ \varphi \\ N_y = N\cos\varphi \end{cases} \qquad F_R \begin{cases} F_{R,x} = F_R\cos\varphi \\ F_{R,y} = F_R\ \text{sen}\ \varphi \end{cases}$$

$$\begin{matrix} N_x + F_{R,x} = m\,w^2\,r \\ N_y - F_{R,y} = P \end{matrix} \quad \begin{cases} N\ \text{sen}\ \varphi + \mu\,N\cos\varphi = m\,w^2\,r \\ N\cos\varphi - \mu\,N\ \text{sen}\ \varphi = m\,g \end{cases}$$

$$\frac{sen\varphi+\mu.\cos\varphi}{\cos\varphi-\mu.sen\varphi}=\frac{w^2r}{g} \quad \Rightarrow \quad w = \sqrt{\frac{g}{r}\frac{sen\varphi+\mu.\cos\varphi}{\cos\varphi-\mu.sen\varphi}}\ \text{rad/s} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}\frac{sen\varphi+\mu.\cos\varphi}{\cos\varphi-\mu.sen\varphi}}\ \text{rev/s}$$

45º.- Un cono invertido de altura H y radio R gira a razón de w rad/s alrededor de su eje de revolución.
Se deja caer una bola en sus paredes y se desea saber a que altura h sobre el vértice alcanzará el equilibrio.





$N_x = N \text{ sen } \alpha$

$N_y = N \cos \alpha$

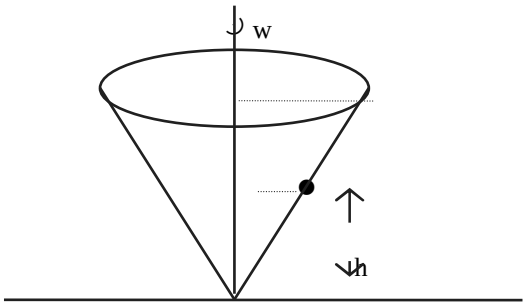
$N \text{ sen } \alpha = m\, w^2\, r$

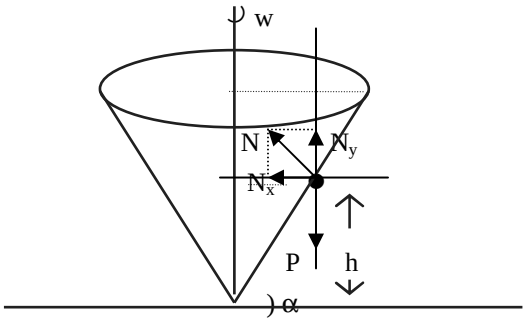
$N \cos \alpha = m\, g$

$$\text{tag } \alpha = \frac{w^2.r}{g} \qquad r = \frac{g\,tag\alpha}{w^2} \qquad \text{tag } \alpha = \frac{H}{R}$$

$$\frac{R}{H} = \frac{r}{h} \qquad h = \frac{H.r}{R} = \frac{H.g.tag\alpha}{R.w^2} = \frac{H^2.g}{R^2.w^2}$$

46º.- Un cono invertido, de 2 m de radio y 4 m de altura, gira a razón de 6 rad/s alrededor de su eje de revolución. Se deja en sus paredes una bolita y se desea saber a qué distancia (alturas) del vértice alcanzará el equilibrio. (h = 1,08 m)





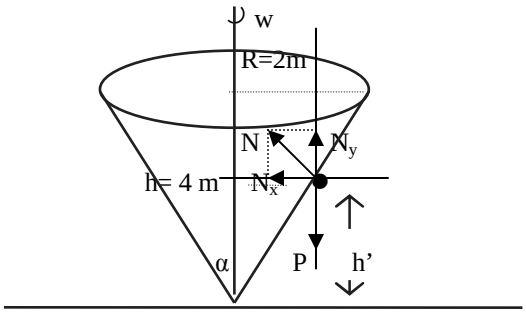
$N_x = N \text{ sen } \alpha$ $\qquad$ $N \text{ sen } \alpha = m\, w^2\, r$

$N_y = N \cos \alpha$ $\qquad$ $N \cos \alpha = mg$

$$\text{tag } \alpha = \frac{w^2.r}{g} \qquad r = \frac{g\,tag\alpha}{w^2} = \frac{9'8.2}{36} = \frac{5}{9} \qquad \text{tag } \alpha = \frac{H}{R} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{R}{H} = \frac{r}{h} \qquad h = \frac{H.r}{R} = \frac{4.\frac{5}{9}}{2} = \frac{10}{9} =$$

47º.- Un cono invertido, de 2 m de radio y 4 m de altura, gira a razón de 6 rad/s alrededor de su eje de revolución. Se deja en sus paredes una bolita y se desea saber a qué distancia (altura) del vértice alcanzará el equilibrio. (h = 1,08 m)



$N_x = N \cos \alpha$ $\qquad$ $N \cos \alpha = m\, w^2\, r$

$N_y = N \text{ sen } \alpha$ $\qquad$ $N \text{ sen } \alpha = mg$

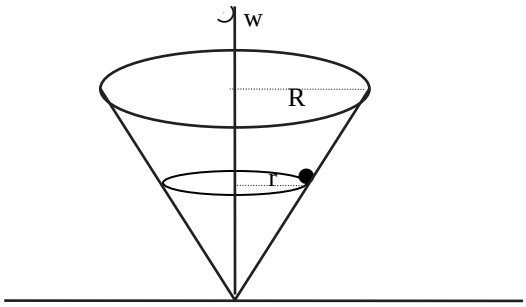
$$\text{tag } \alpha = \frac{g}{\omega^2.r} \qquad h' = \frac{r}{tag\alpha} = \frac{\frac{g}{\omega^2 tag\alpha}}{tg\alpha} = \frac{g}{\omega^2 tag^2\sigma} = \frac{9'8m/s^2}{36s^{-2}\,\frac{2}{4}\frac{2}{4}} = 1'08 \text{ m}$$

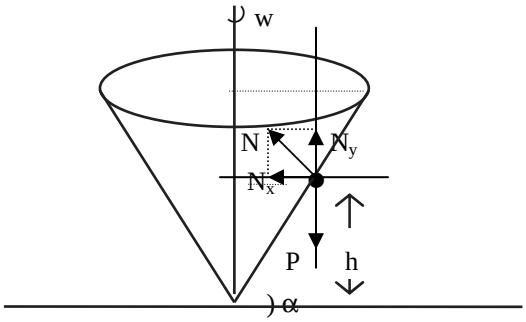
ó

$$f_i \begin{cases} f_{i,x} = f_i \text{ sen } \alpha \\ f_{i,y} = f_i \cos \alpha \end{cases} \qquad P \begin{cases} P_x = mg \cos \alpha \\ P_y = mg \text{ sen } \alpha \end{cases} \qquad f_{i,x} = P_x\,; \quad m\, w^2\, r \text{ sen } \alpha = mg \cos \alpha$$

$$\mathbf{r} = \frac{g}{w^2 tg\alpha} \qquad \mathbf{h'} = \frac{r}{tag\alpha} = \frac{\frac{g}{\omega^2 tag\alpha}}{tg\alpha} = \frac{g}{\omega^2 tag^2\sigma} = \frac{9'8m/s^2}{36s^{-2}\,\frac{2}{4}\frac{2}{4}} = 1'08 \text{ m.}$$

48º.- Un cono invertido, de radio R =2 m de radio y altura H = 4 m , gira a razón de 6 rad/s alrededor de su eje de revolución. Se deja en sus paredes una bolita y se desea saber a qué distancia del eje de rotación alcanzará el equilibrio.





$N_x = N \text{ sen } \alpha$ $\qquad$ $N \text{ sen } \alpha = m\, w^2\, r$

$N_y = N \cos \alpha$ $\qquad$ $N \cos \alpha = mg$

$\text{tag } \alpha = \dfrac{w^2 . r}{g}$ $\qquad$ $r = \dfrac{g\, tag\alpha}{w^2} = \dfrac{9'8.2}{36} = \dfrac{5}{9}$ m $\qquad$ $\text{tag } \alpha = \dfrac{H}{R} = \dfrac{4}{2} = 2$

49º.- Un cuerpo, el cual tiene una masa de 6 Kg, se encuentra en una superficie lisa de forma cónica como indica la figura.

A) Representar las fuerzas que actúan sobre el cuerpo cuando está en reposo y calcular cada una de ellas.

B) Si está girando alrededor del eje E, hallar la velocidad angular para que la reacción del plano sea nula.

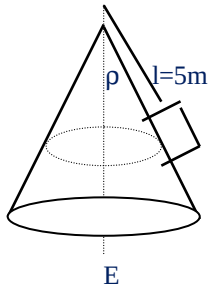
C) Si está girando alrededor del eje E a 10 r.p.m., determinar:

C-1 : Su velocidad lineal

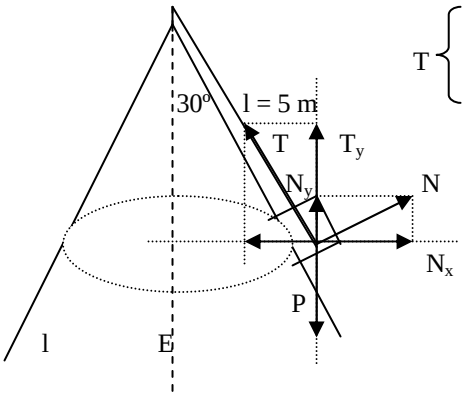
C-2 : Reacción de la superficie sobre el cuerpo

C-3 : Tensión del hilo.

DATO: ρ = 30º



$M = 6$ Kg $\qquad w = 10$ r.p.m $= 10 \dfrac{2\pi}{60}$ rad/s $= \dfrac{\pi}{3}$ rad /s $\qquad R = l \text{ sen } \alpha$



$$T \begin{cases} T_x = T \text{ sen } \alpha \\ T_y = T \cos \alpha \end{cases} \qquad N \begin{cases} N_x = N \cos \alpha \\ N_y = N \text{ sen } \alpha \end{cases}$$

A) Fn = 0

$T_x = N_x$ $\qquad$ $T \text{ sen } \alpha = N \cos \alpha$ $\qquad$ $N = \dfrac{T sen\alpha}{\cos\alpha} = T \text{ tg } \alpha$

$T_y + N_y = P$ $\qquad$ $T \cos \alpha + N \text{ sen } \alpha = m\, g$ $\qquad$ $T \cos \alpha + \dfrac{T sen\alpha}{\cos\alpha} \text{ sen } \alpha = m\, g$

T (cos α + tg α sen α) = m g $\qquad$ T = $\dfrac{m.g}{\cos\alpha + tg\alpha.sen\alpha} = \dfrac{6kg.9'8m/s^2}{0'866 + 0'577.0'5} = \dfrac{58'8}{1'1546}$ N = 50’9 N

N = $\dfrac{Tsen\alpha}{\cos\alpha}$ = T tg α = 50’9 N . 0’577 = 29’38 N

B) N = 0 $\quad$ $T_x = m\,w^2\,R$ $\qquad$ T sen α = m w^2 R

$T_y = P$ $\qquad$ T cos α = m g $\qquad$ tag α = $\dfrac{\omega^2 R}{g}$

w = $\sqrt{\dfrac{g.tag\alpha}{R}} = \sqrt{\dfrac{g.tg\alpha}{l.sen\alpha}} = \sqrt{\dfrac{g}{l\cos\alpha}} = \sqrt{\dfrac{9'8m/s^2}{5m.0'866}}$ = 1’52 rad/s

C)

C-1)

V = w.R = $\dfrac{\pi}{3}$ rad/s .5m .0’5 = $\dfrac{2'5\pi}{3}$ m/s = 2’6 m/s

C-2)

N = $\dfrac{mg - T\cos\alpha}{sen\alpha} = \dfrac{6kg.9'8m/s^2 - 59'8N.0'896}{0'5} = \dfrac{60N - 51'4N}{0'5} = 17'2N$

C-3)

$T_x - N_x = m\,w^2\,R$ $\qquad$ T sen α - N cos α = m w^2 R

$T_y + N_y = P$ $\qquad$ T cos α - N sen α = m g

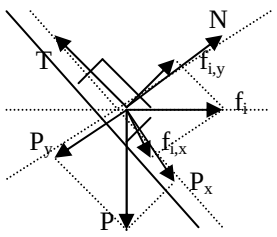
T sen^2 α - N cos α sen α = m w^2 R sen α

T $\cos^2\alpha$ + N sen α cos α = m g cos α

T (sen^2 α + $\cos^2$ α) = m w^2 R sen α + m g cos

T = m w^2 R sen α + m g cos = 6 kg . $\dfrac{\pi^2}{9}$ s^{-2} 5 m . $\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}$ + 6 kg 9’8 m/s^2 .0’86 = 8’2 N + 51’6 N = 59’8 N

Ó



P { P_x = P cos α ; P_y = P sen α }

f_i { $f_{i,x}$ = f_i sen α ; $f_{i,y}$ = f_i cos α }

N + $f_{i,y}$ = P_y $\qquad$ N = P_y – $f_{i,y}$

P_x + $f_{i,x}$ = T

a) N = m g sen α - m w^2 R cos α = 6 kg . 9’8 m/s^2 0’5 – 6 kg $\dfrac{\pi^2}{9}s^{-2}.5.\dfrac{1}{2}m$ .0’86 = 30 N – 14’13 N = 15’86 N

T = m g cosa α + m w^2 R sen α = 6 kg . 9’8 m/s^2 0’86 + 6 kg $\dfrac{\pi^2}{9}s^{-2}$.2’5 m 0’5 = 51’6 N + 8’2 N = 59’8 N

b) N = 0 $\quad$ $f_{i,x}$ = T – P_x $\qquad$ m w^2 R sen α + m g cos α = T

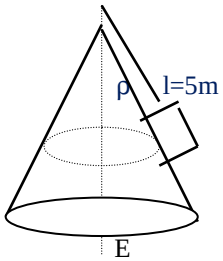
$f_{i,y} = P_y$ $\qquad$ $m\, w^2 R \cos\alpha = m\, g \,\text{sen}\,\alpha$ $\qquad$ $w = \sqrt{\dfrac{g\,\text{sen}\,\alpha}{R\cos\alpha}} = \sqrt{\dfrac{g\,\text{tg}\,\alpha}{R}}$ = 1’5 rad/s

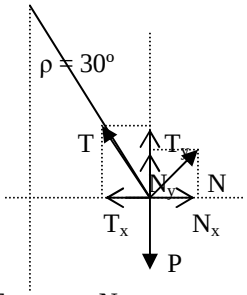
50º.- Un cuerpo, el cual tiene una masa de 6 Kg, se encuentra en una superficie lisa de forma cónica como indica la figura.

A) Si está girando alrededor del eje E a 10 r.p.m., determinar la reacción de la superficie sobre el cuerpo y la tensión del hilo

B) Si está girando alrededor del eje E, hallar la velocidad angular para que la reacción del plano sea nula

DATO: ρ = 30º





$$T \begin{cases} T_x = T \,\text{sen}\,\rho \\ T_y = T\cos\rho \end{cases} \qquad N \begin{cases} N_x = N\cos\rho \\ N_y = N\,\text{sen}\,\rho \end{cases}$$

a) $T_y + N_y = P$

$T_x - N_x = m\, w^2 R$

$$\left.\begin{array}{l} T\cos\rho + N\,\text{sen}\,\rho = mg \\ T\,\text{sen}\,\rho - N\cos\rho = m\, w^2 R \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} T\cos^2\rho + N\,\text{sen}\,\rho\cos\rho = mg\cos\rho \\ T\,\text{sen}^2\rho - N\cos\rho\,\text{sen}\,\rho = m\, w^2 R\,\text{sen}\,\rho \end{array}$$

$T(\text{sen}^2\rho + \cos^2\rho) = mg\cos\rho + m\, w^2 R\,\text{sen}\,\rho$

$T = mg\cos\rho + m\, w^2 R\,\text{sen}\,\rho = 6\,Kg.9'8\,m/s^2\; 0'86 + 6\,Kg\,\dfrac{\pi^2}{9}\,s^{-2}\; 2'5\,m.0'5 = 51'6\,N + 8'2\,N = 59'8\,N$

$$N = \frac{mg - T\cos\rho}{sen\rho} = \frac{6Kg.9'8m/s^2 - 59'8N.0'86}{0'5} = \frac{8'572N}{0'5} = 17'14\,N$$

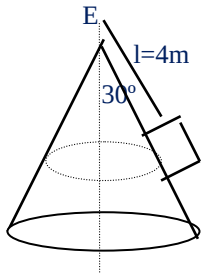
b) N = 0

$T_y = P$

$T_x = m\, w^2 R$

$$\frac{T sen\rho}{T\cos\rho} = \frac{m.w^2.R}{mg} \qquad \text{tag}\,\rho = \frac{w^2 R}{g} \qquad w = \sqrt{\frac{g.tg\rho}{R}} = \sqrt{\frac{9'8m/s^2.0'57}{2'5m}} = 1'52\ \text{rad/s}$$

51º.- Sobre la superficie completamente lisa del cono de revolución representado en la figura, que gira alrededor de su eje vertical E E´con una velocidad angular de 15 r.p.m. está situado el cuerpo A, de 2 kg de masa, sujeto al vértica del cono por un hilo inxtensible y sin masa, de 4 m de longitud,. Calcular:



a) la velocidad lineal del cuerpo A

b) la reacción de la superficie del cono sobre el cuerpo

c) la tensión del hilo

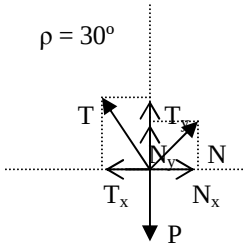
d) la velocidad angular a que debe girar el cono para anular su fueza de reacción sobre el cuerpo.

Rª: a) π m/s ; b) 2 N; c) 22’1 N; d) 2’4 rad/s

E’ $\qquad$ a) $w = 15.\dfrac{2\pi}{60}$ = 0’5 π rad/s ; $\quad$ R = l sen φ = 4 sen 30 = 4.0’5 = 2

v = w.R = 0’5 π.2. = π m/s

$\rho = 30^o$



$$T \begin{cases} T_x = T \text{ sen } \rho \\ T_y = T \cos \rho \end{cases} \qquad N \begin{cases} N_x = N \cos \rho \\ N_y = N \text{ sen } \rho \end{cases}$$

a) $T_y + N_y = P$

$T_x - N_x = m\, w^2 R$

b) y c)

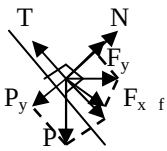
$$\left.\begin{array}{l} T \cos \rho + N \text{ sen } \rho = mg \\ T \text{ sen } \rho - N \cos \rho = m\, w^2 R \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} T \cos^2 \rho + N \text{ sen } \rho \cos \rho = mg \cos \rho \\ T \text{ sen}^2 \rho - N \cos \rho \text{ sen } \rho = m\, w^2 R \text{ sen } \rho \end{array}$$

$T (\text{sen}^2 \rho + \cos^2 \rho) = mg \cos \rho + m\, w^2 R \text{ sen } \rho$

$T = mg \cos \rho + m\, w^2 R \text{ sen } \rho = 2 \text{ Kg}.9'8 \text{ m/s}^2\ 0'86 + 2 \text{ Kg}0'5^2.\pi^2 \text{ s}^{-2}\ 4.0'5 \text{ m}.0'5 = 17'2 \text{ N} + 4'9 \text{ N} = 22'1 \text{ N}$

$$N = \frac{mg - T\cos\rho}{sen\rho} = \frac{2Kg.9'8m/s^2 - 22'1N.0'86}{0'5} = \frac{20-19N}{0'5} = 2 \text{ N}$$

o



$$f \begin{cases} f_x = f \text{ sen } \rho \\ f_y = f \cos \rho \end{cases} \qquad P \begin{cases} P_x = P \cos \rho \\ P_y = P \text{ sen } \rho \end{cases}$$

$N + f_y = P_y \qquad N = mg \text{ sen } \rho - m\, w^2 R \cos \rho$

$P_x + f_x = T \qquad T = mg \cos \rho + m\, w^2 R \text{ sen } \rho$

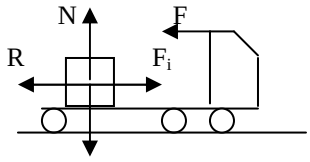
d) $N = 0$

$T_y = P$

$T_x = m\, w^2 R$

$$\frac{Tsen\rho}{T\cos\rho} = \frac{m.w^2.R}{mg} \qquad \text{tag } \rho = \frac{w^2 R}{g} \qquad w = \sqrt{\frac{g.tg\rho}{R}} = \sqrt{\frac{9'8m/s^2.\frac{0'5}{0'86}}{2.0'5m}} = 2'4 \text{ rad/s}$$

52º.- Un camión va cargado con cajas. El coeficiente de rozamiento con el suelo del camión es 0,3. Suponiendo que el camión se mueve con una velocidad de 50 Km/h, calcula la distancia mínima en que puede detenerse, frenando de manera uniforme, para que las cajas no deslicen.

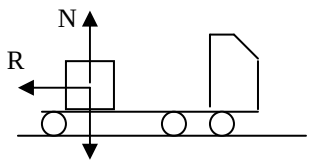


$F_i - R = m\, a' \qquad a' = 0 \Rightarrow F_i - R = 0 \quad m\, a - \mu\, m\, g = 0$

$a = \mu\, g = 0'3 \,.\, 9'8 \text{ m/s}^2 = 2'94 \text{ m/s}^2$

$$\left.\begin{array}{l} e = V_o\, t - \frac{1}{2} a\, t^2 \\ 0 = V_o - a\, t \end{array}\right\} \qquad e = \frac{V_o^2}{2a} = \frac{\left(\frac{125}{9}\right)^2 m^2.s^{-2}}{2.2'94m.s^{-2}} = 32'81 \text{ m}$$

53º.- El coeficiente de fricción estática entre el suelo de un camión y una caja que descansa sobre el mismo es 0’3. El camión lleva una velocidad de 80’5 km/h. ¿Cuál debe ser la distancia mínima de parada del camión para que la caja no deslice?



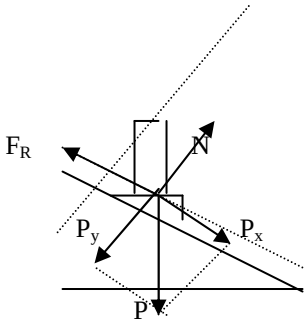
$R = m\,a'$ $\quad \mu N = \mu\, m\, g = m\, a$

$a = \mu\, g$

$$\left.\begin{array}{l} e = V_o\, t - \dfrac{1}{2}\, a\, t^2 \\ 0 = V_o - a\, t \end{array}\right\} \qquad e = \frac{V_o^2}{2a} = \frac{\left(\frac{80500}{3600}\right)^2 m^2.s^{-2}}{2.2'94 m.s^{-2}} = 85\ m$$

54º.- Un hombre que pesa 70 Kg se lanza encima de una báscula por un plano inclinado 60º. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento dinámico entre la báscula y el plano es 0,3, calcular: 1º) La aceleración de bajada, 2º) lo que marca la báscula.

Rª: 7 m/s^2 ; 279 N.



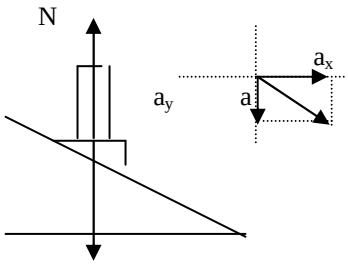
$$P \left\{ \begin{array}{l} P_x = P \text{ sen } \alpha = (m + m')\, g \text{ sen } \alpha \\ P_y = P \cos \alpha = (m + m')\, g \cos \alpha \end{array} \right.$$

$N = P_y$

$F_R = \mu\, N = \mu (m + m')\, g \cos \alpha$

$P_x - F_R = (m + m')\, a$; $\quad (m + m')\, g \text{ sen } \alpha - \mu (m + m')\, g \cos \alpha = (m+m')\, a$

$a = g \text{ sen } \alpha - \mu\, g \cos \alpha = g\,(\text{sen } \alpha - \mu \cos \alpha) = 9'8\ m/s^2(\text{sen } 60º - 0'3 \cos 60º) = 7\ m/s^2$



$a_y = a \text{ sen } \alpha$ $\quad P - N = m\, a_y$ $\quad N = P - m\, a_y = P - m.a \text{ sen } \alpha$

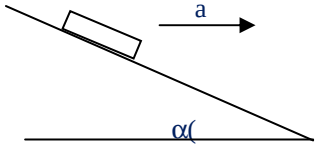
$N = 70\ kg.9'8\ m/s^2 - 70\ kg\ 7\ m/s^2.\text{sen } 60º = 700\ N - 424\ N =$

$= 276\ N$

55º.- Sobre un plano inclinado que se mueve con una aceleración a>0, como indica la figura, se encuentra un objeto prismático. Hallar:

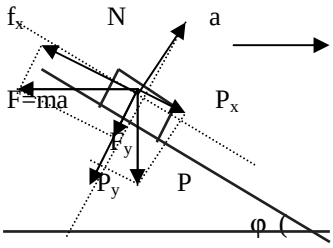
1º) A partir de qué valor del ángulo del plano el cuerpo no sube nunca por la línea de máxima pendiente si no existe rozamiento.

2º) A partir de qué valor del ángulo del plano el cuerpo no baja nunca por la línea de máxima pendiente si no existe rozamiento.



3º) Como se modifican estos resultados si el coeficiente de rozamiento es μ.

Rª: tag φ > a/g ; tag φ < a/g ; tag φ > a -μg / g+μa; tagφ< μg+a /g-μa



$P_x = m\,g\,\text{sen}\,\varphi$ $\qquad$ $f_x = f\cos\varphi = m\,a\cos\varphi$

P $\qquad$ f

$P_y = m\,g\cos\varphi$ $\qquad$ $f_y = f\,\text{sen}\,\varphi = m\,a\,\text{sen}\,\varphi$

$N = P_y + f_y = m\,g\cos\varphi + m\,a\,\text{sen}\,\varphi$

a) **a)** $P_x \geq f_x$ $\qquad$ $m\,g\,\text{sen}\,\varphi \geq m\,a\cos\varphi$ $\qquad$ $\text{tg}\,\varphi \geq \dfrac{a}{g}$

b) **b)** $P_x \leq f_x$ $\qquad$ $m\,g\,\text{sen}\,\varphi \leq m\,a\cos\varphi$ $\qquad$ $\text{tg}\,\varphi \leq \dfrac{a}{g}$

c) **c)** $F_R = \mu\,N = \mu\,m\,g\cos\varphi + \mu\,m\,a\,\text{sen}\,\varphi$

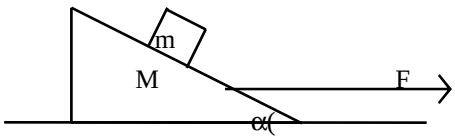
d) No sube $\qquad$ $P_x + F_R \geq f_x$ $\qquad$ $m\,g\,\text{sen}\,\varphi + \mu\,m\,g\cos\varphi + \mu\,m\,a\,\text{sen}\,\varphi \geq m\,a\cos\varphi$

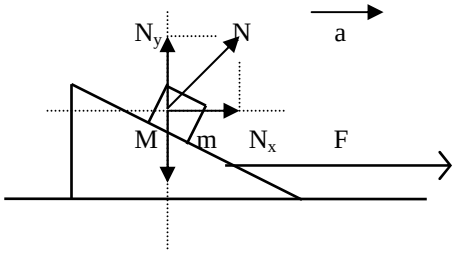
e) $\text{sen}\,\varphi\,(g + \mu\,a) \geq \cos\varphi\,(a - \mu\,g)$ $\qquad$ $\text{tg}\,\varphi \geq \dfrac{a - \mu.g}{g + \mu.a}$

f) No baja $\qquad$ $f_x + F_R \geq P_x$ $\qquad$ $m\,a\cos\varphi + \mu\,m\,g\cos\varphi + \mu\,m\,a\,\text{sen}\,\varphi \geq m\,g\,\text{ssen}\,\varphi$

g) $\cos\varphi\,(a + \mu\,g) \geq \text{sen}\,\varphi\,(g - \mu\,a)$ $\qquad$ $\text{tg}\,\varphi \leq \dfrac{a + \mu.g}{g - \mu.a}$

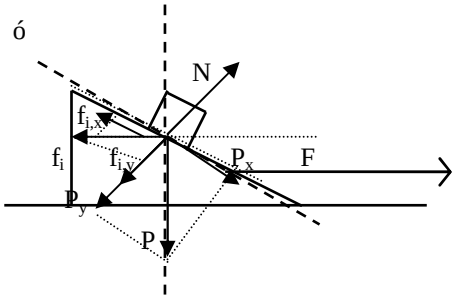
56º.- ¿ Qué fuerza debemos ejercer sobre el conjunto para que m no resbale por el plano, supuesto que no hay rozamiento.





$$N \begin{cases} N_x = N\,\text{sen}\,\alpha\,;\ N_x = m\,a\ ;\ N\,\text{sen}\,\alpha = m\,a \\ N_y = N\cos\alpha\,;\ N_y = m\,g\,,\ \ N\cos\alpha = m\,g \quad \text{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{g} \end{cases}$$

$a = g \text{ tg } \alpha$; $F = (M + m)\, a = (M + m)\, g \text{ tg } \alpha$



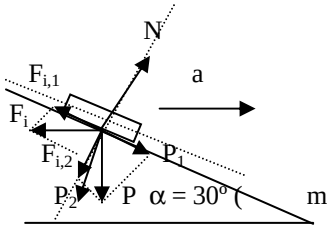
$N = P_y + f_{i,y}$ $\quad P_x = m\, g \text{ sen } \alpha$ $\quad f_{i,x} = m\, a \cos \alpha$

$P_x = f_{i,x}$ $\quad P_y = m\, g \cos \alpha$ $\quad f_{i,y} = m\, a \text{ sen } \alpha$

$m\, g \text{ sen } \alpha = m\, a \cos \alpha$

$a = g \text{ tg } \alpha$; $F = (M + m)\, a = (M + m)\, g \text{ tg } \alpha$

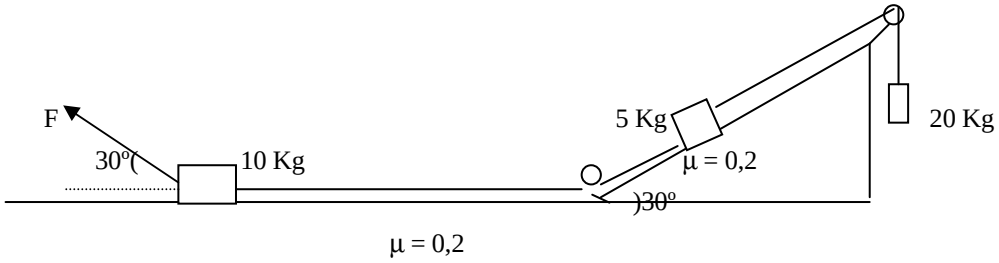
57º.- Sobre un plano de 30º de inclinación se tiene un cuerpo. Calcúlese la aceleración que hay que dar al plano inclinado, y en que sentido, para que el cuerpo no baje. No hay rozamiento.



$$\left.\begin{array}{l} F_{i,1} = F_i \cos \alpha \\ P_1 = P \text{ sen } \alpha \end{array}\right\} \quad P_1 = F_{i,1}$$

$m\, g \text{ sen } \alpha = m\, a \cos \alpha$ $\quad a = g \text{ tag } \alpha = g \text{ tag } 30º = 9'8 \text{ m/s}^2 \,.0'577 = 5'65 \text{ m/s}^2$

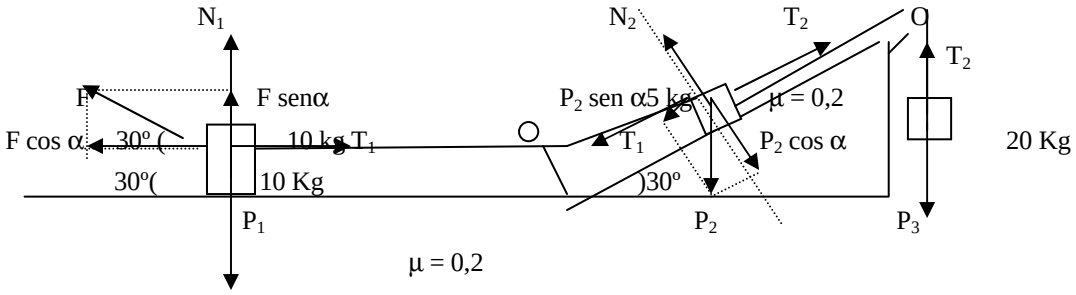
58º.- En el sistema de la figura,¿ cuál debe ser el valor de la fuerza F para que el sistema esté en equilibrio?



Rª: - Movimiento hacia la izquierda : F = 210,82 N

- Movimiento hacia la derecha : F = 191,03 N

El sistema estaría en equilibrio para todos los valores de F comprendidos entre 210.82 N y 191,03 N.



Movimiento hacia la izquierda

$$F\cos\alpha \geq T_1 + F_{R,1}$$

$$T_1 + P_2 \operatorname{sen}\alpha \geq T_2 + F_{R,2}$$

$$T_2 \geq P_3$$

$$F\cos\alpha + P_2 \operatorname{sen}\alpha \geq F_{R,1} + F_{R,2} + P_3$$

$$F\frac{\sqrt{3}}{2} + 50\text{ N}.\frac{1}{2} \geq 0'2\,(100\text{ N} - F\,\frac{1}{2}) + 0'2\,.\,50\text{ N}.\frac{\sqrt{3}}{2} + 200\text{ N}$$

$$F\frac{\sqrt{3}}{2} + 0'2\,F\,.\frac{1}{2} \geq 20\text{ N} + 10.\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ N} + 200\text{ N} - 25\text{ N}$$

$$F\,(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{0'2}{2}) \geq (20 + 5\sqrt{3} + 200 - 25)\text{ N} \Rightarrow F \geq \frac{20 + 5\sqrt{3} + 200 - 25}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.0'2}N = 210'82\text{ N}$$

Movimiento hacia la derecha

$$\left.\begin{array}{l} T_1 \geq F_1\cos\alpha + F_{R,1} \\ T_2 \geq T_1 + P_2 \operatorname{sen}\alpha + F_{R,2} \\ P_3 \geq T_2 \end{array}\right\} \quad P_3 \geq F_1\cos\alpha + F_{R,1} + P_2 \operatorname{sen}\alpha + F_{R,2}$$

$$200\text{ N} \geq F\,\frac{\sqrt{3}}{2} + 0'2\,(100\text{ N} - F\,.\frac{1}{2}) + 50\,\frac{1}{2} + 0'2.50\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$200\text{ N} \geq F\,\frac{\sqrt{3}}{2} + 20\text{ N} - F\,.0'2.\frac{1}{2} + 25 + 5\sqrt{3}$$

$$F\,(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{0'2}{2}) \leq (200 - 20 - 25 - 5\sqrt{3})\text{ N} \Rightarrow F \leq \frac{200 - 20 - 25 - 5\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.0'2}N = 191¡03\text{ N}$$

El sistema estaría en equilibrio para todos los valores de F comprendidos entre 210'82 N y 191'03 N

59º.- Un automóvil de masa 1200 Kg lleva una velocidad de 90 Km/h por una pista horizontal. Al aplicar los frenos se detiene en 50 m, a) ¿Cuál es la fuerza media ejercida por los frenos?; b) ¿Cuánto tiempo tardará en pararse?

$V_o = 90$ Km/h = 25 m/s ; e = 50 m ; $V_f = 0$ F? t?

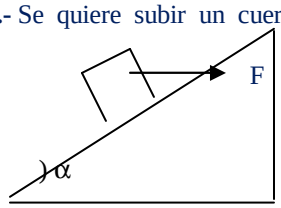
$$F\,.\,t = m\,\Delta V \qquad F = \frac{m.\Delta V}{t}$$

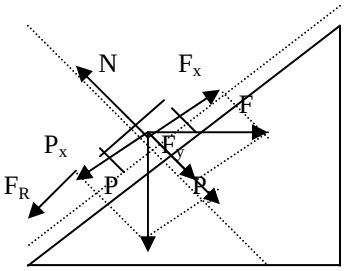
$$\left.\begin{array}{l} e = V_o\,t - \frac{1}{2}\,a\,t^2 \\ V_f = V_o - a\,t \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} V^2 = 2\,a\,e \\ a = \frac{V_o^2}{2e} = \frac{25^2\,m^2.s^{-2}}{2.50m} = 6'25\text{ m/s}^2 \end{array}$$

$t = \frac{\Delta V}{a} = \frac{25 m/s}{6'25 m/s^2} = 4$ s

$F = \frac{m.\Delta V}{t} = \frac{1200 kg.25 m/s}{4 s} = 7500$ N ó F = m a = 1200 Kg .6'25 m/s^2 = 76500 N

60º.- Se quiere subir un cuerpo por un plano inclinado mediante la aplicación de una fuerza horizontal F. Si el coeficiente de rozamiento es 0,2 y la relación de la fuerza al peso es 1,5, ¿para qué ángulo sube con movimiento uniforme?





P { P_x = m g sen α ; P_y = m g cos α } F { F_x = F cos α ; F_y = F sen α } $\frac{F}{P}$ = 1'5 F = 1'5 P

$F_x - F_R - P_x = 0$

$P_y + F_y = N$

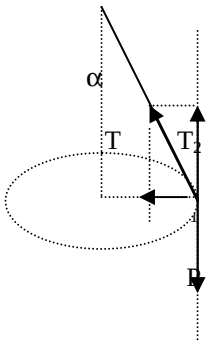
$F_R = \mu N = \mu (P_y + F_y) = \mu$ P cos α + μ F sen α

1'5 P cos α - μ P cos α - μ 1'5 P sen α - P sen α = 0 ⇒

1'5 P cos α - 0'2 P cos α - 0'3 P sen α- P sen α = 0

1'3 P cos α - 1'3 P sen α = 0 ; cos α - sen α = 0 tg α = 1 α = arc tg 1 = 45º

61º.- Una esferita de 20 g, atada a una cuerda de 50 cm de longitud que pende del techo, gira en una trayectoria horizontal de 30 cm de radio con velocidad constante. Determínese: a) la velocidad de la esfera y la tensión de la cuerda, b) el tiempo que tarda en efectuar una revolución.



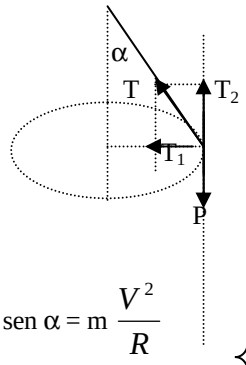
T { T_1 = T sen α ; T_1 = m.a_n = m $\frac{V^2}{R}$, T sen α = m $\frac{V^2}{R}$; T_2 = T cos α; T_2 = P = mg T cos α = mg } tag α = $\frac{V^2}{Rg}$

a) $V = \sqrt{R.g.tag\alpha} = \sqrt{30.10^{-2} m.9'8 m/s^2.\frac{3}{4}} = 1'5$ m/s

$T = \frac{T_2}{\cos\alpha} = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{20.10^{-3} kg.9'8 m/s^2}{\frac{4}{5}} = 0'25$ N

b) $T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi.R}{V} = \frac{2\pi.30.10^{-2} m}{1'5 m/s} = 0'4\,\pi$ s

62º.- Un cuerpo de masa m gira describiendo circunferencias horizontales de radio R, cuando está sujeto del techo con una cuerda de longitud L (péndulo cónico). Calcular: a) la fuerza centrípeta que actúa sobre el cuerpo y b) la tensión de la cuerda

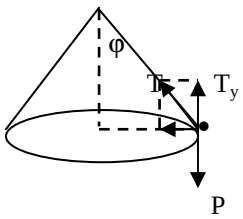


$$T \begin{cases} T_1 = T \text{ sen } \alpha = F_c \; ; \\ T_2 = T \cos \alpha; \quad T_2 = P = mg \quad ; \quad T \cos \alpha = mg \; ; \; T = \dfrac{mg}{\cos \alpha} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = T \text{ sen } \alpha = m \dfrac{V^2}{R} \\ T = \dfrac{T_2}{\cos \alpha} = \dfrac{mg}{\cos \alpha} \end{array}\right\} \quad \frac{mg}{\cos \alpha} \text{ sen } \alpha = m \frac{V^2}{R} \qquad m\, g \text{ tag } \alpha = m \frac{V^2}{R} = F_c$$

63º.- Una particula puntual de masa m, sujeta al extreme de una cuerda de longitude L, gira describiendo circunferencias horizontals de radio R, siendo v su celeridad. Al mismo tiempo el hilo describe la superficie de un péndulo cónico. Determinar el ángulo φ que forma la cuerda con la vertical, así como la tensión que experimenta.

Rª: $\text{tg } \varphi = \dfrac{v^2}{Rg}$; $T = m \sqrt{\dfrac{v^4}{R^2} + g^2}$



$$T \begin{cases} T_x = T \text{ sen } \varphi \qquad T_x = F_{cp} \\ T_y = T \cos \varphi \qquad T_y = P \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} T \text{ sen } \varphi = m \dfrac{v^2}{R} \\ T \cos \varphi = m\, g \end{array}\right\} \quad \text{tg } \varphi = \frac{v^2}{Rg}$$

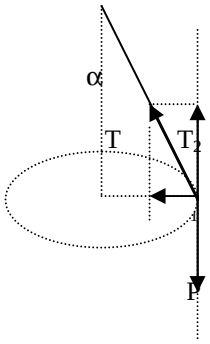
$$\left.\begin{array}{l} T^2 \text{ sen}^2 \varphi = m^2 \dfrac{v^4}{R^2} \\ T^2 \cos^2 \varphi = m^2 g^2 \end{array}\right\} \quad T^2 = m^2 \left(\frac{v^4}{R^2} + g^2 \right) \qquad T = m \sqrt{\frac{v^4}{R^2} + g^2}$$

64º.- En el extremo de una cuerda se ata una bola de 250 g de masa y se hace girar con velocidad constante en un círculo horizontal de radio 4 m. La cuerda forma un ángulo de 30º con la vertical. Calcular:

a) la tensión de la cuerda

b) la fuerza que se ejerce sobre la bola

c) su velocidad.



$$T \begin{cases} T_1 = T \text{ sen } \alpha \;;\; T_1 = m.a_n = m\dfrac{V^2}{R} \;,\; T \text{ sen } \alpha = m\dfrac{V^2}{R} \\ T_2 = T\cos\alpha;\quad T_2 = P = mg \qquad T\cos\alpha = mg \end{cases} \quad \text{tag } \alpha = \frac{V^2}{Rg}$$

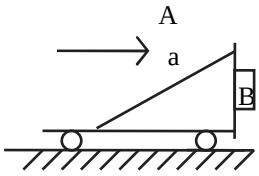
$$\vec{f_n} = \vec{T_2} + \vec{P} + \vec{T_1} = \vec{T_1}\;;$$

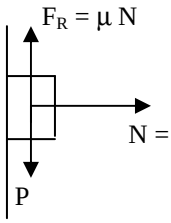
a) $T = \dfrac{mg}{\cos\alpha} = \dfrac{0'25kg.9'8m/s^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2'83$ N

b) $F_n = T_1 \quad T_1 = m\dfrac{V^2}{R} = m\dfrac{R.g.tag\alpha}{R} = m\,g\,\text{tag}\,\alpha = 0'25\text{ kg }.9'8\text{ m/s}^2.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 1'41$ N

c) $V = \sqrt{R.g.tag\alpha} = \sqrt{4m.9'8m/s^2.\dfrac{\sqrt{3}}{3}} = 4'75$ m/s

65º.- ¿ Qué aceleración mínima debe llevar la pantalla A de la figura si no debe caerse el bloque B? El coeficiente de rozamiento entre ambos es μ





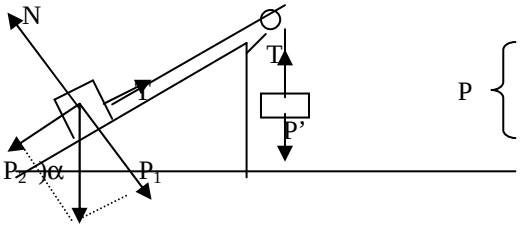
$F_R = P \qquad \mu\, m\, a = m\, g \qquad a = \dfrac{g}{\mu}$

66º.- Un bloque de 300 N es arrastrado a velocidad constante sobre la superficie lisa de un plano inclinado, por la acción de un peso de 100 N pendiente de una cuerda atada al bloque y que pasa por una polea sin rozamiento. Calcular:

a) El ángulo de inclinación del plano

b) la tensión de la cuerda.

P = 300 N; P' = 100 N



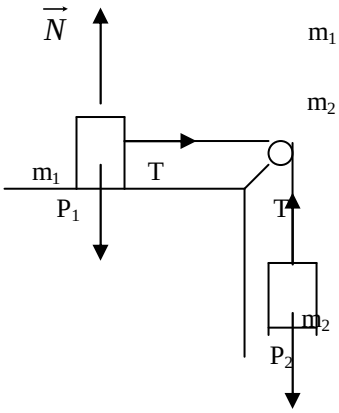
$$P \begin{cases} P_1 = m\,g\,\text{sen}\,\alpha \\ P_2 = m\,g\cos\alpha \end{cases}$$

P

$$\left.\begin{array}{l} T - P_2 = 0 \\ P' - T = 0 \end{array}\right\} \quad T = P_2 = P' = 100\ N$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{P_2}{P} = \frac{100N}{300N} = \frac{1}{3} \qquad \alpha = \text{arc sen}\frac{1}{3} = 19^{o}28'12''$$

67º.-Sobre una superficie horizontal lisa se coloca un bloque de 4 Kg. Una cuerda horizontal atada al bloque pasa por una polea de masa despreciable y sin rozamiento, unida por el otro extremo a un cuerpo de 3 Kg que cuelga de la misma. Hallar la aceleración y la tensión de la cuerda cuando el sistema se deja en libertad.

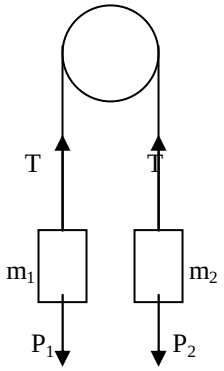


$m_1 = 4$ kg $\qquad P_2 - T = m_2\, a \qquad P_2 = (m_1 + m_2)\, a$

$m_2 = 3$ kg $\qquad T = m_1\, a \qquad a = \dfrac{P_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{3kg.9'8m.s^{-2}}{7kg} = 4'2\ m/s^2$

$T = m\, a = 4\ kg\ .4'2\ m/s^2 = 16'8\ N$

68º.- Sean dos masas de 6 y 8 Kg conectadas a los extremos de una cuerda de masa despreciable y suspendidas por una polea ligera sin rozamiento. Hallar las aceleraciones de los cuerpos y la tensión de la cuerda.



$$\left.\begin{array}{lll} m_1 = 6\ kg & T - P_1 = m_1\, a & \\ m_2 = 8\ kg & P_2 - T = m_2\, a & \end{array}\right\} \quad P_2 - P_1 = (m_1 + m_2)\, a$$

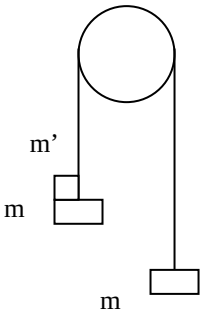
$$a = \frac{P_2 - P_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\, g \quad a = \frac{8kg - 6kg}{6kg + 8kg}.9'8\frac{m}{s^2} = 1'4\ m/s^2$$

$T = P + m_1\, a = 60\ N + 8'4\ N = 68'4\ N$

69º.- Dos masas iguales, cada una de 1 Kg, penden de los extremos de un hilo que pasa por una polea de rozamiento despreciable. ¿Qué diferencia de altura debe haber entre las dos masas para que una sobrecarga de 20 g, colocada sobre la más elevada, dé lugar que al cabo de 2s ambas estén a la misma altura?

Si las masas continúan moviéndose, ¿qué diferencia de altura habrá entre ellas 4 s después de haber estado a la misma altura? Rª: h = 0,4m; h´= 3,2m

$$\left.\begin{array}{r} (m + m')\, g - T = (m + m')\, a \\ T - m\, g = m\, a \end{array}\right\} \quad a = \frac{m'.g}{2m + m'} = \frac{0'02kg.9'8m/s^2}{2'02kg} = 0'1\ m/s^2$$



$s = \frac{1}{2} a.t^2 = \frac{1}{2}$ 0'1 m/s^2. 4 s^2 = 0'2 m ; $s = \frac{h}{2}$; h = 2.s = 2.0'2m = 0'4 m

V_f = a . t = 0'1 m/s^2.2 s = 0'2 m/s

$s' = V_o t + \frac{1}{2} a t^2$ = 0'2 m/s .4 s + $\frac{1}{2}$ 0'1 m/s^2 16 s^2 = 0'8 m + 0'8 m = 1'6 m

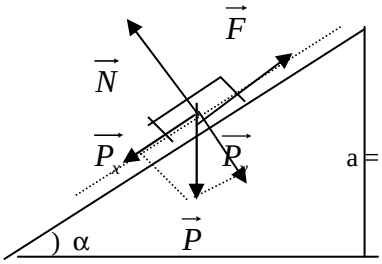
$s' = \frac{h'}{2}$ h' = 2 s' = 2.1'6 m = 3'2 m

70º.- Un bloque de 60 Kg se apoya sobre un plano inclinado que forma un ángulo de 60º con la horizontal. Se tira del bloque hacia arriba y en la dirección del plano con una fuerza de 300 N. ¿Cuál será la aceleración del bloque ?

P = m g = 60 kg.9'8 m/s^2 = 600 N

P_x = P sen 30º = 600 N sen 60º = 300 $\sqrt{3}$ N

P_y = P cos 30º



F – P_x = m a

$$a = \frac{F - P_x}{m} = \frac{300N - 300\sqrt{3}N}{60kg} = -3'4 \text{ m/s}^2$$

$$a = \frac{F - P_x}{m} = \frac{300N - 60Kg.9'8m.s^{-2}0'5}{60Kg} = 0'1 \text{ m/s}^2 = 0$$

71º.-Un bloque de 30 Kg es arrastrado hacia arriba sobre un plano inclinado 30º mediante una fuerza paralela al plano de 600 N. El coeficiente de rozamiento es 0,25.Calcular:

a) la aceleración

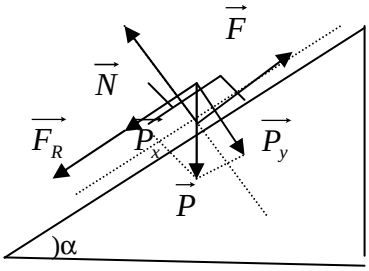
b) la velocidad después de haber recorrido una distancia de 4m a lo largo del plano

c) la fuerza normal ejercida por el plano.

P

P_x = P sen 30º = mg sen 30º = 30 kg.9'8 m/s^2.0'5 = 150 N

P_y = P cos 30º = m g cos 30º = 30 kg .9'8 m/s^2 . $\sqrt{3}$ /2 = 258 N



N = P_y = 258 N

F_R = μ N = 0'25.258 N = 64'5 N

a) F – P_x – F_R = m a ; $a = \frac{F - P_x - F_R}{m} = \frac{600N - 150N - 64'5N}{30kg} = \frac{385'5N}{30kg}$ = 12'85 m/s^2

b) $s = \frac{1}{2} a.t^2$

v = a.t

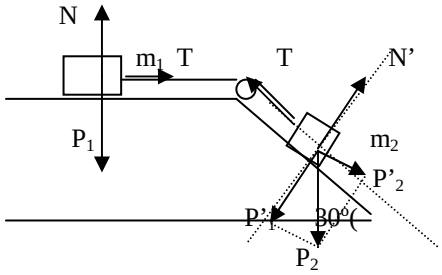
$v = \sqrt{2.a.e} = \sqrt{2.12'85m/s^2.4m} = \sqrt{102'8}m/s$ = 10'14 m/s

a) N = P_y = 258 N

72º.- Sobre un plano horizontal se coloca un cuerpo de 280 Kg. Se le une a otro de 700 Kg que se desliza por una rampa de 30º de inclinación, en la cual termina el plano horizontal. Calcular:

a) La aceleración del sistema

b) La fuerza con que hay que sujetar al cuerpo del plano horizontal para que el sistema se mueva con velocidad constante.

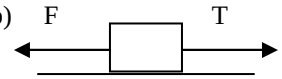


$P'_2 = P_2 \text{ sen } \alpha$

$\left.\begin{array}{l} P'_2 - T = m_2\, a \\ T = m_1\, a \end{array}\right\}$ $P'_2 = (m_1 + m_2)\, a$

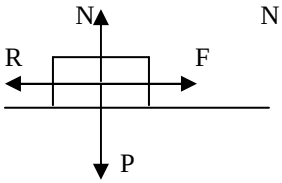
$$a = \frac{P'_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 g sen\alpha}{m_1 + m_2} = \frac{700Kg.9'8m/s^2 sen30^o}{980Kg} = 3'57 \text{ m/s}^2$$

b)



$\left.\begin{array}{l} T - F = 0 \\ P'_2 - T = 0 \end{array}\right\}$ $P'_2 = F = m_2\, g \text{ sen } \alpha = 700 \text{ kh } 9'8 \text{ m/s}^2 .0'5 = 3500 \text{ N}$

73º.- Sobre un bloque de 50 Kg situado sobre una superficie horizontal se aplica una fuerza de 200 N durante 3 s. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el suelo es de 0,25, hallar la velocidad que adquiere el bloque al cabo de los 3 s.



$N = P = m\, g = 50 \text{ Kg}.9'8 \text{ m/s}^2 = 500 \text{ N}$

$R = \mu\, N = 0'25 .500 \text{ N} = 125 \text{ N}$

$F - R = m\, a \quad a = \dfrac{F - R}{m} = \dfrac{200N - 125N}{25kg} = 1'5 \text{ m/s}^2$

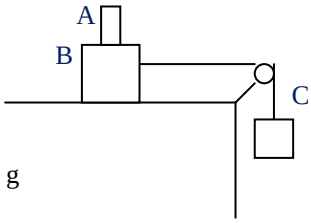
$V_f = a\, t = 1'5 \text{ m/s}^2\, 3 \text{ s} = 4'5 \text{ m/s}$

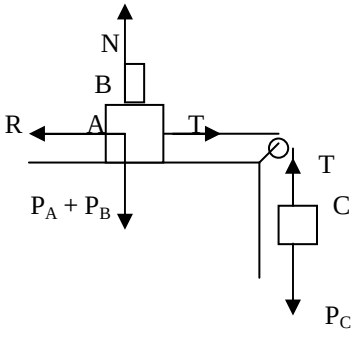
Ó $\quad F - R = m \dfrac{dV}{dt} \qquad \dfrac{F - R}{m} dt = dV \qquad V = \displaystyle\int_0^3 \frac{F - R}{m} dt = \frac{F - R}{m} [t]_0^3 = 4'5 \text{ m/s}$

74º.- En el sistema de la figura, los bloques A y B deslizan con una velocidad constante sobre la superficie horizontal por la acción de otro bloque B C suspendido. El bloque B se separa del A y se suspende junto con el C. ¿ Cuál será la aceleración del sistema?

¿ Y la tensión de la cuerda ?

Datos: $m_A = 0'8$ Kg,, $m_B = 0'2$ Kg, $m_C = 0'2$ Kg,





$N = P_A + P_B = (m_A + m_B)\, g$

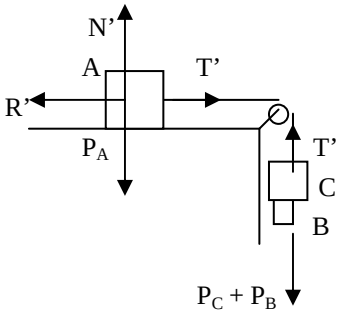
$R = \mu\, N = \mu\, (m_A + m_B)\, g$

$\left.\begin{array}{l} P_c - T = 0 \\ T - R = 0 \end{array}\right\}$

$P_C = R$

$\mu\, (m_A + m_B)\, g = m_C\, g$

$$\mu = \frac{m_C}{m_A + m_B} = \frac{0'2kg}{0'8kg + 0'2kg} = 0'2$$



$T' - R' = m_A\, a$

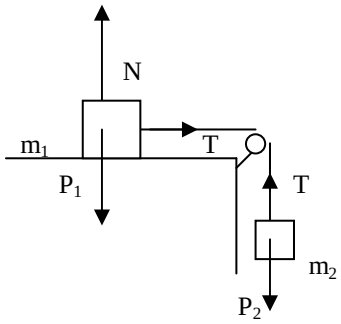
$P_C + P_B - T' = (m_C + m_B)\, a$

$P_C + P_B - R' = (m_A + m_B + m_C)\, a$

$$a = \frac{(m_C + m_B)g - \mu . m_B g}{m_A + m_B + m_C} = \frac{0'4kg - 0'16kg}{1'2kg} 9'8 m/s^2 = 2\ m/s^2$$

$T' = P_C + P_B - (m_C + m_B)\, a = (m_C + m_B)\, (g - a) = 0'4\ Kg\ (9'8 - 2)\ m/s^2 = 3'2\ N$

75º. Un bloque de masa m se mueve sobre una superficie horizontal, unido, mediante una cuerda flexible y ligera que pasa por una polea, a otra masa m_2 que cuelga del otro extremo.
Hallar la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda, a) si no hay rozamiento entre el bloque y la superficie horizontal, y b) si existe rozamiento con un coeficiente dinámico μ



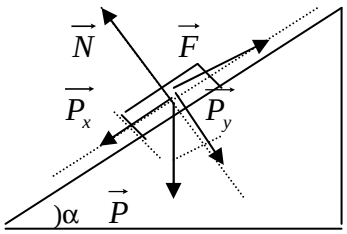
a) $\left.\begin{array}{l} P_2 - T = m_2\, a \\ T = m_1\, a \end{array}\right\}$ $P_2 = (m_1 + m_2)\, a$ $\quad a = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} g$

b) $R = \mu\, N = \mu\, P_1 = \mu\, m_1\, g$

$\left.\begin{array}{l} P_2 - T = m_2\, a \\ T - R = m_1\, a \end{array}\right\}$ $P_2 - R = (m_1 + m_2)\, a$

$$a = \frac{p_2 - R}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 g - \mu . m_1 g}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 - \mu . m_1}{m_1 + m_2} g$$

76º.- Calcular la fuerza que habría que hacer sobre un cuerpo de 10 Kg para que ascendiera con una aceleración de 0,1 m/s^2 por una superficie pulida, formando un ángulo de 30º con la horizontal.



$\left.\begin{array}{l} P_x = P \text{ sen } \alpha \\ P_x = P \text{ sen } \alpha \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \vec{f_n} = m.\vec{a} \\ \vec{f_n} = m.\vec{a} \end{array}$ $\begin{array}{l} \vec{F} + \vec{P_x} = m.\vec{a} \\ \vec{F} + \vec{P_x} = m.\vec{a} \end{array}$ $\begin{array}{l} F - P_x = m\, a \\ F - P_x = m\, a \end{array}$

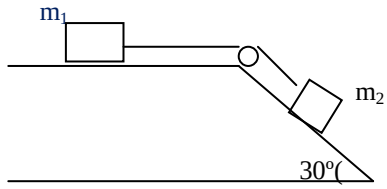
$\vec{N} = -\vec{P_y}$ $\quad F = m\, (g \text{ sen } \alpha + a)$

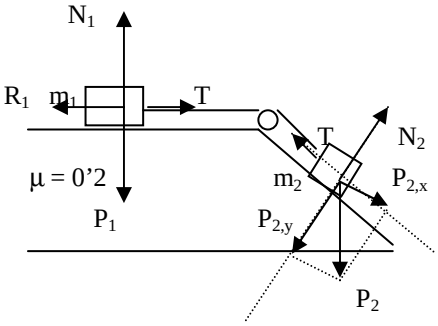
$F = 10\ Kg\ (9'8\ m/s^2 . 0'5\ s + 0'1\ m/s^2) = 10\ Kg\ (4'9 + 0'1)\ m/s^2 = 50\ N$

77º.- En la figura adjunta, m_1 = 20 Kg y m_2 = 30 Kg y el coeficiente de rozamiento con cada superficie es 0,2. Calcular:

a) la aceleración del sistema

b) la tensión de la cuerda





$R_1 = \mu N_1 = \mu P_1 = 0'2 \cdot 200N = 40$ N

$P_2 \begin{cases} P_{2,x} = P_2 \text{ sen } 30º = 300 \text{ N} \cdot 0'5 = 150 \text{ N} \\ P_{2,y} = P_2 \cos 30 = 300 \text{ N} \cdot 0'866 = 259'8 \text{ N} \end{cases}$

$N_2 = P_{2,y}$

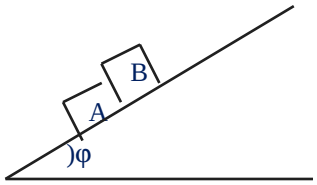
$R_2 = \mu N_2 = \mu P_2 \cos 30 = 0'2 \cdot 259'8 \text{ N} = 51'96 \text{ N} = 52$ N

a) $\left.\begin{array}{l} T - R_1 = m_1 a \\ P_{2,x} - T - R_2 = m_2 a \end{array}\right\} P_{2,x} - R_1 - R_2 = (m_1 + m_2)\, a$

$$a = \frac{P_{2,x} - R_1 - R_2}{m_1 + m_2} = \frac{150N - 40N - 52N}{50N} = 1'16 \text{ m/s}^2$$

b) $T = R_1 + m_1 a = 40 \text{ N} + 20 \text{ kg} \cdot 1'16 \text{ m/s}^2 = 63'2$ N

78º.- Sobre un tablero de madera horizontal se colocan dos cuerpos A y B de masas M_1 y M_2 y cuyos coeficientes de rozamiento dinámico contra la madera son μ_1 y μ_2. Se va inclinando el plano como indica la figura. Averiguar :



a) La condición necesaria para que el cuerpo A se ponga en movimiento antes que el B.

b) La condición necesaria para que los dos cuerpos deslicen a la vez juntos.

c) Si se cumple la segunda condición, ¿qué valor debe tener φ para que el sistema AB deslice con movimiento uniforme?

d) ¿Cuál será el valor de la aceleración del movimiento cuando se incline el plano un ángulo φ´ mayor que el ángulo φ del apartado anterior?

a) Debe verificarse $F_{R_A} < F_{R_B} \Rightarrow \mu_1 < \mu_2$

b) Pueden deslizarse juntos bien por ser idénticos los rozamientos o bien porque siendo el rozamiento de A mayor que el de B, éste último "empuje" al cuerpo A.

$$\mu_1 \geq \mu_2$$

c) $P_{A,x} + P_{B,x} = F_{R,A} + F_{R,B}$

$M_A g \text{ sen } \alpha + M_B g \text{ sen } \alpha = \mu_1 M_A g \cos \alpha + \mu_2 M_B g \cos \alpha$; $\text{sen } \alpha (M_A + M_B) = \cos \alpha (\mu_1 M_A + \mu_2 M_B)$

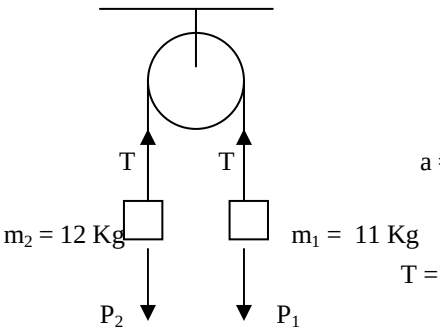
$$tg\alpha = \frac{\mu_1 M_A + \mu_2 M_B}{M_A + M_B}$$

d) $(P_{A,x} + P_{B,x}) - (F_{R,A} + F_{R,B}) = (M_A + M_B)\, a$

$g \text{ sen } \alpha' (M_A + M_B) - g \cos \alpha' (\mu_1 M_A + \mu_2 M_B) = (M_A + M_B)\, a$

$$a = \frac{g[sen\alpha'(M_A + M_B) - \cos\alpha'(\mu_1 M_A + \mu_2 M_B)]}{M_A + M_B} = g(sen\alpha' - \cos\alpha' \frac{\mu_1 M_A + \mu_2 M_B}{M_A + M_B})$$

79º.- Una cuerda que se apoya sobre la garganta de una polea de eje horizontal y masa despreciable sostiene en sus extremos masas de 10 y 12 Kg. Hallar la aceleración de ambas masas y la tensión de la cuerda, prescindiendo del rozamiento.



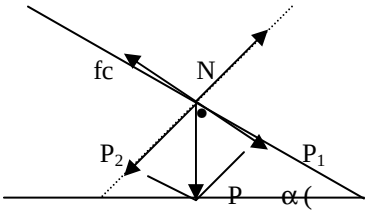
$$\left.\begin{array}{l} T - P_1 = m_1\, a \\ P_2 - T = m_2\, a \end{array}\right\} \quad P_2 - P_1 = (m_1 + m_2)\, a$$

$$a = \frac{P_2 - P_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\, g = \frac{12kg - 10kg}{22kg}\, 9'8 m/s^2 = 0'9 \text{ m/s}^2$$

$$T = P_1 + m_1\, a = m_1\, g + m_1\, a = 10 \text{ kg}.9'8 \text{ m/s}^2 + 10 \text{ kg}.0'9 \text{m/s}^2 = 109 \text{ N}$$

80º.- Una bolita unida por un hilo de 0'5 m de longitud a un punto fijo de una superficie plana gira, deslizándose sin rozamiento sobre dicha superficie, con una velocidad angular de 10 vueltas por minuto. ¿Cuál será la inclinación máxima de la superficie para que la bola continúe describiendo circunferencias? Expresar el resultado mediante una función trigonométrica del ángulo de la superficie con las horizontal.

$$w = 10 \text{ r.p.m.}. \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{3} \text{ rad/s}$$



$$P_2 = N$$

$$P_1 = P \text{ sen } \alpha \qquad P_1 = fc \qquad P \text{ sen } \alpha = m\, w^2\, R$$

$$m\, g \text{ sen } \alpha = m\, w^2\, R$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{w^2 R}{g}; \quad \alpha = \text{arc sen } \frac{w^2 R}{g}; = \text{arc sen } \frac{\frac{\pi^2}{9}.0'5}{9'8} = \text{arc sen } 0'055 = 3^o\ 12'\ 14''$$

81º.- Dos cuerpos de 3 y 4 kg de masa, respectivamente, se deslizan sobre una superficie horizontal pulida, bajo la acción de una fuerza de 15 N sobre el primero y de 8 N sobre el segundo. Los dos parten dekl reposo, del mismo punto y en el mismo instante. ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que la distancia entre ellos sea de 100 m? ¿Qué velocidad llevará cada uno en dicho instante? La trayectoria seguida por los cuerpos es una línea recta.

$$m_1 = 3 \text{ kg} \qquad F_1 = 15 \text{ N} \qquad F_1 = m_1\, a_1 \qquad a_1 = \frac{F_1}{m_1} = \frac{15N}{3kg} = 5 \text{ m/s}^2$$

$$m_2 = 4 \text{ kg} \qquad F_2 = 8 \text{ N} \qquad F_2 = m_2\, a_2 \qquad a_2 = \frac{F_2}{m_2} = \frac{8N}{4kg} = 2 \text{ m/s}^2$$

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = \frac{1}{2}\, a_1\, t^2 \\ e_2 = \frac{1}{2}\, a_2\, t^2 \end{array}\right\} \quad e_1 - e_2 = \frac{1}{2}\,(a_1 - a_2)\, t^2 \qquad 100 \text{ m} = \frac{1}{2}\,(5 - 2) \text{ m/s}^2\, t^2 \qquad t = \sqrt{\frac{200m}{3m.s^{-2}}} = 8'16 \text{ s}$$

$$v_1 = a_1\, t = 5 \text{ m/s}^2 .8'16 \text{ s} = 40'8 \text{ m/s}$$

$$v_2 = a_2\, t = 2 \text{ m/s}^2 .8'16 \text{ s} = 16'32 \text{ m/s}$$

82º.- Se golpea una pelota de goma de 0'1 Kg de masa y en reposo con una pala, saliendo lanzada con una velocidad de 20 m/s. La pelota con esta velocidad choca horizontalmente contra una pared, rebotando con una velocidad de 16 m/s. Si el tiempo de duración de ambos choques es de 0'005 s, calcular: a) la variación de la cantidad de movimiento en cada choque y b) la fuerza media que se ha ejercido sobre la pelota.

a) $\Delta P = m.\Delta V = m(V_f - V_o) = 0'1\ Kg.20\ m/s = 2\ Kg.m/s$; $I = \Delta P$; $F.t = \Delta P$ $F = \dfrac{2Kg.m/s}{5.10^{-3}s} = 400\ N$

b) $\leftarrow V_1$ $\Delta P = m.\Delta V = m(V_2 - V_1) = -0'1\ Kg.36\ m/s = -3'6\ Kg.m/s$

$\rightarrow V_2 = -16\ m/s$ $F = \dfrac{\Delta P}{t} = \dfrac{-3'6Kg.m/s}{5.10^{-3}s} = -0'72.10^3\ N = -720\ N$

156º.- La fuerza que actúa sobre una partícula de 3 gr de masa es $\vec{F} = (5-t^2)\vec{i} + 2t.\vec{j}$ dinas. Si para t = 0 es r_o 0 0 y $V_o = 0$, hallar la posición y velocidad de la partícula para t = 3 s.

$$\vec{F} = m.\vec{a} \qquad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{5-t^2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}t\vec{j}$$

$$d\vec{V} = \vec{a}.dt \qquad \vec{V} = \int \vec{a}dt = \int (\frac{5-t^2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}t\vec{j})dt = \frac{1}{3}\int\left[(5-t^2)\vec{i} + 2t\vec{j}\right]dt = \frac{1}{3}\left[(5t - \frac{t^3}{3})\vec{i} + \frac{2t^2}{2}\vec{j}\right] =$$

$$= (\frac{5}{3}t - \frac{t^3}{9})\vec{i} + \frac{t^2}{3}\vec{j}\ \text{m/s}$$

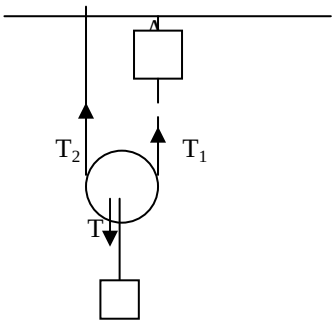
$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad d\vec{r} = \vec{V}.dt$$

$$\vec{r} = \int \vec{V}dt = \int\left[(\frac{5}{3}t - \frac{t^3}{9})\vec{i} + \frac{t^2}{3}\vec{j}\right]dt = (\frac{5}{3}\frac{t^2}{2} - \frac{1}{9}\frac{t^4}{4})\vec{i} + \frac{1}{3}\frac{t^3}{3}\vec{j} = (\frac{5}{6}t^2 - \frac{1}{36}t^4)\vec{i} + \frac{1}{9}t^3\vec{j}$$

$$\vec{V}_3 = (\frac{5}{3}3 - \frac{3^3}{9})\vec{i} + \frac{3^2}{3}\vec{j}\ \text{m/s} = 2\vec{i} + 3\vec{j}\ \text{m/s}$$

$$\vec{r}_3 = (\frac{5}{6}3^2 - \frac{1}{36}3^4)\vec{i} + \frac{1}{9}3^3\vec{j} = \frac{21}{4}\vec{i} + 3\vec{j}$$

83º.- En la figura se muestra un sistema físico formado por un dinamómetro y una polea móvil de la cual pende un cuerpo de masa M g y que deseamos pesar. Si la escala del dinamómetro marca un máximo de 20 Kg (200 N), ¿hasta qué valor de M g podemos medir mediante este sistema?



$T_1 = T_2$

$T_1 + T_2 = T$ $2\,T_1 = T$

$T = P$ $T_1 = \dfrac{T}{2} = \dfrac{P}{2}$ $P = 2\,T_1 = 2\,.\,200\ N = 400\ N$

84º.- Un coche se mueve con una velocidad de 108 Km/h y frena bruscamente para evitar un accidente. El conductor, de 70 Kgde masa, lleva puesto el cinturón de seguridad. Si el coche se detiene en 5 s, calcula la fuerza ejercida por el cinturón sobre el conductor supuesta constante.

$V_o = 108 \dfrac{Km.1000\dfrac{m}{Km}}{h.3600\dfrac{s}{h}} = 30$ m/s $\qquad V_f = 0 \qquad t = 5$ s

$a = \dfrac{\Delta V}{\Delta t} = \dfrac{V_f - V_o}{t} = \dfrac{-30 m/s}{5s} = -6$ m/s^2

F = m a = 70 Kg.6 m/s^2 = 420 N

85º.- Un electrón de 9'1.10^{-31} Kg de masa se mueve del cátodfo al ánodo de un tubo de descarga, siguiendo una línea recta horizontal. Si parte del reposo y llega al ánodo con una velocidad de 5.10^{5} m/s, calcula la fuerza que actúa sobrte el electrón supuesta constante. La separación existente entre ánodo y cátodo es 0'5 cm.
Compara la fuerza anterior con el peso del electrón ¿Es razonable despreciar el peso?

m = 9'1.10^{-31} kg $\qquad e = \dfrac{1}{2} a t^2$

Vo = 0, V_f = 5.10^{5} m/s $\qquad V_f = a t$

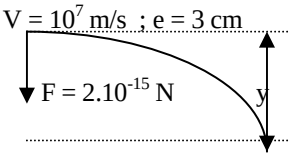
$\Big\}\ V_f^2 = 2 a e \qquad a = \dfrac{V_f^2}{2e} = \dfrac{25.10^{10} m^2.s^{-2}}{2.5.10^{-3} m} = 25.10^{12}$ m/s^2

F = m a = 9'1.10^{-31} Kg . 25.10^{12} m/s^2 = 227'5.10^{-19} N

$\dfrac{F}{P} = \dfrac{m.a}{m.g} = \dfrac{a}{g} = \dfrac{25.10^{12}}{9'8} = 2'5.10^{12} \qquad$ F = 2'5.10^{12} P

86º.- En un osciloscopio, un electrón es lanzado por el tubo de rayos catócidos, en dirección horizontal, con una velocidad de 10^{7} m/s. AA lo largo del trayecto actúa sobre él un campo eléctrico vertical, que ejerce una fuerza dirigida verticalmente hacia debajo de 2.10^{-15} N. Si la masa del electrón es 9'1.10^{-31} kg, calcula la desviación que sufre el electrón respecto a la horizontal cuando incide sobre una pantalla a 3 cm de distancia del punto de disparo.

V = 10^{7} m/s ; e = 3 cm



e = v. t $\qquad t = \dfrac{e}{v} = \dfrac{3.10^{-2} m}{10^{7} m/s} = 3.10^{-9}$ s

F = m a $\qquad a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{2.10^{-15} N}{9'1.10^{-31} Kg} = \dfrac{2}{9'1} 10^{16} m/s^2$

$e = \dfrac{1}{2} a t^2 = \dfrac{1}{2} \dfrac{2}{9'1} 10^{16} m/s^2 .9.10^{-18} s^2 = 0'989.10^{-2}$ m = 9'89 mm

87º.- Un cuerpo de 3 Kg de masa se mueve sobre una superficie horizontal. Si actúa una fuerza $F = 30 + t^2$, donde F se expresa en N y t en s, calcula la velocidad de la partícula en el instante t = 4 s, sabiendo que en el instante inicial se hallaba en reposo. Considera despreciable el rozamiento.

F = m a $a = \frac{F}{m} = \frac{30+t^2}{3} = 10 + \frac{1}{3}t^2$

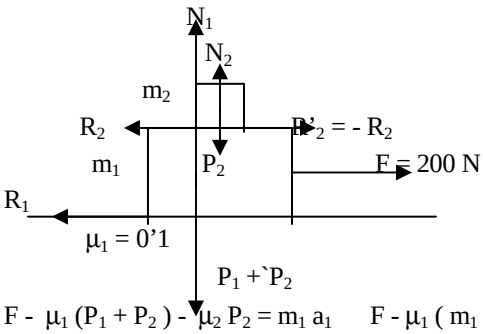
dV = a.dt $V = \int a dt = \int (10 + \frac{1}{3}t^2)dt = 10t + \frac{1}{9}t^3 + C$

t = =0 V = 0 $\Rightarrow$ 0 = C $\Rightarrow$ $V = 10\,t + \frac{1}{9}\,t^3$

$V_4 = 10 \,.\, 4 + \frac{1}{9}\,4^3 = 47'11$ m/s

88º.- Dos cuerpos cuyas masas son 2 y 10 Kg están situados uno sobre el otro. El coeficiente de rozamiento entre ambos es 0'2 y el coeficiente de rozamiento de la masa de 10 Kg sobre la superficie es 0'1.
Calcula la aceleración que adquiere cada cuerpo si se le aplica una fuerza lateral de 200 N sobre la masa de 10 Kg ¿Qué sucedería si la fuerza lateral fuera solo de 20 N?

$N_1 = P_1 + P_2$ $R_1 = \mu_1 N_1 = \mu_1 (P_1 + P_2)$
$N_2 = P_2$ $R_2 = \mu_2 N_2 = \mu_2 P_2$



1) $F - R_1 - R_2 = m_1 a_1$
2) $R_2 = m_2 a_2$

$F - \mu_1 (P_1 + P_2) - \mu_2 P_2 = m_1 a_1$ $F - \mu_1 (m_1 g + m_2 g) - \mu_2 m_2 g = m_1 a_1$

$a_1 = \frac{F - \mu_1(m_1+m_2)g - \mu_2 m_2 g}{m_1} = \frac{200N - 0'1.12Kg.9'8m/s^2 - 0'2.2Kg.9'8m/s^2}{10Kg} = 18'4$ m/s²

$a_2 = \frac{R_2}{m_2} = \frac{\mu_2 m_2 g}{m_2} = \mu_2 g = 0'2 \,.9'8$ m/s² = 1'96 m/s²

como $a_2 < a_1$ esto sucederá hasta que el cuerpo 2 caiga y a partir de ese instante

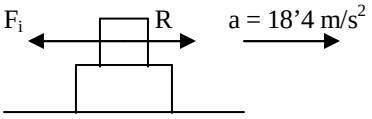
$F - R_1 = m_1 a$ $a = \frac{F - R_1}{m_1} = \frac{F - \mu_1 m_1 g}{m_1} = \frac{200N - 0'1.10Kg.9'8m/s^2}{10Kg} = 19$ m/s²

b) si F = 20 N

$a_1 = \frac{F - \mu_1(m_1+m_2)g - \mu_2 m_2 g}{m_1} = \frac{20N - 0'1.12Kg.9'8m/s^2 - 0'2.2Kg.9'8m/s^2}{10Kg} = 0'4$ m/s²

ó

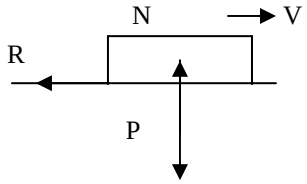
$F - \mu_1 (P_1 + P_2) - \mu_2 P_2 = m_1 a_1$ $a_1 = 18'4$ m/s²



$F_i - R = m\,a'$ $m\,a - \mu_2\, m\, g = m\,a'$
$a' = a - \mu_2\, g = 18'4$ m/s² – 1'96 m/s² = 16'44 m/s²

$F_R = R_2 = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g = 0'2.2$ kg. 9'8 m/s² = 4 N
$F_i = m\,a = 2$ kg 0'4 m/s² = 0'8 N < F_R

89º.- Un automóvil se mueve con velocidad constante V. En cierto instante se aplica el freno, bloqueando las ruedas, con lo que el coche desliza, hasta detenerse. Si el coeficiente de rozamiento entre las ruedas y la superficie es μ, demuestra que la distancia mínima para que se detenga es: $x = v^2/2\mu g$



$R = m\,a$

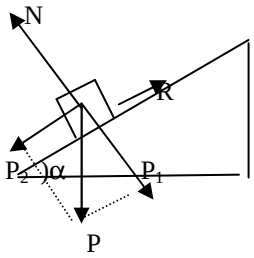
$\mu N = m\,a \qquad \mu\, m\, g = m\, a$

$a = \mu\, g$

$V_f = V_o - a\,t \qquad 0 = V_o - a\,t \qquad t = \dfrac{V}{\mu.g}$

$$e = V_o - \frac{1}{2} a\,t^2 = V\,\frac{V}{\mu.g} - \frac{1}{2}\frac{V^2}{\mu.g} = \frac{V^2}{2\mu.g}$$

90º.- Se quiere determinar el coeficiente estático y cinético de rozamiento entre una caja y un tablón, elevando poco a poco el tablón y observando cuando comienza a deslizar la caja. Al realizar la experiencia se observa que la caja comienza a deslizar cuando la inclinación del tablón respecto a la horizontal es de 28º. En esas condiciones la caja recorre 8 m en 3 s. Calcula con estos datos el coeficiente de rozamiento estático y cinético.



$P = m\,g \quad \begin{cases} P_1 = m\,g\cos\alpha \\ P_2 = m\,g\,\text{sen}\,\alpha \end{cases}$

$N = P_1 \qquad R = \mu N = \mu P_1 = \mu\, m\, g\cos\alpha$

a) $P_2 = R \qquad m\,g\,\text{sen}\alpha = \mu_e\, m\, g\cos\alpha \qquad \mu_e = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \text{tag}\,\alpha = \text{tag}\,28º = 0'53$

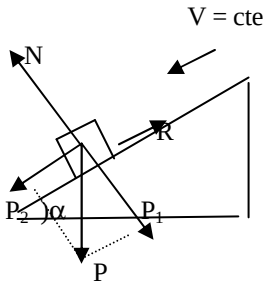
b) $e = 3\,m \quad t = 3\,s$

$e = \dfrac{1}{2} a\,t^2 \qquad a = \dfrac{2e}{t^2} = \dfrac{2.3m}{9s^2} = \dfrac{2}{3}\ m/s^2$

$P_2 - R = m\,a \qquad m\,g\,\text{sen}\,\alpha - \mu_c\, m\, g\cos\alpha = m\,a$

$$\mu_c = \frac{mgsen\alpha}{mg\cos\alpha} - ma = \frac{g.sen\alpha}{g\cos\alpha} - a = \frac{9'8m.s^{-2}.0'469 - \frac{2}{3}m.s^{-2}}{9'8m.s^{-2}\,0'8829} = 0'455$$

91º.- Un cuerpo desliza por un plano inclinado 30º con velocidad constante. Una vez en la base del plano se lanza hacia arriba con una velocidad de 10 m/s. Calcula el tiempo que tardará en detenerse y la altura a la que lo hará. Una vez se detenga, ¿volverá hacia abajo por si mismo?



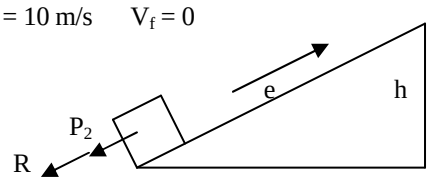
$P = m\,g \quad \begin{cases} P_1 = m\,g\cos\alpha \\ P_2 = m\,g\,\text{sen}\,\alpha \end{cases}$

$N = P_1 \qquad R = \mu N = \mu P_1 = \mu\, m\, g\cos\alpha$

$P_2 - R = 0$

$m\,g\,\text{sen}\,\alpha - \mu\, m\, g\cos\alpha = 0 \qquad \mu = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \text{tag}\,\alpha = \text{tag}\,30º = 0'577$

$V_o = 10$ m/s $V_f = 0$



$P_2 + R = m\,a$

$$a = \frac{P_2 + R}{m} = \frac{mgsen\alpha + \mu mg\cos\alpha}{m} = gsen\alpha + \mu.g\cos\alpha = gsen\alpha + \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}g\cos\alpha = 2gsen\alpha$$

$a = 2.9'8$ m/s^2 $0'5 = 9'8$ m/s^2

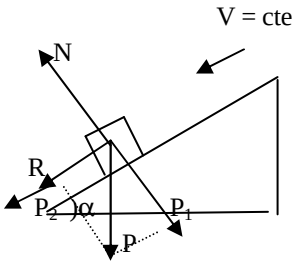
$V_f = V_o - a\,t$ $0 = 10$ m/s $- 9'8$ m/s^2.t $t = 1$ s

$e = V_o\,t - \frac{1}{2}\,a\,t^2 = 10$ m/s 1 s $- \frac{1}{2}$ 9'8 m/s^2 1 s^2 = 10 m – 5 m = 5 m

sen $\alpha = \frac{h}{e}$ h = e sen α = 5 m sen 30 = 2'5 m

NO

92º.- Se lanza hacia arriba por un plano inclinado 30º un cuerpo de 0'2 Kg de masa con una velocidad de 12 m/s. Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es 0'18, calcula la distancia recorrida sobre el plano antes de detenerse. ¿Volverá a descender por si mismo? En caso afirmativo, calcula la velocidad con que llegará a ka base.



$P = m\,g$ $\begin{cases} P_1 = m\,g\cos\alpha \\ P_2 = m\,g\,sen\,\alpha \end{cases}$

$N = P_1$ $R = \mu\,N = \mu\,P_1 = \mu\,m\,g\cos\alpha$

$P_2 + R = m\,a$

$$a = \frac{P_2 + R}{m} = \frac{mgsen\alpha + \mu mg\cos\alpha}{m} = g.sen30 + \mu.g\cos 30$$

$a = 9'8$ m/s^2 (0sen 30 + 0'18 cos 30) = 6'421 m/s^2

$V_f = V_o - a\,t$ $0 = 12$ m/s $- 6'421$ m/s^2.t $t = 1'868$ s

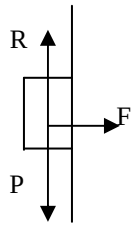
$e = V_o\,t - \frac{1}{2}\,a\,t^2 = 12$ m/s 1'868 s $- \frac{1}{2}$ 6'421 m/s^2 1'868^2 s^2 = 11'21 m

b) Como $P_2 < R$ desciende por si mismo

$P_2 - R = m\,a$ $a = \frac{P_2 - R}{m} = \frac{0'98N - 0'3042N}{0'2Kg} = 3'38$ m/s^2

$\left.\begin{array}{l} e = \frac{1}{2}\,a\,t^2 \\ v = a\,t \end{array}\right\}$ $V = \sqrt{2ae} = 8'7$ m/s

93º.- Calcular la fuerza que hay que ejercer para sostener un bloque en reposo si su masa es de 5 Kg y se apoya contra una pared vertical, ejerciendo una fuerza horizontal. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y la pared es 0’60.



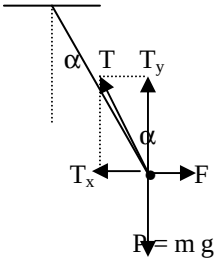
$R = \mu N = \mu F$

$P - R = 0$

$m g - \mu F = 0$

$$F = \frac{mg}{\mu} = \frac{5Kg.9'8m/s^2}{0'60} = 81'66 \text{ N}$$

94º.- Una esfera cargada, cuya masa es 0’5 g, está suspendida de un hilo. Al acercar otro cuerpo cargado actúa sobre la esfera una fuerza eléctrica horizontal. Debido a ello, la carga queda en reposo, formando la cuerda un ángulo de 25º con la vertical. Calcular la fuerza que actúa y la tensión de la cuerda.



$\sum F_y = 0 \qquad T_y = P = m g$

$\sum F_x = 0 \qquad T_x = F$

$T_y = 0'3.10^{-3}$ Kg 9’8 m/s^2 = 2’94.10^{-3} N

$$\cos \alpha = \frac{T_y}{T}$$

$$T = \frac{T_y}{\cos\alpha} = \frac{2'94.10^{-3} N}{\cos 25^o} = \frac{2'94.10^{-3} N}{0'906} = 3'24 .10^{-3} \text{ N}$$

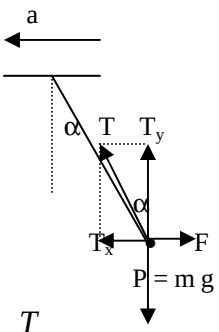
$$\text{tag } \alpha = \frac{T_x}{T_y}$$

$T_x = T_y$ .tag α = 2’94.10^{-3} N tag 25º = 2’4.10^{-3}.0’466 = 1’37 .10^{-3} N

$F = T_x$ = 1’37 .10^{-3} N

95º.- Un método para medir la aceleración que actúa sobre un vehículo consiste en la colocación en el interior del mismo de un péndulo. Las desviaciones de éste respecto a la vertical pondrán de manifiesto la existencia de la aceleración.

Supón que un péndulo de 200 g de masa y 1 m de longitud, cuelga suspendido en el interior de un vehículo. Calcule la aceleración que actúa sobre el vehículo cuando el péndulo forma un ángulo de 20º con la vertical. Calcula asimismo la tensión que soporta la cuerda.



P = m g = 0’2 Kg.9’8 m/s^2 = 19’6 N

T_y = P = 19’6 N

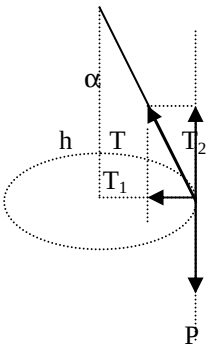
$$\text{tag } \alpha = \frac{T_x}{T_y}$$

$T_x = T_y$ .tag α = 19’6 N tag 20º = 19’6.0’363 N = 0’713 N

$T_x = m a \qquad a = \frac{T_x}{m} = \frac{0'713N}{0'2kg}$ = 3’5669 m/s^2 = 3’57 m/s^2

$$\cos \alpha = \frac{T_y}{T} \qquad T = \frac{T_y}{\cos\alpha} = \frac{1'96N}{0'939} = \frac{2'94.10^{-3} N}{0'906}$$ =2’087 N = 2’09 N

96º.- Un péndulo cónico es un dispositivo formado por una masa, que cuelga de una cuerda, describiendo un círculo horizontal con cierto radio. Calcula las expresiones que proporcionan la velocidad angular de giro y la tensión de la cuerda, si la masa es M, la longitud de la cuerda L y el radio de giro R. Aplícalo al caso en que M = 2 Kg, L = 1 m y R = 20 cm.



$$T \begin{cases} T_1 = T \text{ sen } \alpha \;;\; T_1 = M.a_n \;,\; T \text{ sen } \alpha = M\dfrac{V^2}{R} = Mw^2R \\ T_2 = T\cos\alpha;\quad T_2 = P = Mg \quad T\cos\alpha = mMg \end{cases}$$

$$\text{tag } \alpha = \frac{w^2R}{g} \qquad w = \sqrt{\frac{g\,tag\alpha}{R}}$$

$$\vec{f_n} = \vec{T_2} + \vec{P} + \vec{T_1} = \vec{T_1}\;;$$

$T_1 = M\,w^2\,R = M\dfrac{g\,tag\alpha}{R}R = M\,g\,\text{tag}\,\alpha$ $\qquad T = \dfrac{T_1}{sen\alpha} = \dfrac{Mgtag\alpha}{sen\alpha} = \dfrac{Mg}{\cos\alpha}$

$H = \sqrt{L^2 - R^2} = \sqrt{1 - 0'04} = \sqrt{0'96} = 0'979$ m = 0'98 m

$$w = \sqrt{\frac{g\,tag\alpha}{R}} = \sqrt{\frac{g\frac{R}{h}}{R}} = \sqrt{\frac{g}{h}} = \sqrt{\frac{9'8m.s^{-2}}{0'98m}} = 3'16 \text{ rad/s.}$$

$$T = \frac{Mg}{\cos\alpha} = \frac{Mg}{\frac{h}{L}} = \frac{LMg}{h} = \frac{1m.2Kg.9'8m..s^{-2}}{0'98m} = 20 \text{ N}$$

97º.- Sobre un cuerpo de 2 Kg de masa, inicialmente en reposo, actúa una fuerza variable con el tiempo de acuerdo con la expresión; F = 10 – 2 t dirigida en el sentido positivo del eje x,

a) Calcula la cantidad de movimiento dela partícula en cualquier instante, así como su velocidad

b) Suponiendo que inicialmente el cuerpo se encontraba en el origen, calcula su posición y su velocidad transcurridos 10 s.

a) $\vec{F} = (10 - 2t)\vec{i}$

$\vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$ $\qquad d\,\vec{P} = \vec{F}\,dt$ $\qquad \vec{P} = \int \vec{F}..dt = \int (10 - 2t)\vec{i}.dt = (10\,t - t^2)\,\vec{i}$ Kg.m/s

$\vec{P} = m.\vec{v}$ $\qquad \vec{v} = \dfrac{\vec{P}}{m} = \dfrac{(10t - t^2)\vec{i}}{2} = (5\,t - \dfrac{1}{2}t^2)\,\vec{i}$ m/s

b) $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ $\qquad d\vec{r} = \vec{v}\,dt$

$$\vec{r} = \int \vec{v}.dt = \int (5t - \frac{t^2}{2})\vec{i}.dt = (\frac{5t^2}{2} - \frac{t^3}{6})\vec{i}$$

$$\vec{r}_{10} = \left(\frac{5.100}{2} - \frac{1000}{6}\right).\vec{i} = \frac{250}{3}\vec{i} \text{ m}$$

$$\vec{v}_{10} = (5.10 - \frac{100}{2})\vec{i} = 0$$

98º.- Bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$ un cuerpo de 5 Kg de masa se mueve en el plano XZ, de manera que su vector de posición, en función del tiempo, es: **r** = 2t $\vec{i}$ + 5t^2 $\vec{k}$ (SI) Calcular el momento de la fuerza $\vec{F}$ respecto al origen de coordenadas. Rª: -100t **j**

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} + 10.t.\vec{j} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = 10\vec{k} \qquad \vec{F} = m.\vec{a} = 50\vec{k}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2t & 0 & 5t^2 \\ 0 & 0 & 50 \end{vmatrix} = -100t.\vec{j}$$

99º.- Una pelota de hockey de 50 g rueda hacia un jugador con una velocidad de 6 m/s. A causa del golpe del stick la pelota sale rechazada en la misma dirección con velocidad de 10 m/s. Suponiendo que el tiempo de contacto entre la pelota y el stick sea de 0,05 s, calcular la fuerza media que actuó sobre la pelota. Rª: 16 N

$$\vec{F}.t = \overrightarrow{\Delta P} = m.\overrightarrow{v_f} - m\overrightarrow{v_o}$$

$$F = \frac{m.v_f - m.v_o}{t} = \frac{50.10^{-3} kg.10 m/s - 50.10^{-3} kg(-6) m/s}{5.10^{-2} s} = 16 \text{ N}$$

100º.-Una partícula de masa m = 3 Kg se mueve con la velocidad v_o = 5 m/s en la dirección y sentido (+x). Si durante 2 s se aplica a dicha partícula la fuerza **F** = 2 **i** - 3 **j** N, determinar la velocidad transcurrido dicho tiempo.

m = 3 Kg $\quad \overrightarrow{v_0} = 5.\vec{i}$ m/s $\quad$ t = 2 s $\quad \vec{F} = 2.\vec{i} - 3.\vec{j}$ N

$$I = \int_0^2 \vec{F}..dt = \int_o^2 (2.\vec{i} - 3.\vec{j})dt = (2\,\vec{i} - 3\,\vec{j})\,[t]_0^2 = 4\,\vec{i} - 6\,\vec{j} \text{ N.s}$$

$$\overrightarrow{P_0} = m.\overrightarrow{v_0} = 3 \text{ Kg} . 5\,\vec{i} \text{ m/s} = 15\,\vec{i} \text{ m/s}$$

$$\overrightarrow{P_f} = m.\overrightarrow{v_f} = 3kg.\vec{v}_f \qquad \vec{I} = \Delta\vec{P} = \overrightarrow{P_f} - \vec{P}_0$$

$$4\,\vec{i} - 6\,\vec{j} = 3.\vec{v}_f - 15\,\vec{i} \qquad \vec{v}_f = \frac{19.\vec{i} - 6.\vec{j}}{3} = \frac{19}{3}\vec{i} - 2.\vec{j} \text{ m/s}$$

101º.-Una bala de 2 g tarda 10^{-3} s en recorrer el cañón de un fusil. La fuerza que actúa sobre el proyectil mientras se encuentra en el cañón es F = 500 - 2.10^5 t en el S.I. Determinar la velocidad con que sale la bala de la boca del cañón. (200 m/s)

$$I = \int_0^t \vec{F}.dt = \int_0^t (500 - 2.10^5 t)dt = \left[500t - 10^5.t^2\right]_0^t = 500\,t - 10^5\,t^2$$

$$I = \Delta P = m\,\Delta V = m\,V \qquad V = \frac{I}{m} = \frac{500.t - 10^5.t^2}{m}$$

$$V = \frac{500.10^{-3} - 10^5.10^{-6}}{2.10^{-3}} = 200 \text{ m/s}$$

102º.- Sobre un cuerpo de 5 Kg de masa actúa una fuerza que varía con el tiempo de acuerdo con la relación F = 5 + t (SI).

a) Determinar el impulso de la fuerza en los cuatro primeros segundos en que actúa.

b) ¿Durante cuánto tiempo ha de actuar la fuerza para que el impulso sea igual a 100 N.s?

c) ¿Qué velocidad adquiere el cuerpo al cabo de ese tiempo, sabiendo que su velocidad inicial era de 30 m/s?

Rª: 28 N.s ; 10 s ; 50 m/s

$$I = \int F.dt = \int (5+t)dt = 5t + \frac{t^2}{2}$$

a) $I = 5 . 4 + \frac{4^2}{2} = 20 + 8 = 28$ N.s

b) $5\,t + \frac{t^2}{2} = 100$ $\quad 10\,t + t^2 = 200$ $\quad t^2 + 10\,t - 200 = 0$

$$t = \frac{-10 \pm \sqrt{100+800}}{2} = \frac{-10 \pm 30}{2} = t_1 = 10 \text{ s}$$

c) $I = \Delta P$ $\quad I = m\,v_f - m\,v_o$ $\quad v_f = \frac{I + m.v_o}{m} = \frac{100N.s + 5kg.30m/s}{5} = \frac{100+150}{5}$ m/s = 50 m/s

103º.- Un fusil dispara proyectiles de 1 g de masa con una velocidad de 300 m/s. La fuerza que actúa en el interior del fusil sobre cada proyectil viene dada por la expresión:

$$F = 200 - 2/3 .10^5\, t \quad (SI)$$

Calcular el tiempo que tarda el proyectil en recorrer el cañón del fusil. Rª: 3.10^{-3} s

$$I = \int F.dt = \int (200 - \frac{2}{3}10^5 t)dt = 200t - \frac{10^5}{3}t^2$$

$I = \Delta P$ $\quad I = m\,v_f - m\,v_o$ $\quad 200\,t - \frac{10^5}{3}\,t^2 = 10^{-3}.300$

$-10^5\,t^2 + 600\,t - 900.10^{-3} = 0$

$$t = \frac{-600 \pm \sqrt{360000 - 360000}}{-2.10^5} = 3 . 10^{-3} \text{ s}$$

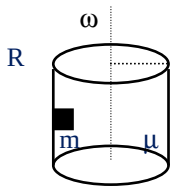
EJERCICIOS CON SOLUCIONES

1º.-Sobre un sólido en reposo de masa 5 Kg se aplica una fuerza de 100 N formando un ángulo de 30º con la horizontal, ver figura. Calcula la velocidad que habrá adquirido cuando se haya recorrido 5 m bajo la acción de esta fuerza. Supongamos un coeficiente de rozamiento dinámico $\mu = 0,2$. Si en ese momento determinado cesa la fuerza, ¿ qué recorrido realizará el móvil hasta pararse de nuevo?
Rª : v = 11,5 m/s, e = 33 m

2º.-Una partícula se mueve con la velocidad $v_o = 5$ m/s en la dirección y sentido (+x). Si durante 2 s se aplica a dicha partícula la fuerza **F** = 2 **i** - 3 **j** N, determinar la velocidad transcurrido dicho tiempo.
Rª : 19/3 **i** - 2 **j** m/s

3º.- Una partícula de masa m = 3 Kg se mueve con la velocidad $V_o = 5$ m/s en la dirección positiva del eje x. Si durante 2 s se aplica a dicha partícula la fuerza **F** = 2 **i** - 3 **j** N, determinar su velocidad transcurrido dicho tiempo.
Rª: **v** = 19/3 **i** - 2 **j** m/s

4º.- ¿ Cuál es la mínima velocidad angular que debe llevar el cilindro para que el objeto de masa m no caiga. ?
Rª: $\omega = (g/\mu R)^{1/2}$



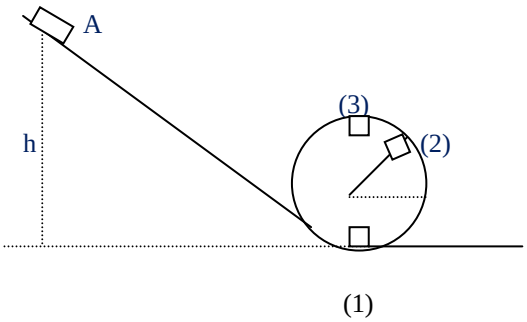
5º.- Sobre un cuerpo actúa una fuerza dada por la expresión $F = 6\,t^2 - 4\,t$, en la que t viene expresada en segundos y F en newtons. Si la masa del cuerpo es 2 Kg, calcular:
a) la aceleración para t = 2 s
b) la velocidad en el mismo instante si la velocidad inicial es cero
c) ¿En qué momento, salvo el inicial, es nula la velocidad ?
Rª: a) 8 m/s^2 , b) 4 m/s, c) 1 s.

6º.- Sobre una cinta transportadora que se mueve con velocidad constante de 0’5 m/s se van dejando caer cajas de ricas naranjas valencianas. Observamos que una de ellas desliza 10 cm hasta permanecer inmóvil sobre la cinta. ¿Cuál será el coeficiente de rozamiento? ¿Dependerá el espacio que se desliza de la cantidad de naranjas que tenga?
Rª: 0’13

7º.- Sea una masa puntual m que gira en un círculo horizontal de radio R, con velocidad constante, atada al extremo de una cuerda de longitud L (L>R). Hallar el tiempo que tarda en efectuar una revolución y la tensión de la cuerda.
$T = 2\pi\,(L \cos \varphi / g)^{1/2}$

8º.- Un objeto de masa m se deja caer desde el punto A para describir el "rizo de la muerte" no existiendo rozamiento a lo largo del rail.

Calclar v_1, v_2 y v_3 así como la fuerza que hace el raíl sobre el cuerpo cuando pasa por esos puntos.



¿ Cuál sería la mínima altura para que el objeto describiera el rizo completo?

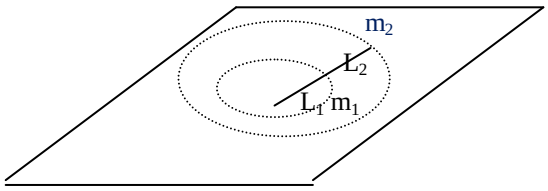
Rª: v_1 = _2gh $N_1 = mg\ (2h/R + 1)$

v_2 = _2g[h - R(1 + sen α)] $N_2 = mg\ (2[h - R(1+\text{sen}\ \alpha)]/R - \text{sen}\ \alpha)$

v_3 = _2g(h - 2R) $N_3 = mg\ (2(h - 2R)/R - 1)$

h mín. = 5/2 R

9º.- Una masa m_1 y otra m_2 unidas mediante cuerdas inextensibles giran con velocidad angular constante ω, como se indica en la figura, sobre una mesa pulida. Determinar la tensión de cada una de las cuerdas.



Rª: $T_1 = m_1\ \omega^2 L_1 + m_2\ \omega^2\ (L_1+L_2)$,

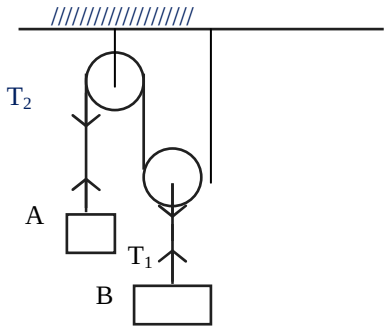
$T_2 = m_2\ \omega^2\ (L_1+L_2)$.

10º.- En la figura, las masas A y B son de 10 y 15 Kg respectivamente. Si dejamos el sistema en libertad, determinar:

a) El sentido del movimiento de cada masa

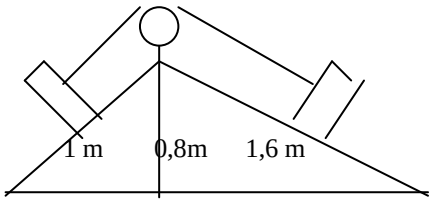
b) Las tensiones T_1 y T_2,

c) Las aceleraciones de cada masa.



Rª: $a_A = 1{,}8\ m/s^2$, $a_B = 0{,}9\ m/s^2$, $T_1 = 164$ N, $T_2 = 82$ N

11º.- Dos tableros de 1 m y 1,6 m están unidos entre sí como indica la figura. Sobre los planos se colocan bloques de igual peso, unidos por medio de una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento y de masa despreciable. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre los bloques y las superficies es 0,3, a) demostrar que el sistema está en equilibrio, b) si al sistema se le comunica una velocidad inicial de 1 m/s en una u otra dirección, calcular el espacio recorrido hasta alcanza r el reposo. Rª: 0,36 m , 0,067 m ← →



12º.- Un automóvil de masa 1400 Kg que viaja a 50 Km/h pasa por una depresión en la carretera que tiene un radio de curvatura de 15 m. ¿Cuál es la fuerza total a la que se ven sometidas las ruedas?
Rª: 8000 N cada rueda

13º.- En una máquina de Atwood la masa de 3 Kg se encuentra 1 m por encima de la de 2 Kg cuando el sistema se pone en libertad. Hallar la velocidad de cada masa cuando las dos se encuentran a la misma altura.
Rª: 1,4 m/s

14º.- Sobre una cinta transportadora que se mueve con velocidad constante de 0’5 m/s se van dejando caer cajas de ricas naranjas valencianas. Observamos que una de ellas desliza 10 cm hasta permanecer inmóvil sobre la cinta. ¿Cuál será el coeficiente de rozamiento? ¿Dependerá el espacio que se desliza de la cantidad de naranjas que tenga?
Rª: 0’13

15º.- Sobre una superficie horizontal sin rozamiento tenemos dos bloques, A y B, de 2 kg de masa cada uno, unidos por una cuerda. Si se tira del bloque A con una fuerza de 10 N, calcular la tensión de la cuerda de unión en cada uno de sus extremos:
a) si su masa es despreciable
b) si tiene una masa de 200 g
Rª: a) $T_A = T_B = 5$ N b) $T_A = 5'24$ N; $T_B = 4'76$ n

16º.- Tenemos sobre una mesa perfectamente pulimentada dos esferillas de masas respectivas 3 y 2 g, situadas ambas perpendicularmente al borde de la mesa, la primera en el mismo borde y la otra a 60 cm de él. Las dos esferillas están unidas por un hilo inextensible, de masa despreciable, de 1 m de longitud. Si se deja que la primera esfera caiga verticalmente, ¿al cabo de cuánto tiempo y con qué velocidad inicial se moverá la segunda?
Rª: 0,28 s; 1,68 m/s