Capítulo 2

Vibraciones y ondas

2.1. Conceptos previos.

- ***Ecuación del movimiento armónico simple:*** La ecuación de un movimiento armónico simple puede ser expresada por cualquiera de las siguientes expresiones:

  $$y = A \operatorname{sen}(\omega\ t + \phi_0) \qquad \text{o bien} \qquad y = A\cos(\omega\ t + \phi_0)$$

  Siendo y la elongación, A la amplitud, $\omega = 2\pi\nu$ la pulsación, y ϕ_0 la fase inicial

- ***Velocidad y aceleración de un MAS:*** La velocidad se obtiene derivando cualquiera de las expresiones de y señaladas anteriormente. Por ejemplo, si derivamos la primera de ellas, tendremos:

  $$v = \frac{dy}{dt} = A\omega\cos(\omega\ t + \phi_0)$$

  La aceleración será la derivada de la velocidad respecto al tiempo, es decir:

  $$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega\ t + \phi_0)$$

  Esta última expresión de la aceleración puede también ser escrita como: $A = -\omega^2 x$

- ***Dinámica de un MAS:*** Si consideramos el caso de un resorte en cuyo extremo libre se sujeta una masa m, teniendo en cuenta la Ley de Hooke:$F = -Kx$ y que la aceleración es la segunda derivada de x respecto al tiempo, tendremos la siguiente expresión:

  $$F = ma \Rightarrow -kx + m\frac{d^2x}{dt^2} \text{ lo que da lugar a la ecuación diferencial: } m\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0$$

  una de cuyas soluciones es: $x = A\operatorname{sen}(\omega\ t + \phi_0)$, siendo: $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$.

- ***Energía de un MAS:*** Teniendo en cuenta que la energía de un MAS es la suma de las energías cinética y potencial, siendo:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \phi_0)$$

La energía potencial se calcula a partir de:

$$W = \int_0^x -Kxdx = -K\frac{x^2}{2} = -U, \text{ por lo que } U = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}KA^2\operatorname{sen}^2(\omega t + \phi_0)$$

Teniendo en cuenta que K=mω^2, la energía cinética quedará de la forma:

$$\frac{1}{2}KA^2\cos^2(\omega t + \phi_0)$$

Sumando las expresiones de energía cinética y energía potencial, tendremos:

$$E = \frac{1}{2}KA^2[(\operatorname{sen}^2(\omega t + \phi_0) + \cos^2(\omega t + \phi_0)] = \frac{1}{2}KA^2$$

- ***Ecuación de una onda:*** La ecuación general de un movimiento ondulatorio es la siguiente:

$$y = A\operatorname{sen}(\omega t \pm kx)$$

Siendo y la elongación, A la amplitud, ω la pulsación y k el número de ondas, cuyo valor es $\frac{2\pi}{\lambda}$.El sumando kx llevará signo negativo o positivo cuando el movimiento ondulatorio se propague en el sentido positivo o negativo, respectivamente, del eje x.

- ***Velocidad de propagación y velocidad de vibración:*** La velocidad de propagación de una onda es constante, y aparece en la expresión del número de ondas. En efecto, $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}$, siendo v la velocidad de propagación

La velocidad de vibración viene dada por la derivada de y respecto a t, es decir:

$$v_v = \frac{dy}{dt} = A\omega\cos(\omega t \pm kx)$$

Como vemos, la velocidad de vibración depende tanto del tiempo, como de la posición.

- ***Principio de superposición. Interferencia:*** Cuando un medio está sometido a mas de un movimiento ondulatorio, la elongación de un punto de dicho medio vendrá dado por la suma de las elongaciones debidas a cada uno de los movimientos ondulatorios, lo que constituye el Principio de Superposición. Aplicando dicho principio a la interferencia de dos ondas de la misma amplitud y frecuencia, obtendremos para la amplitud resultante el valor:

$$A_r = 2A\cos\frac{k(x_2 - x_1)}{2} = 2A\cos\frac{\pi(x_2 - x_1)}{\lambda}$$

Donde, como puede verse, la amplitud resultante de la onda obtenida por interferencia de otras dos depende de la diferencia de caminos seguidos por aquellas, además de su amplitud y su longitud de onda.

Si hallamos la amplitud resultante, no ya en función de la diferencia de caminos, sino en función de la diferencia de fase, ϕ, tendremos, mediante un tratamiento semejante al anterior:

$$A_r = 2A\cos\frac{\phi}{2}$$

- ***Ondas estacionarias en una cuerda sujeta por los dos extremos:*** Si suponemos una cuerda sujeta por los dos extremos y, a través de ella se propaga un movimiento ondulatorio, al llegar éste a uno de los extremos, se refleja, produciéndose la interferencia de ambos movimientos ondulatorios, siendo el resultado el siguiente:

$$y = 2A\cos\omega t \operatorname{sen} kx$$

Aquellos puntos donde la elongación sea nula para cualquier valor del tiempo se denominan nodos. En función del número de éstos, se pueden obtener las expresiones de la longitud de onda y la frecuencia de una onda estacionaria:

$$\lambda = \frac{2L}{n-1} \qquad \text{y} \qquad \nu = \frac{(n-1)v}{2L}$$

Siendo L la longitud, n el número de nodos y v la velocidad de propagación.

2.2. Problemas resueltos.

1.- Una onda en una cuerda viene dada por la ecuación: $y(x,t) = 0,2\operatorname{sen}(\pi x)\cos(100\pi t)m$ donde x está comprendido entre 0 y 6 metros. Calcular:

1.a.- La longitud de onda y la frecuencia angular de la onda.

1.b.- El número total de nodos (incluidos los extremos).

1.c.- La velocidad de propagación de las ondas en la cuerda.

$\boxed{\textbf{Solución:}}$

1.a.- La forma general de la ecuación que describe una onda estacionaria es:

$$y = 2A\cos\omega t \operatorname{sen} kx$$

De aquí se puede deducir que:

$$\omega = 100\pi\ s^{-1} \text{ y } \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\ m$$

1.b.- Al estar la cuerda sujeta por los dos extremos, tendremos que:

$$equation \lambda = \frac{2L}{n-1}$$

Siendo n el número de nodos. Por lo tanto:

$$2 = \frac{6}{n-1} \Rightarrow n = \frac{6}{2} + 1 = 4$$

1.c.- Puesto que $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}$ tendremos que $v = \frac{\omega}{k} = \frac{100\pi}{\pi} = 100\ m/s$

2.- Una onda se propaga por una cuerda según la ecuación: $y(x,t) = 0,2\,\mathrm{sen}(100t - 4x)$ en unidades del S.I. Determinar:

2.a.- El período y la longitud de onda.

2.b.- La velocidad de propagación de la onda en la cuerda.

2.c.- La velocidad del punto x = 2 en el instante t = 10 s.

Solución:

2.a.- Comparando con la ecuación general:

$$y = A\,\mathrm{sen}(\omega t - kx)$$

Tendremos que $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100} = 0,2\pi\ s$

$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\ m$

2.b.- Si tenemos en cuenta que $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$, despejando nos queda:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{100}{4} = 25\ m/s$$

2.c.- Para calcular la velocidad de un punto en un instante dado, debemos derivar y con respecto al tiempo, de forma que:

$$v = \frac{dy}{dt} = 0,2 \cdot 100\cos(100t - 4x)$$

Sustituyendo los valores de x y t, nos queda:

$$v = 20\cos(1000 - 8) = 14,72\ m/s$$

3.- Una partícula de 2 kg de masa está sujeta al extremo de un muelle y se mueve de acuerdo con la ecuación: $x(t) = 2\cos(10t)$ m. Calcular las siguientes magnitudes.

3.a.- El período del movimiento.

3.b.- La constante de fuerza (cociente entre la fuerza y el desplazamiento) de la fuerza que actúa sobre la partícula.

3.c.- La energía total de la partícula.

Solución:

3.a.- La ecuación del MAS viene dada por:

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0)$$

o bien por:

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

Por lo cual, tendremos que: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 10$ y $T = colorred 0,2\pi\ s$

3.b.- Puesto que $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$, tendremos que: $10 = \sqrt{\dfrac{K}{2}} \Rightarrow\ K = 200\ N/m$

3.c.- La energía de un MAS viene dada por:

$$E = \frac{1}{2}KA^2$$

Por tanto, $E = \dfrac{1}{2}\,200 \cdot 2^2 = 400\ J$

4.- En una cuerda de 2 metros de longitud sujeta por sus dos extremos se producen ondas estacionarias correspondientes al modo fundamental. La amplitud de dichas ondas en el punto medio de la cuerda es de 0,1 m y la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda es de 4 m/s. Encontrar los siguientes parámetros de la mencionada onda estacionaria:

4.a.- La longitud de onda.

4.b.- La frecuencia.

4.c.- La ecuación de ondas que la describe (suponer la cuerda en el eje x y la vibración de la onda en el eje y).

Solución:

4.a.- Utilizando la expresión que relaciona la longitud de onda con la longitud de la cuerda y el número de nodos, tendremos que: $\lambda = \dfrac{2L}{n-1} = 2 \cdot 2 =\ 4\ m$

4.b.- La frecuencia viene dada por la expresión: $\nu = \dfrac{(n-1)v}{2L} = \dfrac{4}{2 \cdot 2} = 1 Hz$

4.c.- La ecuación que describe la onda es: $y = 0,1 \cos 2\pi t \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x$

5.- Un muelle sujeto a una pared por un extremo se estira 2 cm cuando le aplicamos una fuerza de 10 N en el otro extremo.

5.a.- Determinar la constante del muelle.

5.b.- ¿ Con qué frecuencia angular oscila una masa de 0,05 kg sujeta a un extremo de dicho muelle?

5.c.- ¿Qué energía posee dicha masa si oscila con una amplitud de 10 cm?

Solución:

5.a.- Teniendo en cuenta que $F - Kx = 0$, tendremos que: $10 = K \cdot 0,02$
de donde: $K = 500\ N/m$

5.b.- Puesto que la pulsación viene expresada por: $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$, tendremos que:

$$\omega = \sqrt{\frac{500}{0,05}} = 100\ s^{-1}$$

5.c.- La energía de un MAS viene expresado por la expresión $E = \frac{1}{2}KA^2$. Por lo tanto:

$$E = \frac{1}{2}\, 500 \cdot 0,1^2 = 2,5\ J$$

6.- Un altavoz emite ondas sonoras esféricas con una frecuencia de 1000 Hz y una potencia de 40 W. Determinar:

6.a.- La longitud de onda del sonido.

6.b.- La intensidad sonora a 4 metros del altavoz.

6.c.- El nivel de intensidad sonora a 4 metros del altavoz.

Solución:

6.a.- Puesto que la velocidad de propagación es de 340 m/s, la longitud de onda se calcula de la forma:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340}{1000} = 0,34\ m$$

6.b.- La intensidad se obtiene mediante la expresión:

$$I = \frac{dE}{Sdt} = \frac{P}{S}$$

Por tanto, $I = \frac{40}{4\pi r^2} = \frac{40}{4\pi \cdot 16} = 0,199\ w/m^2$

6.c.- El nivel de intensidad se halla a partir de la expresión:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

Con $I_0 = 10^{-12}\ w/m^2$, de donde se obtiene que

$$\beta = 10 \log 0,199 \cdot 10^{12} = 112,99\ dB$$

7.- Una fuente sonora de 100 W de potencia emite ondas esféricas.

7.a.- ¿Qué energía habrá emitido en una hora?

7.b.- ¿Cuál es la intensidad sonora a 2 metros de la fuente?

7.c.- ¿Cuál es el nivel de intensidad (en decibelios) a 2 metros de la fuente?

Solución:

7.a.- La energía emitida se obtiene a partir de $P = \dfrac{E}{t}$, por lo que:

$$E = P \cdot t = 100 \cdot 3600 = 360000\ J$$

7.b.- A 2 m de la fuente, y aplicando la expresión:$I = \dfrac{P}{S}$, tendremos:

$$I = \frac{100}{4\pi \cdot 2^2} = 1,99\ w/m^2$$

7.c.- , tendremos $\beta = 10 \log 1,99 \cdot 10^{12} = 122,99\ dB$

8.- Una onda cuya frecuencia es de 30 Hz se desplaza por una cuerda situada a lo largo del eje x. La onda oscila en una dirección z con una amplitud de 20 cm. La velocidad de las ondas en la cuerda es de 120 m/s y la densidad lineal de ésta es de 60 g/m. Encontrar:

8.a.- La longitud de onda.

8.b.- La ecuación de la onda (es decir, el desplazamiento en función de la posición y el tiempo).

8.c.- La energía por unidad de longitud.

Solución:

8.a.- Conociendo la frecuencia de la onda y su velocidad, la longitud de onda se obtiene de la forma: $\lambda = \dfrac{v}{\nu} = \dfrac{120}{30} = 4\ m$

8.b.- Aplicando la ecuación general de la onda, siendo A =0,20 m; $\omega = 2\pi\nu = 60\ Hz$ y $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2}\ m^{-1}$, por lo que la ecuación quedará de la forma:

$$z = 0,2\,\mathrm{sen}\left(60\pi t - \frac{\pi}{2}\right)x$$

8.c.- Para obtener la energía por unidad de longitud, partimos de la energía de un MAS:

$$E = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = 2\sigma Ł\pi^2\nu^2A^2$$

Donde σ es la densidad lineal. Por tanto, la energía por unidad de longitud será:

$$\frac{E}{l} = 2\sigma Ł\pi^2\nu^2A^2$$

Sustituyendo, tendremos: $\frac{E}{L} = 2 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \cdot \pi^2 \cdot 30^2 \cdot 0,2^2 = 42,63\ J/m$

9.- Una fuente sonora emite a 200 Hz en el aire. El sonido se tramite luego a un líquido con una velocidad de propagación de 1500 m/s. Calcular:

9.a.- La longitud de onda del sonido en el aire.

9.b.- El período del sonido en el aire.

9.c.- La longitud de onda del sonido en el líquido.

Solución:

9.a.- La longitud de onda es $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340}{200} = 1,7\ m$

9.b.- El periodo es la inversa de la frecuencia, es decir: $T = \frac{1}{\nu} = 0,005\ s$

9.c.- Al cambiar de medio, la frecuencia no varía, por lo cual: $\lambda = \frac{1500}{200} = 7,5\ m$

10.- Una onda de 50 Hz en una cuerda se desplaza en el sentido negativo del eje y y oscila en la dirección z con una amplitud de 15 cm. La velocidad de propagación de las ondas en la cuerda es de 150 m/s y la densidad lineal de ésta es de 80 g/cm. Hallar:

10.a.- La longitud de onda.

10.b.- La ecuación de la onda (es decir, el desplazamiento en función de la posición y el tiempo).

10.c.- La energía por unidad de longitud de la onda en la cuerda.

Solución:

10.a.- Para hallar la longitud de onda, tendremos que $\lambda = \dfrac{v}{\nu} = \dfrac{150}{50} = 3\ m$

10.b.- Aplicando la ecuación de la onda, donde A = 0,15 m; $\omega = 2\pi \cdot 50 = 100\ \pi\ s^{-1}$ y $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{3}\ m^{-1}$, la ecuación pedida quedará así:

$$z = 0,15 \operatorname{sen}\left(100\pi t + \frac{2\pi y}{3}\right)\ m$$

10.c.- Partiendo de la energía de un MAS se llega a la ecuación obtenida en el apartado c) del problema 8. Por tanto:

$$\frac{E}{L} = 2\sigma\pi^2\nu^2A^2 = 2 \cdot 8 \cdot \pi^2 \cdot 50^2 \cdot 0,15^2 = 8882,6\ J/m$$

11.- Una onda en una cuerda de 0,01 kg /m de densidad lineal viene dada por la ecuación: $y(x,t) = 0,2 \operatorname{sen}(\pi x + 100\pi t)$ m. Calcule:

11.a.- La frecuencia de la onda.

11.b.- La velocidad de propagación de las ondas en la cuerda.

11.c.- La potencia que transporta la onda.

Solución:

11.a.- La frecuencia se obtiene de la expresión $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{100\pi}{2\pi} = 50\ Hz$

11.b.- La velocidad de propagación se obtiene de $k = \dfrac{\omega}{v}$ de donde $v = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{100}{\pi} = 100\ m/s$

11.c.- La potencia transportada es la energía por unidad de tiempo. Como se ha visto en el problema 8, $E = 2\sigma L\pi^2\nu^2A^2$, siendo la potencia:

$$P = \frac{E}{t} = \frac{2\sigma L\pi^2\nu^2A^2}{L} = 2\sigma\pi^2\nu^2A^2 = 1973,92\ w$$

12.- Una cuerda de 2 m de longitud oscila con sus dos extremos fijos en un modo con dos nodos internos. La frecuencia de oscilación es de 100 Hz y la amplitud máxima es de 5 cm. Determine:

12.a.- La longitud de onda de la onda en la cuerda.

12.b.- La longitud de onda del sonido producido por la cuerda.

12.c.- La velocidad máxima del punto en el centro de la cuerda.

Solución:

12.a.- La longitud de onda para una onda estacionaria, viene dada por la expresión:

$$\lambda = \frac{2L}{n-1}$$

Puesto que el número de nodos (incluyendo los extremos) es cuatro:

$$\lambda = \frac{4}{3} = 1,33\ m$$

12.b.- La frecuencia no varía al cambiar de medio, por lo que la longitud de onda del sonido será:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340}{100} = 3,4\ m$$

12.c.- La ecuación de una onda estacionaria en una cuerda sujeta por los dos extremos es $y = 2A\cos\omega t \operatorname{sen} kx$, siendo $\omega = 200\pi$,$k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 1,5\pi$, y $2A = 0,05$, con lo cual:

$$y = 0,05\cos 200\pi t \operatorname{sen} 1,5\pi x$$

La velocidad es la derivada de y respecto a t, por lo que:

$$v = \frac{dy}{dt} = -0,05 \cdot 200\pi \operatorname{sen} 200\pi t \operatorname{sen} 1,5\pi x$$

En el centro de la cuerda, $y = 1\ m$, con lo cual, $\operatorname{sen} 1,5\pi = -1$, quedándonos entonces la velocidad máxima en la forma:

$$v_{max} = -0,05 \cdot 200\pi(-1) = 10\pi\ m/s)$$

(Puesto que, para que la velocidad sea máxima, deberá cumplirse: $\operatorname{sen}\omega t = 1$)

13.- Una cuerda oscila con sus dos extremos fijos en un modo con dos nodos internos y una longitud de onda de 40 cm. La frecuencia de oscilación es de 100 Hz. Determine:

13.a.- La longitud de la cuerda.

13.b.- La velocidad de propagación de las ondas en la cuerda.

13.c.- La longitud de onda del sonido producido por la cuerda.

Solución:

13.a.- Aplicando la expresión $\lambda = \dfrac{2L}{n-1}$ y despejando, tendremos:

$$L = \frac{\lambda(n-1)}{2} = \frac{0,4 \cdot 3}{2} = 0,6\ m$$

13.b.- Puesto que $\lambda = \dfrac{v}{\nu}$, la velocidad será:

$$v = \lambda\nu = 0,4 \cdot 100 = 40\ m/s$$

13.c.- Al no producirse variación de la frecuencia, tendremos:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340}{100} = 3,4\ m$$

14.- Una cuerda de 40 cm con sus dos extremos fijos oscila en su modo fundamental con una frecuencia angular de 100 rad/s. El punto central de la cuerda oscila con una amplitud de 2 cm. Calcule:

14.a.- La velocidad máxima del punto central de la cuerda.

14.b.- La amplitud de oscilación de un punto de la cuerda situado a 10 cm de uno de sus extremos.

14.c.- La longitud de onda del sonido producido por la cuerda.

Solución:

14.a.- La expresión de la velocidad de vibración es la misma que se ha obtenido en el problema 12, es decir:

$$v = -2A\omega \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} kx$$

La velocidad máxima será $v_{max} = 2A\omega \operatorname{sen} kx$. Sustituyendo x por 0,2, nos queda:

$$v_{max} = 0,02 \cdot 100 \operatorname{sen} 2,5\pi \cdot 0,2 = 2\ m/s$$

14.b.- Para hallar la amplitud resultante, deberemos conocer previamente el valor de λ y el de k. Teniendo en cuenta que el número total de nodos es de dos,tendremos: $\lambda = \dfrac{0,8}{1} = 0,8$ y $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 2,5\pi$. La amplitud de oscilación en un punto viene expresada por:

$$A_r = 2A \operatorname{sen} kx$$

Sustituyendo x por 0,1 queda:

$$A_r = 0,02 \operatorname{sen} 2,5\pi \cdot 0,1 = 0,014\ m$$

(El mismo resultado se obtendría sustituyendo x por 0,3 m, ya que en ambos casos, la distancia a uno de los extremos es de 0,1 m)

14.c.- La longitud de onda del sonido es:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340}{\frac{100}{2\pi}} = 6,8\pi \ m$$

(Hay que tener en cuenta que el dato que nos da el problema es la *frecuencia angular* o pulsación, que no conviene confundir con la frecuencia.)

15.- Una partícula de 0,2 kg está sujeta al extremo de un muelle y oscila con una velocidad dada por $v(t) = 2\,\mathrm{sen}(2t) m/s$, donde el tiempo se mide en segundos y los ángulos en radianes. En el instante inicial, dicha partícula se encuentra en el origen. Calcule las siguientes magnitudes de la partícula:

15.a.- Posición en t = π /2 s.

15.b.- Energía total.

15.c.- Energía potencial en t = π /8 s.

Solución:

15.a.- El valor de la posición se obtiene de la siguiente forma:

$$x(t) = \int_0^t 2\,\mathrm{sen}\,2t\ dt = [-\cos 2t]_0^t = 1 - \cos 2t$$

Para $t = \frac{\pi}{2}$, $\quad x = 1 - \cos\frac{2\pi}{2} = 2 \ m$

15.b.- La energía es $E = \frac{1}{2}KA^2$. Puesto que $\omega = 2$, $k = m\omega^2 = 0,2 \cdot 4 = 0,8 \ N/m$, y la energía será:

$$E = \frac{1}{2}0,8 \cdot 1^2 = 0,4 \ J$$

15.c.- La energía potencial viene dada por:

$$U = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}\ 0,8\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 = 0,062 \ J$$

16.- Una cuerda de 60 cm con sus dos extremos fijos oscila en un modo con dos nodos internos y una frecuencia de 200 Hz. El punto central de la cuerda oscila con una amplitud de 2 cm. Calcule:

16.a.- La velocidad de propagación de las ondas en la cuerda.

16.b.- La velocidad máxima en el punto central de la cuerda.

16.c.- La amplitud de oscilación de un punto de la cuerda situado a 5 cm de uno de sus extremos.

Solución:

16.a.- La velocidad se despeja a partir de la expresión de la longitud de onda, valor que se calcula previamente mediante la expresión $\lambda = \frac{2L}{n-1} = \frac{1,2}{3} = 0,4\ m$:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \Rightarrow v = \lambda\nu = 0,4 \cdot 200 = 80\ m/s$$

16.b.- El punto central corresponde a un antinodo, por lo que la velocidad de dicho punto será:

$$v = 2A\omega = 0,2 \cdot 400\pi = 8\pi\ m/s$$

16.c.- La amplitud en un punto situado a 5 cm de uno de sus extremos (por lo cual x=0,05 m o x=0,55 m)es $A_r = 2A \operatorname{sen} kx$, siendo $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 5\pi$. Con todo ello, tendremos:

$$A_r = 0,02 \operatorname{sen} 5\pi \cdot 0,05 = 0,014\ m$$

17.- Una masa de 3 kg sujeta al extremo de un muelle oscila según la ecuación $x(t) = 5\cos(2t)$ cm, en donde t se expresa en segundos. Calcule:

17.a.- El período del movimiento.

17.b.- La constante del muelle

17.c.- La energía total de la masa.

Solución:

17.a.- Puesto que $\omega = 2$ y $\omega = \frac{2\pi}{T}$, el periodo será:

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi\ s$$

17.b.- La constante del muelle es $K = m\omega^2 = 3 \cdot 2^2 = 12\ N/m$

17.c.- La energía total de la masa será:

$$E = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}12 \cdot 0,05^2 = 0,015\ J$$

18.- La cuerda Mi de un violín vibra a 659.26 Hz en el modo fundamental. La cuerda tiene una longitud de 32 cm.

18.a.- Obtenga el período de la nota Mi y la velocidad de las ondas en la cuerda.

18.b.- ¿En qué posición (refiérala a cualquiera de los dos extremos) se debe presionar la cuerda para producir la nota Fa, de 698.46 Hz de frecuencia?

18.c.- Si se produce con el violín un sonido de 10^{-4} W de potencia, calcule la distancia a la que habría que situarse para escucharlo con un nivel de intensidad de 50 db.

Solución:

18.a.- Al tratarse de la frecuencia fundamental, la longitud de onda será:

$$\lambda = 2L = 0,64 \text{ m}$$

mientras que la velocidad de las ondas en la cuerda se deducirá de:

$$\nu_0 = \frac{v}{2L} \Rightarrow 695,26 = \frac{v}{2 \cdot 0,32} \qquad v = 421,92 \text{ m/s}$$

18.b.- Puesto que la velocidad de las ondas en la cuerda sólo dependerá de la tensión de la misma y de su densidad lineal, el valor que hemos calculado en el apartado anterior seguirá siendo válido. Así pues:

$$698,46 = \frac{421,9}{2L'} \Rightarrow L' = 0,302 \text{ m}$$

por lo que la cuerda deberá ser presionada a una distancia x=0,32-0,302=0,018m de cualquiera de los extremos.

18.c.- Dada la expresión que nos permite calcular el nivel de intensidad:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad \text{tendremos que} \quad 50 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$$

de donde se obtiene una intensidad de 10^{-7}W/m^2. Aplicando este valor a la expresión que nos da la intensidad:

$$I = \frac{P}{S} \Rightarrow 10^{-7} = \frac{10^{-4}}{4\pi r^2}; r = \sqrt{\frac{10^3}{4\pi}} = 8,92 \text{ m}$$

19.- Una emisora de FM emite ondas de 108 MHz con una potencia de 20 W. Calcule:

19.a.- El período y la longitud de onda de la radiación.

19.b.- La intensidad de las ondas a 3 km de distancia de la emisora.

19.c.- El número de fotones emitidos por la antena durante una hora.

Solución:

19.a.- El periodo de la radiación será:

$$T = \frac{1}{1,08 \cdot 10^8} = 9,26{\cdot}10^{-9}\ \mathrm{s} \quad \text{y la longitud de onda: } \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,08 \cdot 10^8} = 2,78\ \mathrm{m}$$

19.b.- La intensidad de las ondas a 3 km de distancia, será:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{20}{4\pi 3000^2} = 1,77 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{W/m^2}$$

19.c.- La energía de cada fotón es: E=hν $= 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 1,08 \cdot 10^8 = 7,16 \cdot 10^{-26}$ J. Sabiendo que la potencia es de 20 W (20 J/s), podremos poner:

$$20 = n \cdot 7,16 \cdot 10^{-26}$$

con lo que el número de fotones emitidos por segundo será:

$$n = \frac{20}{7,16 \cdot 10^{-26}} = 2,79 \cdot 10^{26}$$

y el número de fotones emitidos en una hora será N $=2,79 \cdot 10^{26} \cdot 3600 = 10^{30}$

20.- Hacemos un péndulo con una masa de 0.5 kg suspendida de un hilo de 20 cm de longitud. Desplazamos la masa un ángulo de 10º respecto a su posición de equilibrio y la dejamos oscilar.

20.a.- Calcule el período de oscilación.

20.b.- Calcule la velocidad de la masa en el punto más bajo.

20.c.- Halle la expresión de la energía cinética de la masa en función del tiempo.

Solución:

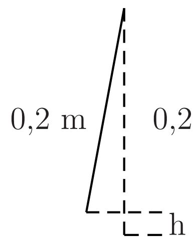
20.a.- El periodo de obtiene de la expresión:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,2}{9,8}} = 0,898\ \mathrm{s}$$

20.b.- Aplicando el principio de conservación de la energía:

$$mgh + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

Para resolver este apartado, debemos calcular la altura a la que se encuentra la masa del péndulo en la situación inicial, lo que podemos ver en la siguiente representación gráfica:



Obteniéndose h = 0,2(1-cos 10º). Así pues:

$$m \cdot g \cdot 0,2(1 - \cos 10^o) = \frac{1}{2} 0,2v^2 \Rightarrow v = 2,44 \text{ m/s}$$

20.c.- Para obtener la energía cinética, $\frac{1}{2}mv^2$, debemos obtener la velocidad. Teniendo en cuenta que $v = \frac{dx}{dt}$ y que $x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$. Sabiendo que para t = 0, la elongaxión x = A, podremos poner:

$$A = A \operatorname{sen}\varphi \quad \text{con lo cual} \quad \varphi = \pi/2$$

Derivando, tendremos:

$$v = A\,\omega \cos(\omega t + \pi/2) = -A\,\omega \operatorname{sen}(\omega t) \quad \text{y} \quad E_c = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega\, t)$$

La amplitud se despeja de $A = 0,2 \operatorname{sen} 10^o = 0,0347$ m. La pulsación será, $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 6,996$ ($\simeq 7s^{-1}$), por lo que:

$$E_c = \frac{1}{2} 0,5 \cdot 0,0347^2 \cdot 7^2 \operatorname{sen}^2(\omega t) = 0,0147 \operatorname{sen}^2(\omega t)$$

21.- La cuerda Mi de una guitarra tiene una longitud de 65 cm y emite una frecuencia de 329.63 Hz en el modo fundamental.

21.a.- Calcule la velocidad de las ondas en la cuerda.

21.b.- ¿En qué punto (refiéralo a cualquiera de los dos extremos) se debe presionar la cuerda para producir la nota Sol, de 392 Hz frecuencia.

21.c.- Si se produce con la guitarra un sonido de 10^{-6} W de potencia, calcule la distancia a la que habría que situarse para escucharlo con un nivel de intensidad de 60 db. Dato: $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

Solución:

21.a.- La frecuencia fundamental dde una cuerda tiene la expresión:

$$\nu = \frac{v}{2L}$$

por lo que sustituyendo valores obtendremos v = 2L·ν = $329,63 \cdot 2 \cdot 0,65 =$ $428,52$ m/s

21.b.- Para que la frecuencia sea de 392 Hz, deberá cumplirse que:

$$392 = \frac{428,52}{2L'}$$

por lo que despejando obtenemos L$'$ = 0, 55 m. La distancia de un extremo a la que debe pulsarse la cuerda será: x = 0,65-0,55 = 0, 1 m

21.c.- El nivel de intensidad viene dado por la expresión:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{10^{-12}} \quad \text{por lo que } 60 = 10 \frac{I}{10^{-12}}$$

despejando, obtenemos una intensidad I = 10^{-6} W/m^2

Aplicando ahora la ecuación I = $\frac{P}{4\pi r^2}$ y sustituyendo I por 10^{-6} W/m^2, P por 10^{-6} W y despejando r tendremos:

$$r = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} = 0,28 \text{ m}$$

22.- Un muelle de masa despreciable, suspendido de su extremo superior, mide 11.5 cm. Al colgar una masa de 300 g en el extremo libre, el muelle se estira hasta una posición de equilibrio en la cual su nueva longitud es de 23.5 cm.

22.a.- Calcula la constante elástica del muelle a partir de la deformación descrita.

22.b.- Empujamos la masa 5 cm hacia arriba comprimiendo el muelle, y la soltamos. Medimos 10 oscilaciones en 7 s. Determina la expresión para la posición de la masa en función del tiempo.

22.c.- Calcula de nuevo la constante del muelle a partir del valor del período de oscilación. Halla el valor de la energía total de la masa mientras oscila.

Solución:

22.a.- El alargamiento que se produce al colgar la masa será: Δx = 23,5 - 11,5 = 12 cm. Teniendo en cuenta la ley de Hooke, tendremos: mg = Kx, con lo que 0,3·9,8 = K·0,12 y K = 24, 5 Kg/m

22.b.- El periodo de oscilación será 7/10 s, con lo que la pulsación será $\omega = 2\pi \cdot 10/7 = 20\pi/7$. La expresión que nos da la posición de la masa en función del tiempo es (suponiendo que para un tiempo cero la elongación sea nula): x = $0,05 \,\text{sen}(20\pi/7)t$

22.c.- La constante del muelle se puede obtener a partir de la expresión:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

si sustituimos ω por $20\pi/7$, tendremos que:

$$\frac{20\pi}{7} = \sqrt{\frac{K}{0,3}} \text{ por lo que } K = \left(\frac{20\pi}{7}\right)^2 \cdot 0,3 = 24,17 \text{ N/m}$$

La energía total de la masa mientras oscila será:

$$E = \frac{1}{2} KA^2 = 0,03 \text{ J}$$

23.- Una soprano cuya voz está en el intervalo de frecuencias 247-1056 Hz, da un grito que registra un nivel de 80 dB a una distancia 10 m. Calcula:

23.a.- La longitud de onda del sonido más agudo que es capaz de emitir.

23.b.- La potencia del sonido emitido en el grito.

23.c.- El nivel de intensidad acústica del mismo grito registrado a 1 m de distancia.

Dato: $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

Solución:

23.a.- La longitud de onda del sonido más agudo (mayor frecuencia) será:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340}{1056} = 0,32 \text{ m}$$

23.b.- Para calcular la potencia, debemos calcular la intensidad emitida, de la forma:

$$80 = 10 \, \log \frac{I}{10^{-12}}$$

lo que nos da un valor de 10^{-4} W/m^2. Sabiendo que la intensidad es el cociente de la potencia entre el área, tendremos:

$$10^{-4} = \frac{P}{4\pi \cdot 10^2}$$

lo que nos da: P = 0,126 W

23.c.- A un metro de distancia, la intensidad será:

$$I' = \frac{0,126}{4\pi \cdot 1} = 0,01 \text{ W/m}^2$$

por lo que el nivel de intensidad acústica a esa distancia será:

$$\beta = 10 \, \log \frac{10^{-2}}{10^{-12}} = 100 \text{ dB}$$

24.- En un partido de la Copa de Sudáfrica había mil aficionados soplando simultáneamente la vuvuzela. Suponemos que todos ellos se encontraban a 200 m del centro del campo y que cada uno de ellos producía un sonido de 233 Hz y 0,1 W de potencia. Calcula:

24.a.- La longitud de onda del sonido.

24.b.- La intensidad del sonido en el centro del campo, producida por un aficionado.

24.c.- El nivel de intensidad acústica total (por los mil aficionados) registrado en el centro del campo.

Solución:

24.a.- La longitud de onda del sonido será:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340}{233} = 1,46 \text{ m}$$

24.b.- La intensidad viene dada por:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{0,1}{4\pi \cdot 200^2} = 1,97 \cdot 10^{-7} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

24.c.- La intensidad total debida a los 1000 aficionados será: I = $1000 \cdot 1,99 \cdot 10^{-7}$ W/m^2, es decir $1,99 \cdot 10^{-4}$, siendo el nivel de intensidad:

$$\beta = 10 \log \frac{1,99 \cdot 10^{-4}}{10^{-12}} = 83 \text{ dB}$$

25.- Por una cuerda se propaga una onda a 2 m/s en la dirección del eje X. La amplitud es de 10 cm y la frecuencia es de 20 Hz. En el origen de abscisas e instante inicial, la elongación de la cuerda es máxima.

25.a.- Calcula la longitud de onda.

25.b.- Escribe la ecuación de la elongación de la cuerda en función de x y de t.

25.c.- Determina la velocidad, según el eje Y, de un punto de la cuerda situado a 50 cm del origen en el instante t = 5 s.

Solución:

25.a.- La longitud de onda es el cociente entre la velocidad y la frecuencia, es decir:

$$\lambda = \frac{2}{20} = 0,1 \text{ m}$$

25.b.- La ecuación que describe la elongación de la cuerda en función de x y de t tiene la forma y = A sen (ω t - kx + ϕ_0). A partir de los datos del problema, A = 0,1 m, $\omega = 2\pi\nu = 40\pi$ s^{-1}, k = ω/v = 20 π m^{-1} y ser y máximo para x = 0 y t = 0, tendremos 0,1 = 0,1 sen ϕ_0, con lo que $\phi_0 = \pi/2$. Así pues, la ecuación quedará de la forma:

$$y = 0,1 \text{ sen}(40\pi t - 20\pi x + \pi/2)$$

25.c.- La velocidad según el eje Y viene dada por:

$$v = \frac{dy}{dt} = 0,1 \cdot 40\pi \cdot \cos\left(40\pi t - 20\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$$

por lo que al sustituir x por 0,5 y t por 5, nos queda:

$$v_y = 0,1 \cdot 40\pi \cdot \cos\left(200\pi - 10\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ m/s}$$

26.- Una persona de 71,5 kg de masa se dispone a hacer *puenting* con una cuerda de constante elástica 100 N/m y cuya longitud es L = 20 m.

26.a.- Calcula la longitud de la cuerda cuando la persona se cuelga de ella y queda en una posición de equilibrio.

26.b.- Obtén el periodo de las oscilaciones armónicas que realiza la persona colgada de la cuerda si se perturba su posición respecto al equilibrio.

26.c.- La persona se deja caer sin velocidad inicial desde un puente y desciende hasta una distancia h = L + A, donde A es la elongación máxima de la cuerda. Determina la distancia h.

(Toma el origen de energía potencial gravitaoria en el punto más bajo donde, por tanto, sólo habrá energía potencial elástica) **Solución:**

26.a.- Teniendo en cuenta la expresión mg = kx, despejamos x de la forma:

$$x = \frac{71,5 \cdot 9,8}{100} = 7 \text{ m con lo que } L' = L + 7 = 27 \text{ m}$$

26.b.- A partir de la expresión:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{71,5}{100}} = 5,31 \text{ s}$$

26.c.- La energía que posee la persona en el punto más alto será la energía potencial U = mg(L+A), mientras que en el punto más bajo, la energía será, únicamente, la energía potencial elástica de la cuerda, es decir, $kA^2/2$. Igualando estas energías, tendremos:

$$mg(L+A) = \frac{kA^2}{2}$$

obteniéndose la ecuación de segundo grado:

$$kA^2 - 2mgA - 2mgL = 0$$

Sustituyendo L por 20 y resolviendo la ecuación, se obtiene A = 25,15 m

27.- Un muelle de masa despreciable, suspendido de su extremo superior, mide 11,5 cm. Al colgar una masa de 300 g en el extremo libre, el muelle se estira hasta una posición de equilibrio en la cual su nueva longitud es de 23,5 cm.

27.a.- Calcula la constante elástica del muelle a partir de la deformación descrita.

27.b.- Empujamos la masa 5 cm hacia arriba comprimiendo el muelle, y la soltamos. Medimos 10 oscilaciones en 7 segundos. Determina la expresión para la posición de la masa en función del tiempo.

27.c.- Calcula de nuevo la constante del muelle a partir del periodo de oscilación. Halla el valor de la energía total de la masa mientras oscila.

Solución:

27.a.- mg = Kx, obteniéndose x $= \frac{0,3 \cdot 9,8}{0,12} = 24,5$ N/m

27.b.- La ecuación que nos da la posición será: $y = y_0$ sen $(\omega t + \varphi_0)$, siendo $y_0 = 0,05$ m y $\omega = 2\pi\nu = \frac{20\pi}{7}$ s^{-1}. Para hallar φ_0, suponemos que, para t = 0, $y = y_0$, por lo que sen $\varphi_0 = 1$ y $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Así pues, la ecuación que nos da la posición será:

$$y = 0,05 \text{ sen} \left(\frac{20\,\pi}{7}\,t + \frac{\pi}{2}\right)$$

27.c.- $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow K = m\omega^2 = 0,3\,\left(\frac{20\,\pi}{7}\right)^2 = 24,17$ N/m

La energía será: $E = \frac{1}{2} KA^2 = \frac{24,17 \cdot 0,05^2}{2} = 0,03$ J