

Página 29

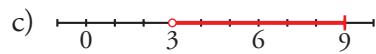
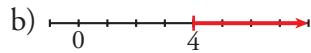
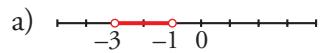
3. Representa los siguientes conjuntos:

a) $(-3, -1)$

b) $[4, +\infty)$

c) $(3, 9]$

d) $(-\infty, 0)$



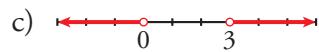
4. Representa los siguientes conjuntos:

a) $\{x / -2 \leq x < 5\}$

b) $[-2, 5) \cup (5, 7]$

c) $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

d) $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$



Página 30

1. Halla los siguientes valores absolutos:

a) $|-11|$

b) $|\pi|$

c) $|\sqrt{-5}|$

d) $|0|$

e) $|3 - \pi|$

f) $|3 - \sqrt{2}|$

g) $|1 - \sqrt{2}|$

h) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}|$

i) $|7 - \sqrt{50}|$

a) 11

b) π

c) $\sqrt{5}$

d) 0

e) $|3 - \pi| = \pi - 3$

f) $|3 - \sqrt{2}| = 3 - \sqrt{2}$

g) $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$

h) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

i) $|7 - \sqrt{50}| = \sqrt{50} - 7$

2. Averigua para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones:

a) $|x| = 5$

b) $|x| \leq 5$

c) $|x - 4| = 2$

d) $|x - 4| \leq 2$

e) $|x - 4| > 2$

f) $|x + 4| > 5$

a) 5 y -5

b) $-5 \leq x \leq 5$; $[-5, 5]$

c) 6 y 2

d) $2 \leq x \leq 6$; $[2, 6]$

e) $x < 2$ o $x > 6$; $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$

f) $x < -9$ o $x > 1$; $(-\infty, -9) \cup (1, +\infty)$

Página 31**1. Simplifica:**

a) $\sqrt[12]{x^9}$

b) $\sqrt[12]{x^8}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$

e) $\sqrt[9]{64}$

f) $\sqrt[8]{81}$

a) $\sqrt[12]{x^9} = \sqrt[4]{x^3}$

b) $\sqrt[12]{x^8} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}} = y^2$

d) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

e) $\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

f) $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$

2. ¿Cuál es mayor, $\sqrt[4]{31}$ o $\sqrt[3]{13}$?

Reducimos a índice común:

$$\sqrt[4]{31} = \sqrt[12]{29791}; \quad \sqrt[3]{13} = \sqrt[12]{28561}$$

Por tanto, es mayor $\sqrt[4]{31}$.**3. Reduce a índice común:**

a) $\sqrt[12]{a^5}$ y $\sqrt[18]{a^7}$

b) $\sqrt[3]{51}$ y $\sqrt[9]{132650}$

a) $\sqrt[12]{a^5} = \sqrt[36]{a^{15}}$; $\sqrt[18]{a^7} = \sqrt[36]{a^{14}}$

b) $\sqrt[3]{51} = \sqrt[9]{132651}$; $\sqrt[9]{132650}$

4. Simplifica:

a) $(\sqrt{\sqrt{k}})^8$

b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$

c) $\sqrt[3]{(\sqrt{x})^6}$

a) $(\sqrt[8]{k})^8 = k$

b) $\sqrt[15]{x^{10}} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[6]{x^6} = x$

Página 32**5. Reduce:**

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$

b) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{3}$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2}$

d) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{4}$

a) $\sqrt[15]{2^5} \cdot \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{2^8}$

b) $\sqrt[6]{3^4} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{3^5}$

c) $\sqrt[8]{2^4} \cdot \sqrt[8]{2^2} \cdot \sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2^7}$

d) $\sqrt[12]{8^3} \cdot \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{(2^3)^3 \cdot (2^2)^4} = \sqrt[12]{2^{17}} = 2 \sqrt[12]{2^5}$

6. Simplifica:

a) $\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}$

b) $\frac{\sqrt{a \cdot b}}{\sqrt[3]{a \cdot b}}$

c) $\frac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}$

d) $\frac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{a \cdot b^3 \cdot c^3}}$

a) $\sqrt{\frac{x^3}{x^5}} = \sqrt{\frac{1}{x^2}} = \sqrt{x^{-2}}$

b) $\sqrt[6]{\frac{a^3 b^3}{a^2 b^2}} = \sqrt[6]{a b}$

c) $\sqrt[6]{\frac{a^3}{a^4}} = \sqrt[6]{\frac{1}{a}} = \sqrt[6]{a^{-1}}$

d) $\sqrt[4]{\frac{a^3 b^5 c}{a^2 b^6 c^6}} = \sqrt[4]{\frac{a}{b c^5}} = \frac{1}{c} \sqrt[4]{\frac{a}{b c}}$

7. Reduce:

a) $\frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$

c) $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt{3}}$

a) $\sqrt{\frac{3^4}{3^3}} = \sqrt[6]{3}$

b) $\sqrt[6]{\frac{3^6}{3^2}} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2}$

c) $\sqrt[10]{\frac{2^8}{2^5}} = \sqrt[10]{2^3} = \sqrt[10]{8}$

d) $\sqrt[4]{\frac{3^6}{3^2}} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

8. Suma y simplifica:

a) $5\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$

b) $\sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{2}$

c) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8}$

d) $\sqrt{27} - \sqrt{50} + \sqrt{12} + \sqrt{8}$

e) $\sqrt{50a} - \sqrt{18a}$

a) $10\sqrt{x}$

b) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

c) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{2} - \sqrt{2^3} =$

$= 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3^3} - \sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{2^3} = 3\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2 \cdot 5^2 \cdot a} - \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot a} = 5\sqrt{2a} - 3\sqrt{2a} = 2\sqrt{2a}$

Página 33**9.** Racionaliza denominadores y simplifica cuando puedas:

a) $\frac{5}{\sqrt{7}}$

b) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

c) $\sqrt{\frac{7}{3}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{a^3}}$

e) $\frac{3}{\sqrt{50}}$

f) $\frac{4}{\sqrt{18}}$

g) $\frac{2}{\sqrt[3]{25}}$

h) $\frac{1}{\sqrt[3]{40}}$

i) $\frac{3}{\sqrt[3]{36}}$

j) $\frac{2}{\sqrt[3]{100}}$

a) $\frac{5}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{7}$

b) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

c) $\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$

d) $\frac{1}{\sqrt{a^3}} = \frac{1}{a\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a^2}$

e) $\frac{3}{\sqrt{50}} = \frac{3}{\sqrt{2 \cdot 5^2}} = \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$

f) $\frac{4}{\sqrt{18}} = \frac{4}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

g) $\frac{2}{\sqrt[3]{25}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{5}}{5}$

h) $\frac{1}{\sqrt[3]{40}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 5}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{10} = \frac{\sqrt[3]{25}}{10}$

i) $\frac{3}{\sqrt[3]{36}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{3\sqrt[3]{6}}{6} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}$

j) $\frac{2}{\sqrt[3]{100}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{2 \cdot 5}}{2 \cdot 5} = \frac{2\sqrt[3]{10}}{10} = \frac{\sqrt[3]{10}}{5}$

10. Racionaliza denominadores y simplifica cuando puedas:

a) $\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$

b) $\frac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

c) $\frac{a - 1}{\sqrt{a} - 1}$

d) $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

e) $\frac{1}{2\sqrt{3} - \sqrt{5}}$

f) $\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$

g) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} - 1} + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$

h) $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

a) $\frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{2} - 1$

b) $\frac{(x + y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} = \frac{(x + y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{x - y} = \frac{x\sqrt{x} - x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{x - y}$

c) $\frac{(a - 1)(\sqrt{a} + 1)}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)} = \frac{(a - 1)(\sqrt{a} + 1)}{(a - 1)} = \sqrt{a} + 1$

d) $\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} = \frac{x + y + 2\sqrt{xy}}{x - y}$

e) $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{(2\sqrt{3} - \sqrt{5})(2\sqrt{3} + \sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{12 - 5} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{7}$

f) $\frac{(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2}{18 - 12} = \frac{18 + 12 + 12\sqrt{6}}{6} = \frac{30 + 12\sqrt{6}}{6} = 5 + 2\sqrt{6}$

g) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2} + 1}{1} + \frac{\sqrt{2} - 1}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

h) $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} = \frac{2\sqrt{x}}{x - y}$

Página 36

1. Halla:

a) $\log_2 16$

b) $\log_2 0,25$

c) $\log_9 1$

d) $\log_{10} 0,1$

e) $\log_4 64$

f) $\log_7 49$

g) $\ln e^4$

h) $\ln e^{-1/4}$

i) $\log_5 0,04$

j) $\log_6 \left(\frac{1}{216} \right)$

- a) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$
- b) $\log_2 0,25 = \log_2 2^{-2} = -2$
- c) $\log_9 1 = 0$
- d) $\log_{10} 0,1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$
- e) $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$
- f) $\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$
- g) $\ln e^4 = 4$
- h) $\ln e^{-1/4} = -\frac{1}{4}$
- i) $\log_5 0,04 = \log_5 5^{-2} = -2$
- j) $\log_6 \left(\frac{1}{216} \right) = \log_6 6^{-3} = -3$

2. Halla la parte entera de:

- a) $\log_2 60$
- b) $\log_5 700$
- c) $\log_{10} 43\,000$
- d) $\log_{10} 0,084$
- e) $\log_9 60$
- f) $\ln e$

- a) $2^5 = 32 ; 2^6 = 64 ; 32 < 60 < 64$
 $5 < \log_2 60 < 6 \rightarrow \log_2 60 = 5, \dots$
- b) $5^4 = 625 ; 5^5 = 3125 ; 625 < 700 < 3125$
 $4 < \log_5 700 < 5 \rightarrow \log_5 700 = 4, \dots$
- c) $10^4 = 10\,000 ; 10^5 = 100\,000 ; 10\,000 < 43\,000 < 100\,000$
 $4 < \log_{10} 43\,000 < 5 \rightarrow \log_{10} 43\,000 = 4, \dots$
- d) $10^{-2} = 0,01 ; 10^{-1} = 0,1 ; 0,01 < 0,084 < 0,1$
 $-2 < \log_{10} 0,084 < -1 \rightarrow \log_{10} 0,084 = -1, \dots$
- e) $9^1 = 9 ; 9^2 = 81 ; 9 < 60 < 81$
 $1 < \log_9 60 < 2 \rightarrow \log_9 60 = 1, \dots$
- f) $\ln e = 1$

3. Aplica la propiedad ⑧ para obtener los siguientes logaritmos con la ayuda de la calculadora:

- a) $\log_2 1\,500$
- b) $\log_5 200$
- c) $\log_{100} 200$
- d) $\log_{100} 40$

En cada caso, comprueba el resultado utilizando la potenciación.

- a) $\frac{\log 1500}{\log 2} = 10,55 ; 2^{10,55} \approx 1500$
- b) $\frac{\log 200}{\log 5} = 3,29 ; 5^{3,29} \approx 200$
- c) $\frac{\log 200}{\log 100} = 1,15 ; 100^{1,15} \approx 200$
- d) $\frac{\log 40}{\log 100} = 0,80 ; 100^{0,80} \approx 40$

4. Sabiendo que $\log_5 A = 1,8$ y $\log_5 B = 2,4$, calcula:

a) $\log_5 \sqrt[3]{\frac{A^2}{25B}}$

b) $\log_5 \frac{5\sqrt{A^3}}{B^2}$

a) $\log_5 \sqrt[3]{\frac{A^2}{25B}} = \frac{1}{3} [2 \log_5 A - \log_5 25 - \log_5 B] = \frac{1}{3} [2 \cdot 1,8 - 2 - 2,4] = \frac{-0,8}{3} \approx -0,27$

b) $\log_5 \frac{5\sqrt{A^3}}{B^2} = \log_5 5 + \frac{3}{2} \log_5 A - 2 \log_5 B = 1 + \frac{3}{2} \cdot 1,8 - 2 \cdot 2,4 = 1 + 2,7 - 4,8 = -1,1$

5. Averigua la relación que hay entre x e y , sabiendo que se verifica:

$$\ln y = 2x - \ln 5$$

$$\ln y = 2x - \ln 5 \rightarrow \ln y = \ln e^{2x} - \ln 5$$

$$\ln y = \ln \frac{e^{2x}}{5} \rightarrow y = \frac{e^{2x}}{5}$$

Página 38

1. Di una cota del error absoluto y otra del error relativo en las siguientes mediciones:

a) La superficie de esta casa es de $96,4 \text{ m}^2$.

b) Por la gripe se han perdido 37 millones de horas de trabajo.

c) Juana gana 19 000 € al año.

a) $|\text{Error absoluto}| < 0,05 \text{ m}^2$

$$|\text{Error relativo}| < \frac{0,05}{96,4} < 0,00052 = 0,052\%$$

b) $|\text{Error absoluto}| < 0,5 \text{ millones de horas} = 500 000 \text{ horas}$

$$|\text{Error relativo}| < \frac{0,5}{37} < 0,014 = 1,4\%$$

c) — Si suponemos que los tres ceros finales se han utilizado para poder expresar la cantidad (es decir, que se trata de 19 mil €, redondeando a los “miles de euros”), entonces:

$$|\text{E.A.}| < 0,5 \text{ miles de €} = 500 \text{ €} \quad |\text{E.R.}| < \frac{0,5}{19} < 0,027 = 2,7\%$$

— Si suponemos que es 19 000 € exactamente:

$$|\text{E.A.}| < 0,5 \text{ €} \quad |\text{E.R.}| < \frac{0,5}{19 000} < 0,000027 = 0,0027\%$$

Página 39

2. Calcula en notación científica sin usar la calculadora:

a) $(800\,000 : 0,0002) \cdot 0,5 \cdot 10^{12}$

b) $0,486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7}$

$$\begin{aligned} \text{a) } (800\,000 : 0,0002) \cdot 0,5 \cdot 10^{12} &= ((8 \cdot 10^5) : (2 \cdot 10^{-4})) \cdot 5 \cdot 10^{11} = \\ &= (4 \cdot 10^9) \cdot 5 \cdot 10^{11} = 20 \cdot 10^{20} = 2 \cdot 10^{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 0,486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7} &= 48,6 \cdot 10^{-7} + 0,93 \cdot 10^{-7} - 6 \cdot 10^{-7} = \\ &= 43,53 \cdot 10^{-7} = 4,353 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

3. Opera con la calculadora:

a) $(3,87 \cdot 10^{15} \cdot 5,96 \cdot 10^{-9}) : (3,941 \cdot 10^{-6})$

b) $8,93 \cdot 10^{-10} + 7,64 \cdot 10^{-10} - 1,42 \cdot 10^{-9}$

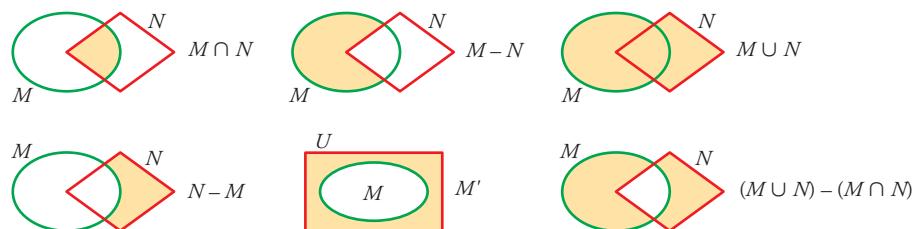
a) $(3,87 \cdot 10^{15} \cdot 5,96 \cdot 10^{-9}) : (3,941 \cdot 10^{-6}) \approx 5,85 \cdot 10^{12}$

b) $8,93 \cdot 10^{-10} + 7,64 \cdot 10^{-10} - 1,42 \cdot 10^{-9} = 2,37 \cdot 10^{-10}$

Página 41

LENGUAJE MATEMÁTICO

1. Da nombre al conjunto sombreado en cada caso:



2. Expresa simbólicamente estas relaciones:

- a) 13 es un número natural.
- b) -4 es un número entero.
- c) 0,43 es un número racional.

- d) π es un número real.
- e) Todos los enteros son racionales.
- f) El intervalo $[3, 4]$ está formado por números reales.
- a) $13 \in \mathbb{N}$
- b) $-4 \in \mathbb{Z}$
- c) $0,43 \in \mathbb{Q}$
- d) $\pi \in \mathbb{R}$
- e) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
- f) $[3, 4] \subset \mathbb{R}$

3. Designa simbólicamente estos conjuntos:

- a) Los números enteros mayores que -5 y menores que 7 (utiliza \mathbb{Z} y el intervalo abierto $(-5, 7)$).
- b) Los números irracionales (utiliza \mathbb{R} y \mathbb{Q}).
- c) Los números racionales mayores que 2 y menores o iguales que 3 .
- d) Los números que son múltiplos de 2 o de 3 (el conjunto de los múltiplos de p se designa \dot{p}).
- a) $\{x \in \mathbb{Z} / x \in (-5, 7)\}$
- b) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$
- c) $\{x \in \mathbb{Q} / 2 < x \leq 3\}$
- d) $\{x / x = \dot{2} \text{ o } x = \dot{3}\}$

4. Traduce:

- a) $\{x \in \mathbb{Z} / x \geq -4\}$
- b) $\{x \in \mathbb{N} / x > 5\}$
- c) $\{x \in \mathbb{N} / 1 < x \leq 9\}$
- d) $\{x \in \mathbb{Z} / -2 \leq x < 7\}$
- a) Números enteros mayores o iguales que -4 .
- b) Números naturales mayores que 5 .
- c) Números naturales mayores que 1 y menores o iguales que 9 .
- d) Números enteros mayores o iguales que -2 y menores que 7 .

5. ¿Cuáles son los números que forman el conjunto $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$?

Todos los irracionales comprendidos en el intervalo $(0, 1)$.

Página 45**EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS****PARA PRACTICAR****Números racionales e irracionales**

- 1** Expresa como fracción cada decimal y opera:

$$0,\overline{12} - 5,\overline{6} - 0,\overline{23} + 3,1$$

☞ Recuerda que $5,\overline{6} = \frac{56-5}{9}$; $0,\overline{23} = \frac{23-2}{90}$.

$$\frac{12}{99} - \frac{51}{9} - \frac{21}{90} + \frac{31}{10} = -\frac{442}{165} = -2,6\overline{78}$$

- 2** Demuestra que el producto $4,0\bar{9} \cdot 1,3\bar{9}$ es un decimal exacto.

☞ Comprueba, pasando a fracción, que los dos factores son decimales exactos.

$$4,0\bar{9} = \frac{409-40}{90} = \frac{369}{90} = 4,1 \quad 1,3\bar{9} = \frac{139-13}{90} = \frac{126}{90} = 1,4$$

$$4,0\bar{9} \cdot 1,3\bar{9} = 4,1 \cdot 1,4 = 5,74$$

- 3** Calcula: a) $\sqrt{1,\overline{7}}$ b) $\sqrt{\frac{1,\overline{3}}{3}}$

$$\text{a)} \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} = 1,\overline{3} \quad \text{b)} \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} = 0,\overline{6}$$

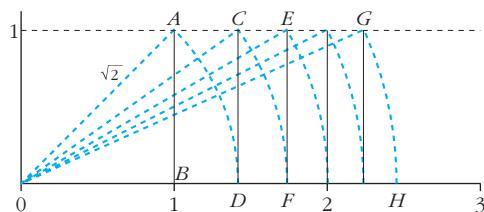
- 4** Indica cuál, de cada par de números, es mayor:

a) $\frac{140}{99}$ y $\sqrt{2}$ b) $0,5\overline{26}$ y $0,\overline{526}$

c) $4,\overline{89}$ y $2\sqrt{6}$ d) $-2,098$ y $-2,1$

a) $\sqrt{2}$ b) $0,5\overline{26}$ c) $4,\overline{89}$ d) $-2,098$

- 5** Observa cómo hemos representado algunos números irracionales:

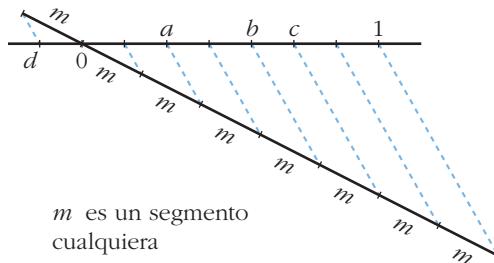


En el triángulo OAB , $\overline{OB} = 1$, $\overline{AB} = 1$ y $\overline{OA} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Por tanto, el punto D representa a $\sqrt{2}$. ¿Qué números representan los puntos F y H ? Justifica tu respuesta.

F representa $\sqrt{3}$, pues $\overline{OF} = \overline{OC} = \sqrt{\overline{OD}^2 + \overline{DC}^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

H representa $\sqrt{6}$, pues $\overline{OH} = \overline{OG} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

6 ¿Cuáles son los números racionales a, b, c, d representados en este gráfico?



$$a = \frac{2}{7} \quad b = \frac{4}{7} \quad c = \frac{5}{7} \quad d = -\frac{1}{7}$$

Potencias

7 Halla sin calculadora: $\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right)^{-2} \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{9}\right)^{-1} + 4$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)^{-1} + 4 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) + 4 = -4 + 4 = 0$$

8 Simplifica, utilizando las propiedades de las potencias:

a) $\frac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{9^3 \cdot 4^3 \cdot 5}$

b) $\frac{3^4 \cdot 16 \cdot 9^{-1}}{5^{-1} \cdot 3^5}$

c) $\frac{15^2 \cdot 8^{-1}}{6^3 \cdot 10^2}$

d) $\frac{a^{-3} b^{-4} c^7}{a^{-5} b^2 c^{-1}}$

☞ Mira el problema resuelto número 2 c).

a) $\frac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{3^6 \cdot 2^6 \cdot 5} = \frac{5}{2}$

b) $\frac{3^4 \cdot 2^4 \cdot 3^{-2}}{5^{-1} \cdot 3^5} = \frac{2^4 \cdot 5}{3^3} = \frac{80}{27}$

c) $\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^{-3}}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2} = \frac{1}{2^8 \cdot 3} = \frac{1}{768}$

d) $\frac{c^7 a^5 c}{a^3 b^4 b^2} = \frac{a^2 c^8}{b^6}$

9 Expresa los siguientes radicales mediante potencias de exponente fraccionario y simplifica:

a) $\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt{a}$

b) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$

c) $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

a) $a^{2/5} \cdot a^{1/2} = a^{9/10} = \sqrt[10]{a^9}$

b) $\frac{x^{2/3}}{x^{1/2}} = x^{1/6} = \sqrt[6]{x}$

c) $a^{-3/4} = \sqrt[4]{a^{-3}}$

10 Resuelve, sin utilizar la calculadora:

a) $\sqrt[5]{32}$

b) $\sqrt[3]{343}$

c) $\sqrt[4]{625}$

d) $\sqrt{0,25}$

e) $\sqrt[3]{8^4}$

f) $\sqrt[3]{0,001}$

a) $\sqrt[5]{2^5} = 2$

b) $\sqrt[3]{7^3} = 7$

c) $\sqrt[4]{5^4} = 5$

d) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0,5$

e) $\sqrt[3]{2^{12}} = 2^4 = 16$

f) $\sqrt[3]{0,1^3} = 0,1$

11 Expresa como una potencia de base 2:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $(-32)^{1/5}$

c) $(\sqrt[8]{2})^4$

a) $2^{-1/2}$

b) $(-2^5)^{1/5} = -2$

c) $2^{4/8} = 2^{1/2}$

12 Calcula utilizando potencias de base 2, 3 y 5:

a) $4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{8}$

c) $\frac{(-5)^3 (-8)^3 (-9)^2}{15^2 \cdot 20^4}$

d) $\frac{(-30)^{-1} \cdot 15^2}{10^3}$

a) $2^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(-3)^3}{2^3} = \frac{-3^2}{2} = \frac{-9}{2}$

b) $\frac{1}{2^4} \cdot \frac{3^2}{2} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{3^2}{2^8} = \frac{9}{256}$

c) $\frac{(-5)^3 \cdot (-2^3)^3 \cdot (-3^2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot (2^2 \cdot 5)^4} = \frac{5^3 \cdot 2^9 \cdot 3^4}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^8 \cdot 5^4} = \frac{2 \cdot 3^2}{5^3} = \frac{18}{125}$

d) $\frac{3^2 \cdot 5^2}{-2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 5^3} = -\frac{3}{5^2 \cdot 2^4} = \frac{-3}{400}$

13 Expresa en forma de potencia, efectúa las operaciones y simplifica:

a) $\frac{\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{-1}}{a\sqrt{a}}$

b) $16^{1/4} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{4}}$

a) $\frac{a^{3/4} \cdot a^{-1}}{a \cdot a^{1/2}} = a^{-7/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^7}}$

b) $(2^4)^{1/4} \cdot (2^2)^{-1/3} \cdot (2^2)^{-1/6} = 2 \cdot 2^{-2/3} \cdot 2^{-1/3} = 2^0 = 1$

14 Justifica las igualdades que son verdaderas. Escribe el resultado correcto en las falsas:

a) $\frac{a^2 \cdot b^{-2}}{a^{-2} \cdot b^2} = 1$

b) $(3^{-2})^{-3} \left(\frac{1}{27}\right)^2 = 1$

c) $\frac{3^{-2} - 5^{-2}}{3^{-1} - 5^{-1}} = \frac{8}{15}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - (-3)^{-2} = \frac{80}{9}$

a) Falsa. $\frac{a^2 \cdot b^{-2}}{a^{-2} \cdot b^2} = \frac{a^4}{b^4}$

b) Verdadera. $(3^{-2})^{-3} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^2 = 3^6 \cdot \left(\frac{1}{3^3}\right)^2 = 3^6 \cdot \frac{1}{3^6} = \frac{3^6}{3^6} = 1$

c) Verdadera. $\frac{3^{-2} - 5^{-2}}{3^{-1} - 5^{-1}} = \frac{(1/3^2) - (1/5^2)}{1/3 - 1/5} = \frac{(1/3 - 1/5)(1/3 + 1/5)}{(1/3 - 1/5)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$

d) Verdadera. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - (-3)^{-2} = 3^2 - \frac{1}{(-3)^2} = 3^2 - \frac{1}{3^2} = 9 - \frac{1}{9} = \frac{81 - 1}{9} = \frac{80}{9}$

15 Demuestra, utilizando potencias, que:

a) $(0,125)^{1/3} = 2^{-1}$

b) $(0,25)^{-1/2} = 2$

a) $(0,125)^{1/3} = \left(\frac{125}{1000}\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{8}\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{2^3}\right)^{1/3} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$

b) $(0,25)^{-1/2} = \left(\frac{25}{100}\right)^{-1/2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1/2} = \left(\frac{1}{2^2}\right)^{-1/2} = (2^2)^{1/2} = 2$

Página 46**Radicales****16** Introduce los factores dentro de cada raíz:

a) $2\sqrt[3]{3}$

b) $4\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

c) $\frac{2}{x}\sqrt{\frac{3x}{8}}$

d) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{25}{9}}$

e) $2\sqrt[4]{4}$

f) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{15}$

a) $\sqrt[3]{3 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{24}$

b) $\sqrt[3]{\frac{4^3}{4}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{\frac{2^2 \cdot 3x}{x^2 \cdot 2^3}} = \sqrt{\frac{3}{2x}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{3^3 \cdot 5^2}{5^3 \cdot 3^2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$

e) $\sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$

f) $\sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5}{5^3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{5^2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{25}}$

17 Saca de la raíz el factor que puedas:

a) $\sqrt[3]{16}$

b) $4\sqrt{8}$

c) $\sqrt{1\,000}$

d) $\sqrt[3]{8a^5}$

e) $\sqrt{\frac{125a^2}{16b}}$

f) $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}}$

g) $\sqrt{\frac{16}{a^3}}$

h) $\sqrt{4a^2 + 4}$

i) $\sqrt{\frac{a}{9} + \frac{a}{16}}$

a) $\sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

b) $4\sqrt{2^3} = 4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

c) $\sqrt{2^3 \cdot 5^3} = 10\sqrt{10}$

d) $\sqrt[3]{2^3 \cdot a^5} = 2a\sqrt[3]{a^2}$

e) $\sqrt{\frac{5^3 \cdot a^2}{2^4 \cdot b}} = \frac{5a}{4}\sqrt{\frac{5}{b}}$

f) $\sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{13}$

g) $\frac{4}{a}\sqrt{\frac{1}{a}}$

h) $\sqrt{4(a^2 + 1)} = 2\sqrt{a^2 + 1}$

i) $\sqrt{\frac{25a}{16 \cdot 9}} = \frac{5\sqrt{a}}{12}$

18 Simplifica:

a) $\sqrt[6]{0,027}$

b) $\sqrt[8]{0,0016}$

c) $\sqrt[4]{1 + \frac{9}{16}}$

a) $\sqrt[6]{\frac{27}{1\,000}} = \sqrt[6]{\frac{3^3}{10^3}} = \sqrt[6]{\left(\frac{3}{10}\right)^3} = \left(\frac{3}{10}\right)^{3/6} = \left(\frac{3}{10}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{10}}$

b) $\sqrt[8]{\frac{16}{10\,000}} = \sqrt[8]{\frac{2^4}{10^4}} = \sqrt[8]{\left(\frac{2}{10}\right)^4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{4/8} = \left(\frac{1}{5}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{5}}$

c) $\sqrt[4]{\frac{25}{16}} = \sqrt[4]{\frac{5^2}{4^2}} = \left(\frac{5}{4}\right)^{2/4} = \left(\frac{5}{4}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

19 Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{24}$

b) $\sqrt[6]{27}$

c) $\sqrt[3]{-108}$

d) $\sqrt[12]{64y^3}$

e) $\sqrt[4]{\frac{81}{64}}$

f) $\sqrt[8]{625} : \sqrt[4]{25}$

a) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2 \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[6]{3^3} = 3^{3/6} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$

c) $-\sqrt[3]{3^3 \cdot 2^2} = -3 \sqrt[3]{2^2}$

d) $\sqrt[12]{2^6 \cdot y^3} = \sqrt[4]{2^2 \cdot y} = \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{y} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{y}$

e) $\sqrt[4]{\frac{3^4}{2^6}} = \frac{3}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

f) $\sqrt[8]{5^4} : \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5} : \sqrt{5} = 1$

20 Reduce a índice común y ordena de menor a mayor:

a) $\sqrt[4]{4}, \sqrt[3]{3}, \sqrt{2}$

b) $\sqrt{6}, \sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt[4]{6}, \sqrt[5]{10}$

d) $\sqrt[4]{72}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[6]{100}$

a) $\sqrt[12]{64}, \sqrt[12]{81}, \sqrt[12]{64}; \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[6]{216}, \sqrt[6]{16}; \sqrt[3]{4} < \sqrt{6}$

c) $\sqrt[20]{7776}, \sqrt[20]{10000}; \sqrt[4]{6} < \sqrt[5]{10}$

d) $\sqrt[12]{373248}, \sqrt[12]{6561}, \sqrt[12]{10000}; \sqrt[3]{9} < \sqrt[6]{100} < \sqrt[4]{72}$

21 Realiza la operación y simplifica, si es posible:

a) $4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{27}{8}}$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{8}}$

d) $(\sqrt[3]{12})^2$

e) $(\sqrt[6]{32})^3$

f) $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3}$

a) $20\sqrt{27 \cdot 6} = 20\sqrt{3^3 \cdot 2 \cdot 3} = 20\sqrt{2 \cdot 3^4} = 180\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{\frac{4 \cdot 27}{3 \cdot 8}} = 2\sqrt{\frac{9}{2}} = 6\sqrt{\frac{1}{2}}$

c) $\sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

d) $(\sqrt[3]{2^2 \cdot 3})^2 = \sqrt[3]{2^4 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{2 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{18}$

e) $(\sqrt[6]{2^5})^3 = \sqrt[6]{2^{15}} = \sqrt{2^5} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

f) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} : \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{3} = 2$

22 Efectúa y simplifica, si es posible:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt{a}$

c) $\left(\frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$

d) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}} : \sqrt[3]{4}$

☞ En b) y c) puedes expresar los radicales como potencias de bases a y 2, respectivamente.

a) $\sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{108}$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a}$

c) $\left(\sqrt[6]{\frac{2^5}{2^9}}\right)^3 = \left(\sqrt[6]{\frac{1}{2^4}}\right)^3 = \sqrt[6]{\frac{1}{2^{12}}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{2^2 \cdot 3}} : \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 3} : \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3}$

23 Expresa con una única raíz:

a) $\sqrt[4]{3\sqrt{4}}$

b) $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$

c) $(\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^4}) : \sqrt{a}$

a) $\sqrt[12]{4} = \sqrt[6]{2}$

b) $\sqrt[12]{2^4 \cdot 2^3} = \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{128}$

c) $\sqrt[20]{\frac{a^{15} \cdot a^{16}}{a^{10}}} = \sqrt[20]{a^{21}} = a \sqrt[20]{a}$

24 Racionaliza los denominadores y simplifica:

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$

b) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

c) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{3}{3+\sqrt{3}}$

e) $\frac{\sqrt{72} + 3\sqrt{32} - \sqrt{8}}{\sqrt{8}}$

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

b) $\frac{2\sqrt[3]{2^2}}{2} = \sqrt[3]{4}$

c) $\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{3(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{9-3\sqrt{3}}{6} = \frac{3(3-\sqrt{3})}{2 \cdot 3} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{2^3} \cdot 3^2 + 3\sqrt{2^5} - \sqrt{2^3}}{\sqrt{2^3}} = \frac{3\sqrt{8} + 6\sqrt{8} - \sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \frac{8\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = 8$

25 Calcula y simplifica:

a) $5\sqrt{125} + 6\sqrt{45} - 7\sqrt{20} + \frac{3}{2}\sqrt{80}$

b) $\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{54} - \frac{21}{5}\sqrt[3]{250}$

c) $\sqrt{125} + \sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24}$

d) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - 1)$

a) $25\sqrt{5} + 18\sqrt{5} - 14\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 35\sqrt{5}$

b) $2\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} - 21\sqrt[3]{2} = -20\sqrt[3]{2}$

c) $5\sqrt{5} + 3\sqrt{6} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{6} = 2\sqrt{5} + \sqrt{6}$

d) $\sqrt{12} - \sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

26 Simplifica al máximo las siguientes expresiones:

a) $3\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{250} + 5\sqrt[3]{54} - 4\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{18}{125}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{45}}$

c) $7\sqrt[3]{81a} - 2\sqrt[3]{3a^4} + \frac{\sqrt[3]{3a}}{5}$

a) $3\sqrt[3]{2^4} - 2\sqrt[3]{2 \cdot 5^3} + 5\sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - 4\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{2} + 15\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} = 7\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{2 \cdot 3^2}{5^3}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2^3}{3^2 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{2}{5}} - \frac{12}{5}\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{-53}{45}\sqrt{\frac{2}{5}}$

c) $7\sqrt[3]{3^4 \cdot a} - 2\sqrt[3]{3a^4} + \frac{\sqrt[3]{3a}}{5} = 21\sqrt[3]{3a} - 2a\sqrt[3]{3a} + \frac{\sqrt[3]{3a}}{5} = \left(\frac{106}{5} - 2a\right)\sqrt[3]{3a}$

27 Efectúa y simplifica:

a) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

b) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})2\sqrt{2}$

c) $(\sqrt{5} - \sqrt{6})(\sqrt{5} + \sqrt{6})$

d) $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})^2$

e) $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)\sqrt{3}$

a) $(\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2}) = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{12} + 2\sqrt{10} = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{10}$

c) $5 - 6 = -1$

d) $20 + 18 - 12\sqrt{10} = 38 - 12\sqrt{10}$

e) $(2 - 1)\sqrt{3} = \sqrt{3}$

28 Racionaliza y simplifica:

a) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$

b) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$

c) $\frac{1}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

d) $\frac{3}{\sqrt{5}-2}$

e) $\frac{11}{2\sqrt{5}+3}$

f) $\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot 3^2} &= \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}-2}{3 \cdot 2} = \\ &= \frac{2(\sqrt{6}-1)}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}-1}{3} \end{aligned}$$

b) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2^2 \cdot 3}} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6+\sqrt{6}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2(3-5)} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{-4} = -\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$

d) $\frac{3(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{3(\sqrt{5}+2)}{5-4} = 3(\sqrt{5}+2) = 3\sqrt{5}+6$

e) $\frac{11(2\sqrt{5}-3)}{2(\sqrt{5}+3)(2\sqrt{5}-3)} = \frac{11(2\sqrt{5}-3)}{20-9} = \frac{11(2\sqrt{5}-3)}{11} = 2\sqrt{5}-3$

$$\begin{aligned} \text{f) } \frac{(3\sqrt{6}+2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2)}{(3\sqrt{3}+2)(3\sqrt{3}-2)} &= \frac{9\sqrt{18}-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}-4\sqrt{2}}{27-4} = \frac{9\sqrt{2 \cdot 3^2}-4\sqrt{2}}{23} = \\ &= \frac{27\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{23} = \frac{23\sqrt{2}}{23} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

29 Efectúa y simplifica:

a) $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

b) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

a) $\frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2})-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+5\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2-(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} &= \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5} = \\ &= \frac{2\sqrt{7}(-2\sqrt{5})}{2} = -2\sqrt{35} \end{aligned}$$

Página 47

Notación científica y errores

- 30** Efectúa y da el resultado en notación científica con tres cifras significativas. Determina también, en cada caso, una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.

a) $\frac{(3,12 \cdot 10^{-5} + 7,03 \cdot 10^{-4})}{4,32 \cdot 10^3} 8,3 \cdot 10^8$

b) $\frac{(12,5 \cdot 10^7 - 8 \cdot 10^9)(3,5 \cdot 10^{-5} + 185)}{9,2 \cdot 10^6}$

c) $\frac{5,431 \cdot 10^3 - 6,51 \cdot 10^4 + 385 \cdot 10^2}{8,2 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4}}$

a) $1,41 \cdot 10^2 \quad |\text{Error absoluto}| < 0,005 \cdot 10^2 = 0,5$

$$|\text{Error relativo}| < \frac{0,5}{141} < 0,00355$$

b) $-1,58 \cdot 10^5 \quad |\text{Error absoluto}| < 0,005 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^2$

$$|\text{Error relativo}| < \frac{5 \cdot 10^2}{1,58 \cdot 10^5} < 3,16 \cdot 10^{-3}$$

c) $-2,65 \cdot 10^6 \quad |\text{Error absoluto}| < 0,005 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^3$

$$|\text{Error relativo}| < \frac{5 \cdot 10^3}{2,65 \cdot 10^6} < 1,89 \cdot 10^{-3}$$

- 31** Ordena de mayor a menor los números de cada apartado. Para ello, pasa a notación científica los que no lo estén:

a) $3,27 \cdot 10^{13}; \quad 85,7 \cdot 10^{12}; \quad 453 \cdot 10^{11}$

b) $1,19 \cdot 10^{-9}; \quad 0,05 \cdot 10^{-7}; \quad 2\,000 \cdot 10^{-12}$

a) $8,57 \cdot 10^{13} > 4,53 \cdot 10^{13} > 3,27 \cdot 10^{13}$

b) $5 \cdot 10^{-9} > 2 \cdot 10^{-9} > 1,19 \cdot 10^{-9}$

- 32** Efectúa: $\frac{2 \cdot 10^{-7} - 3 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^6 + 10^5}$

$-7,268 \cdot 10^{-12}$

- 33** Expresa en notación científica y calcula: $\frac{60\,000^3 \cdot 0,00002^4}{100^2 \cdot 72\,000\,000 \cdot 0,0002^5}$

$$\frac{(6 \cdot 10^4)^3 \cdot (2 \cdot 10^{-5})^4}{10^4 \cdot 7,2 \cdot 10^7 \cdot (2 \cdot 10^{-4})^5} = 150$$

34 Considera los números:

$$A = 3,2 \cdot 10^7; B = 5,28 \cdot 10^4 \text{ y } C = 2,01 \cdot 10^5$$

Calcula $\frac{B+C}{A}$. Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.

$$\frac{B+C}{A} = 7,93 \cdot 10^{-3}$$

$$|\text{E.A.}| < 0,005 \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^{-6}$$

$$|\text{E.R.}| < 6,31 \cdot 10^{-4}$$

35 Si $A = 3,24 \cdot 10^6$; $B = 5,1 \cdot 10^{-5}$; $C = 3,8 \cdot 10^{11}$ y $D = 6,2 \cdot 10^{-6}$, calcula $\left(\frac{A}{B} + C\right) \cdot D$. Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.

$$\left(\frac{A}{B} + C\right) \cdot D = 2,75 \cdot 10^6$$

$$|\text{E.A.}| 0,005 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^3$$

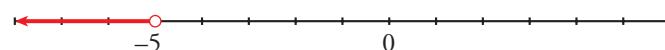
$$|\text{E.R.}| < 1,82 \cdot 10^{-3}$$

Intervalos y valor absoluto

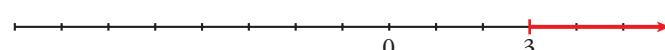
36 Expresa como desigualdad y como intervalo, y represéntalos:

- a) x es menor que -5 .
- b) 3 es menor o igual que x .
- c) x está comprendido entre -5 y 1 .
- d) x está entre -2 y 0 , ambos incluidos.

a) $x < -5$; $(-\infty, -5)$



b) $3 \leq x$; $[3, +\infty)$



c) $-5 < x < 1$; $(-5, 1)$



d) $-2 \leq x \leq 0$; $[-2, 0]$



37 Representa gráficamente y expresa como intervalos estas desigualdades:

a) $-3 \leq x \leq 2$

b) $5 < x$

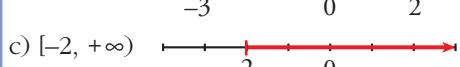
c) $x \geq -2$

d) $-2 \leq x < 3/2$

e) $4 < x < 4,1$

f) $-3 \leq x$

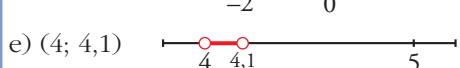
a) $[-3, 2]$



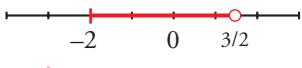
b) $(5, +\infty)$



c) $[-2, +\infty)$



d) $\left[-2, \frac{3}{2}\right)$



e) $(4; 4,1)$



f) $[-3, +\infty)$



38 Escribe la desigualdad que verifica todo número x que pertenece a estos intervalos:

a) $[-2, 7]$

b) $[13, +\infty)$

c) $(-\infty, 0)$

d) $(-3, 0]$

e) $[3/2, 6)$

f) $(0, +\infty)$

a) $-2 \leq x \leq 7$

b) $x \geq 13$

c) $x < 0$

d) $-3 < x \leq 0$

e) $\frac{3}{2} \leq x < 6$

f) $0 < x < +\infty$

39 Expresa como intervalo la parte común de cada pareja de intervalos ($A \cap B$) e ($I \cap J$):

a) $A = [-3, 2] \quad B = [0, 5]$

b) $I = [2, +\infty) \quad J = (0, 10)$

a) $[0, 2]$

b) $[2, 10)$

40 Escribe en forma de intervalos los números que verifican estas desigualdades:

a) $x < 3 \text{ o } x \geq 5$

b) $x > 0 \text{ y } x < 4$

c) $x \leq -1 \text{ o } x > 1$

d) $x < 3 \text{ y } x \geq -2$

Represéntalos gráficamente, y si son dos intervalos separados, como en a), escribe: $(-\infty, 3) \cup [5, +\infty)$

a) $(-\infty, 3) \cup [5, +\infty)$

b) $(0, 4)$

c) $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

d) $[-2, 3)$

41 Expresa, en forma de intervalo, los números que cumplen cada una de estas expresiones:

a) $|x| < 7$

b) $|x| \geq 5$

c) $|2x| < 8$

d) $|x - 1| \leq 6$

e) $|x + 2| > 9$

f) $|x - 5| \geq 1$

a) $(-7, 7)$

b) $[-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$

c) $(-4, 4)$

d) $[-5, 7]$

e) $(-11, 7)$

f) $(-\infty, 4] \cup [6, +\infty)$

42 Averigua qué valores de x cumplen:

a) $|x - 2| = 5$

b) $|x - 4| \leq 7$

c) $|x + 3| \geq 6$

a) 7 y -3

b) $-3 \leq x \leq 11$; $[-3, 11]$

c) $x \leq -9$ y $x \geq 3$; $(-\infty, -9] \cup [3, +\infty)$

43 Escribe, mediante intervalos, los valores que puede tener x para que se pueda calcular la raíz en cada caso:

a) $\sqrt{x - 4}$

b) $\sqrt{2x + 1}$

c) $\sqrt{-x}$

d) $\sqrt{3 - 2x}$

e) $\sqrt{-x - 1}$

f) $\sqrt{1 + \frac{x}{2}}$

a) $x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$; $[4, +\infty)$

b) $2x + 1 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$; $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

c) $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$; $(-\infty, 0]$

d) $3 - 2x \geq 0 \Rightarrow 3 \geq 2x \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}$; $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

e) $-x - 1 \geq 0 \Rightarrow -1 \geq x$; $(-\infty, -1]$

f) $1 + \frac{x}{2} \geq 0 \Rightarrow 2 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$; $[-2, +\infty)$

44 Halla la distancia entre los siguientes pares de números:

a) 7 y 3

b) 5 y 11

c) -3 y -9

d) -3 y 4

a) $|7 - 3| = 4$

b) $|11 - 5| = 6$

c) $|-9 - (-3)| = |-9 + 3| = |-6| = 6$

d) $|4 - (-3)| = 7$

45 Expresa como un único intervalo:

a) $(1, 6] \cup [2, 5)$

b) $[-1, 3) \cup (0, 3]$

c) $(1, 6] \cap [2, 7)$

d) $[-1, 3) \cap (0, 4)$

a) $(1, 6] \cup [2, 5) = (1, 6]$

b) $[-1, 3) \cup (0, 3] = [-1, 3]$

c) $(1, 6] \cap [2, 7) = [2, 6]$

d) $[-1, 3) \cap (0, 4) = (0, 3)$

Página 48

46 Escribe en forma de intervalo los siguientes entornos:

- a) Centro -1 y radio 2
- b) Centro 2,5 y radio 2,01
- c) Centro 2 y radio 1/3

a) $(-1 - 2, -1 + 2) = (-3, 1)$
b) $(2,5 - 2,01; 2,5 + 2,01) = (0,49; 4,51)$
c) $\left(2 - \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$

47 Describe como entornos los siguientes intervalos:

- a) (-1, 2)
- b) (1,3; 2,9)
- c) (-2,2; 0,2)
- d) (-4; -2,8)

a) $C = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2}$; $R = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Entorno de centro $\frac{1}{2}$ y radio $\frac{3}{2}$.

b) $C = \frac{1,3 + 2,9}{2} = 2,1$; $R = 2,9 - 2,1 = 0,8$

Entorno de centro 2,1 y radio 0,8

c) $C = \frac{-2,2 + 0,2}{2} = -1$; $R = 0,2 - (-1) = 1,2$

Entorno de centro -1 y radio 1,2.

d) $C = \frac{-4 + (-2,8)}{2} = -3,4$; $R = -2,8 - (-3,4) = 0,6$

Entorno de centro -3,4 y radio 0,6.

48 Comprueba si es verdadera o falsa cada una de las siguientes expresiones:

- a) $|a| < b$ equivale a $-b < a < b$
- b) $|-a| = -|a|$
- c) $|a + b| = |a| + |b|$
- d) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

a) Verdadera (siempre que $b > 0$).

b) Falsa; pues $|-a| \geq 0$ y $-|a| \leq 0$. (Solo sería cierta para $a = 0$).

c) Falsa. Solo es cierta cuando a y b tienen el mismo signo.

En general, $|a + b| \leq |a| + |b|$.

d) Verdadera.

Logaritmos

49 Calcula:

a) $\log_2 1\,024$

b) $\log 0,001$

c) $\log_2 \frac{1}{64}$

d) $\log_{\sqrt{3}} 3$

e) $\log_3 \sqrt{3}$

f) $\log_2 \sqrt{8}$

g) $\log_{1/2} \frac{2}{\sqrt{2}}$

h) $\log_{\pi} 1$

a) $\log_2 2^{10} = 10$

b) $\log 10^{-3} = -3$

c) $\log_2 2^{-6} = -6$

d) $\log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^2 = 2$

e) $\log_3 3^{1/2} = \frac{1}{2}$

f) $\log_2 2^{3/2} = \frac{3}{2}$

g) $\log_{1/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2}$

h) 0

50 Calcula, utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$

b) $\log_2 \frac{1}{32} + \log_3 \frac{1}{27} - \log_2 1$

a) $6 - 2 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

b) $-5 - 3 - 0 = -8$

51 Calcula la base de estos logaritmos:

a) $\log_x 125 = 3$

b) $\log_x \frac{1}{9} = -2$

a) $x^3 = 125; x = 5$

b) $x^{-2} = \frac{1}{9}; x = 3$

52 Calcula el valor de x en estas igualdades:

a) $\log 3^x = 2$

b) $\log x^2 = -2$

c) $7^x = 115$

d) $5^{-x} = 3$

a) $x = \frac{2}{\log 3} = 4,19$

b) $2 \log x = -2; x = \frac{1}{10}$

c) $x = \frac{\log 115}{\log 7} = 2,438$

d) $x = -\frac{\log 3}{\log 5} = -0,683$

53 Halla con la calculadora y comprueba el resultado con la potenciación.

a) $\log \sqrt{148}$

b) $\ln(2,3 \cdot 10^{11})$

c) $\ln(7,2 \cdot 10^{-5})$

d) $\log_3 42,9$

e) $\log_5 1,95$

f) $\log_2 0,034$

a) 1,085

b) $\ln(2,3 \cdot 10^{11}) \approx 26,16 \rightarrow e^{26,16} \approx 2,3 \cdot 10^{11}$

c) $\ln(7,2 \cdot 10^{-5}) \approx -9,54 \rightarrow e^{-9,54} \approx 7,2 \cdot 10^{-5}$

d) $3,42 \rightarrow 3^{3,42} \approx 42,9$

e) $0,41 \rightarrow 5^{0,41} \approx 1,95$

f) $-4,88 \rightarrow 2^{-4,88} \approx 0,034$

54 Calcula la base de cada caso:

a) $\log_x 1/4 = 2$ b) $\log_x 2 = 1/2$ c) $\log_x 0,04 = -2$ d) $\log_x 4 = -1/2$

☞ Aplica la definición de logaritmo y las propiedades de las potencias para despejar x .

En c), $x^{-2} = 0,04 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{4}{100}.$

a) $x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

b) $x^{1/2} = 2 \rightarrow x = 4$

c) $x^{-2} = 0,04 \rightarrow x = 5$

d) $x^{-1/2} = 4 \rightarrow x = \frac{1}{16}$

55 Halla el valor de x en estas expresiones aplicando las propiedades de los logaritmos:

a) $\ln x = \ln 17 + \ln 13$

b) $\log x = \log 36 - \log 9$

c) $\ln x = 3 \ln 5$

d) $\log x = \log 12 + \log 25 - 2 \log 6$

e) $\ln x = 4 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 25$

☞ a) Por logaritmo de un producto: $\ln x = \ln(17 \cdot 13)$

a) $\ln x = \ln(17 \cdot 13) \Rightarrow x = 17 \cdot 13 = 221$

b) $\log x = \log \frac{36}{9} \Rightarrow x = \frac{36}{9} = 4$

c) $\ln x = \ln 5^3 \Rightarrow x = 5^3 = 125$

d) $\log x = \log \frac{12 \cdot 25}{6^2} \Rightarrow x = \frac{25}{3}$

e) $\ln x = \ln 2^4 - \ln \sqrt{25}$

$\ln x = \ln 16 - \ln 5$

$\ln x = \ln \frac{16}{5} \Rightarrow x = \frac{16}{5}$

56 Sabiendo que $\log 3 = 0,477$, calcula el logaritmo decimal de 30; 300; 3 000; 0,3; 0,03; 0,003.

$$\log 30 = \log(3 \cdot 10) = \log 3 + \log 10 = 0,477 + 1 = 1,477$$

$$\log 300 = \log(3 \cdot 10^2) = \log 3 + 2 \log 10 = 2,477$$

$$\log 3000 = 0,477 + 3 = 3,477$$

$$\log 0,3 = \log(3 \cdot 10^{-1}) = 0,477 - 1 = -0,523$$

$$\log 0,03 = \log(3 \cdot 10^{-2}) = 0,477 - 2 = -1,523$$

$$\log 0,003 = 0,477 - 3 = -2,523$$

57 Sabiendo que $\log k = 14,4$, calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) $\log \frac{k}{100}$ b) $\log 0,1 k^2$ c) $\log \sqrt[3]{\frac{1}{k}}$ d) $(\log k)^{1/2}$

a) $\log k - \log 100 = 14,4 - 2 = 12,4$

b) $\log 0,1 + 2 \log k = -1 + 2 \cdot 14,4 = 27,8$

c) $\frac{1}{3}(\log 1 - \log k) = -\frac{1}{3} \cdot 14,4 = -4,8$

d) $(14,4)^{1/2} = \sqrt{14,4} = 3,79$

58 Sabiendo que $\ln k = 0,45$, calcula el valor de:

a) $\ln \frac{k}{e}$ b) $\ln \sqrt[3]{k}$ c) $\ln \frac{e^2}{k}$

a) $\ln \frac{k}{e} = \ln k - \ln e = 0,45 - 1 = -0,55$

b) $\ln \sqrt[3]{k} = \frac{1}{3} \ln k = \frac{1}{3} \cdot 0,45 = 0,15$

c) $\ln \frac{e^2}{k} = 2 \ln e - \ln k = 2 - 0,45 = 1,55$

59 Calcula x para que se cumpla:

a) $x^{2,7} = 19$ b) $\log_7 3x = 0,5$ c) $3^{2+x} = 172$

a) $\log x^{2,7} = \log 19 \Rightarrow 2,7 \log x = \log 19 \Rightarrow \log x = \frac{\log 19}{2,7} = 0,47$

$$x = 10^{0,47} = 2,98$$

b) $7^{0,5} = 3x \Rightarrow x = \frac{7^{0,5}}{3} = 0,88$

c) $\log 3^{2+x} = \log 172 \Rightarrow (2+x) \log 3 = \log 172 \Rightarrow 2+x = \frac{\log 172}{\log 3}$

$$x = \frac{\log 172}{\log 3} - 2 = 2,685$$